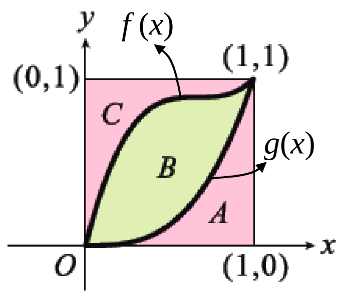
單元 6　積分的應用　習題甲　　　　三年___班 座號：____　姓名：

觀念澄清：

在右圖中，區域 B 的上、下緣分別是函數 $f(x)$與 g($x$)在區間[0，1]上的圖形。

下列敘述對的打「○」，錯的打「×」




□ (1)區域 $A$ 的面積為 $\int_0^1 g(x)dx$

□ (2)區域 $B$ 的面積為 $\int_0^1 (f(x)-g(x))dx$

□ (3)區域 $C$ 的面積為 $\int_0^1 f(x)dx$

□ (4)區域 $A$ 繞 $x$ 軸所得的旋轉體體積為 $\int_0^1 \pi(g(x))^2 dx$

□ (5)區域 $B$ 繞 $x$ 軸所得的旋轉體體積為 $\int_0^1 \pi(f(x)-g(x))^2 dx$

解：(1)○：由定積分與面積的關係，得知此選項正確

(2)○：由曲線間的面積公式，得知此選項正確。

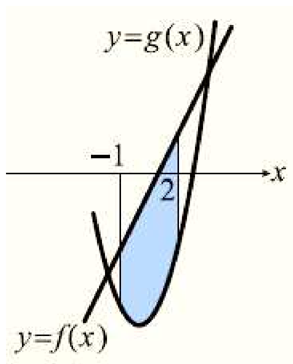
(3)×：區域 $C$ 的面積為 $\int_0^1 (1-f(x))dx$。

(4)○：由旋轉體的體積公式，得知此選項正確。

(5)×：此體積為 $\int_0^1 \pi(f(x))^2 dx-\int_0^1 \pi(g(x))^2 dx$。

一、基礎題：

1.求兩函數 $f(x)=2x-2$ 與 g($x$)$=x^2-8$ 的圖形與 $x=-1$，$x=2$ 所圍成的區域面積

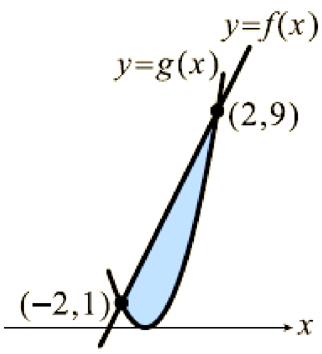



解：如圖所示，在區間[−1，2]上，都有 $f(x)\ge g(x)$，利用曲線間的面積公式，

得所求面積$=\int_{-1}^2 (f(x)-g(x))dx=\int_{-1}^2 [(2x-2)-(x^2-8)]dx$

$=\int_{-1}^2 (-x^2+2x+6)dx=(-\frac{1}{3}x^3+x^2+6x)\Big|_{-1}^2=18$

2.求兩函數 $f(x)=2x+5$ 與 g($x$)$=x^2+2x+1$ 的圖形所圍成的區域面積




解：解聯立方程式$\begin{cases} y=2x+5 \\ y=x^2+2x+1 \end{cases}$得兩函數圖形相交於(−2，1)與(2，9)二點，如圖所示

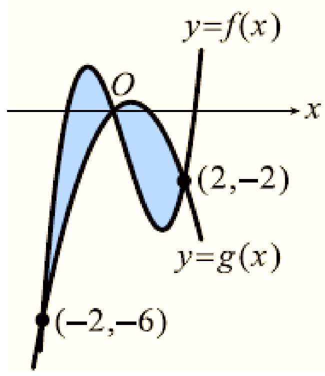
因為在區間[−2，2]上，都有 $f(x)\ge g(x)$，所以利用曲線間的面積公式，

得所求面積$=\int_{-2}^2 (f(x)-g(x))dx=\int_{-2}^2 [(2x+5)-(x^2+2x+1)]dx$

$=\int_{-2}^2 (-x^2+4)dx=(-\frac{1}{3}x^3+4x)\Big|_{-2}^2=\frac{32}{3}$

3.求兩函數 $f(x)=x^3-x^2-3x$ 與 $g(x)=-x^2+x$ 的圖形所圍成的區域面積

解：解聯立方程式 $\begin{cases} y=x^3-x^2-3x \\ y=-x^2+x \end{cases}$ 得兩函數圖形相交於(−2，−6)，(0，0)與(2，−2)三點，如圖所示




從右圖中可知：$f(x)$與 $g(x)$的圖形所圍成的封閉區域共有兩塊；

在區間[−2，0]上，都有 $f(x)\geq g(x)$；在區間[0，2]上，都有 $g(x)\geq f(x)$

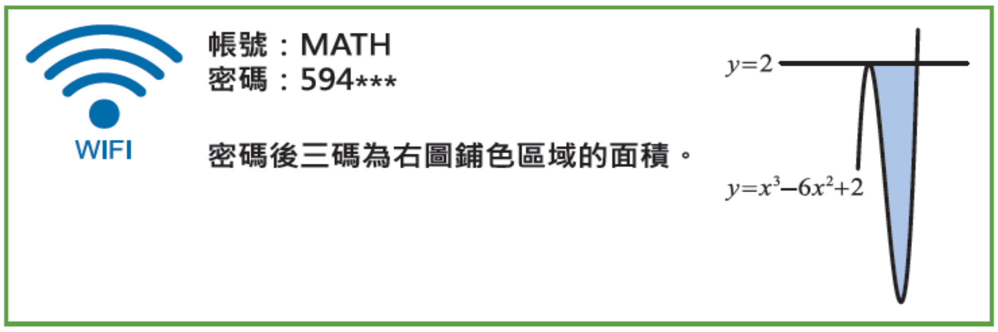
利用曲線間的面積公式，得 $f(x)$與 $g(x)$的圖形所圍成的區域面積為

$$\int_{-2}^{0}(f(x)-g(x))dx+\int_{0}^{2}(g(x)-f(x))dx$$

$$=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx+\int_{0}^{2}(-x^3+4x)dx=(\frac{1}{4}x^4-2x^2)\Big|_{-2}^{0}+(-\frac{1}{4}x^4+2x^2)\Big|_{0}^{2}=4+4=8$$

4.數學科辦公室的 WIFI 密碼結合一道數學題目，如下：

試問：該 WIFI 密碼的後三碼為何？




解：解聯立方程式 $\begin{cases} y=x^3-6x^2+2 \\ y=2 \end{cases}$，得

兩函數圖形相交於(0，2)與(6，2)二點

利用曲線間的面積公式，

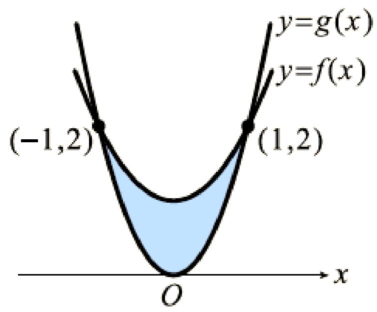
得所求面積

$$=\int_{0}^{6}(2-(x^3-6x^2+2))dx=\int_{0}^{6}(-x^3-6x^2)dx=(-\frac{1}{4}x^4+x)\Big|_{0}^{6}=108$$，故該 WIFI 密碼的後三碼為 108

5.已知 R 為兩函數 $f(x)=x^2+1$ 與 $g(x)=2x^2$ 的圖形所圍成的區域，求：

(1) R 的面積

(2) R 繞 $x$ 軸所得的旋轉體體積




解：解聯立方程式 $\begin{cases} y=x^2+1 \\ y=2x^2 \end{cases}$，得兩函數圖形相交於(−1，2)與(1，2)二點，如圖所示

(1)因為在區間[−1，1]上，都有 $f(x)\geq g(x)$，利用曲線間的面積公式，

得所求面積 $=\int_{-1}^{1}[(x^2+1)-2x^2]dx=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx=(-\frac{1}{3}x^3+x)\Big|_{-1}^{1}=\frac{4}{3}$

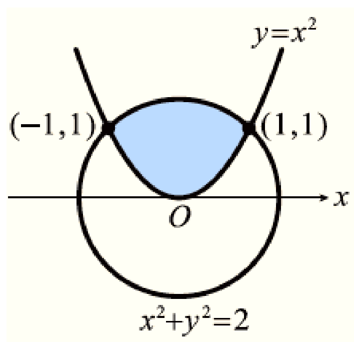
(2)因為在區間[−1，1]上，都有 $f(x)\geq g(x)$，

所以所求體積 $=\int_{-1}^{1}\pi(x^2+1)^2dx-\int_{-1}^{1}\pi(2x^2)^2dx$

$$=\pi\int_{-1}^{1}(-3x^4+2x^2+1)dx=\pi(-\frac{3}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+x)\Big|_{-1}^{1}=\frac{32\pi}{15}$$

6.已知 R 為圓 $x^2+y^2=2$ 的上半圓弧與拋物線 $y=x^2$ 所圍成的區域，求 R 繞 $x$ 軸所得的旋轉體體積

解：解聯立方程式 $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ y=x^2 \end{cases}$，得兩函數圖形相交於(−1，1)與(1，1)二點，如圖所示




因為 $y=\sqrt{2-x^2}$ 的圖形是上半圓弧，且在區間[−1，1]上，都有 $\sqrt{2-x^2}\geq x^2$

所以所求體積 $=\int_{-1}^{1}\pi(\sqrt{2-x^2})^2dx-\int_{-1}^{1}\pi(x^2)^2dx=\pi\int_{-1}^{1}(-x^4-x^2+2)dx$

$$=\pi(-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+2x)\Big|_{-1}^{1}=\frac{44\pi}{15}$$

7.博物館窗戶的玻璃由藍色玻璃與紫色玻璃所組成，其造型如右圖所示。一整塊玻璃為底長 2 公尺，高 1 公尺的矩形，其中藍色玻璃部分為拋物線造型，其曲線部分是拋物線的一部分，而且拋物線與矩形相切於頂點。試問藍色玻璃的面積是多少平方公尺？

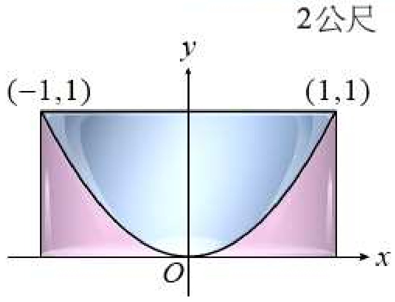

解：將玻璃圖形放在坐標平面上，如右圖所示。

因為拋物線開口向上且頂點為(0，0)，所以可設其方程式為 $y=ax^2$

又因為通過點(1，1)，所以 $1=a\times1^2$，解得 $a=1$。因此拋物線方程式為 $y=x^2$

利用曲線間的面積公式，

得藍色玻璃的面積為 $\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=(x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-1}^{1}=\frac{4}{3}$ 平方公尺

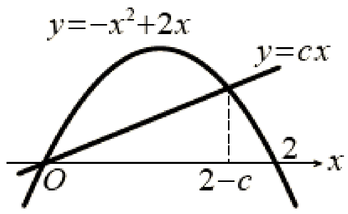



二、進階題：

8.設 R 為函數 $f(x)=-x^2+2x$ 與 $x$ 軸所圍成的區域。

(1)求 R 的面積

(2)已知直線 $y=cx$ 將 R 分成面積相等的兩塊區域，求實數 $c$ 的值




解：(1) $f(x)=-x^2+2x=-x(x-2)$，得 $f(x)$的圖形與 $x$ 軸交於(0，0)，(2，0)兩點，如圖所示

因為在區間[0，2]上，$f(x)\geq 0$，

所以 R 的面積為 $\int_0^2(-x^2+2x)dx=(\frac{1}{3}x^3+x^2)\Big|_0^2=\frac{4}{3}$

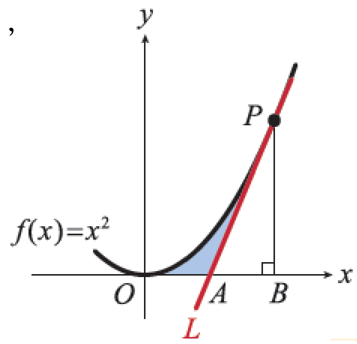
(2)解聯立方程式 $\begin{cases}y=cx\\ y=-x^2+2x\end{cases}$，得兩圖形交於(0，0)，$(2-c，2c-c^2)$二點

$\Rightarrow y=-x^2+2x$ 與 $y=cx$ 所圍成區域的面積為

$$\int_0^{2-c}[(-x^2+2x)-cx]dx=\int_0^{2-c}[(-x^2+(2-c)x)]dx=(-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(2-c)x^2)\Big|_0^{2-c}=\frac{1}{6}(2-c)^3$$

$\Rightarrow$根據題意，$\frac{1}{6}(2-c)^3=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}$，$\Rightarrow(2-c)^3=4$，得 $2-c=\sqrt[3]{4}$，$\therefore c=2-\sqrt[3]{4}$

9.在右圖中，P 為函數 $f(x)=x^2$ 圖形上一點，L 為以 P 為切點的切線。已知 $f(x)$的圖形與 $x$ 軸，直線 L 所圍成區域的面積為 18，求 P 點的坐標




解：如圖，設 P 點的坐標為$(t，t^2)$，B$(t，0)$

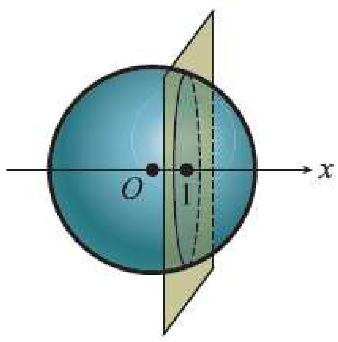
因為 $f'(x)=2x$，所以直線 L：$y-t^2=2t(x-t)$，即 $y=2tx-t^2$，A$(\frac{t^2}{2}，0)$

根據題意，$\int_0^t x^2dx-\Delta$ABP 面積$=18$

$\Rightarrow\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}\times\frac{t}{2}\times t^2=18$，$\Rightarrow\frac{1}{12}t^3=18$，得 $t=6$，故 P 點的坐標為(6，36)

10.將一個半徑為 3 的球體之球心置於坐標空間中原點 O 的位置，如右圖所示。已知平面 $x=1$ 將此球體切成大小二塊，求大小二塊的體積比

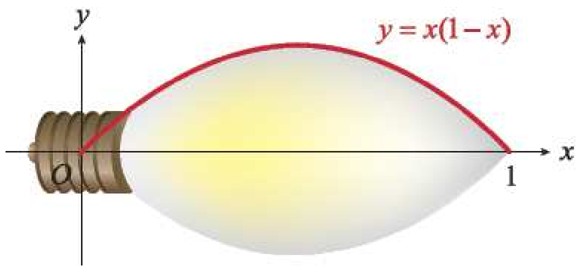
解：根據題意，得小塊的體積為 $\int_1^3\pi(\sqrt{3^2-x^2})^2dx=\pi\int_1^3(9-x^2)^2dx=\pi(9x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_1^3=\frac{28\pi}{3}$




而大塊的體積等於整個球的體積減去小塊的體積，即 $\frac{4}{3}\pi\times3^3=\frac{80\pi}{3}$

$\Rightarrow$大小二塊的體積比為 $\frac{80\pi}{3}:\frac{28\pi}{3}=20:7$

11.下圖中的燈泡造型是由函數 $f(x)=x(1-x)$，$0\le x\le 1$ 的圖形與 $x$ 軸所圍成的區域繞 $x$ 軸所得的旋轉體 S 設計而成，求旋轉體 S 的體積



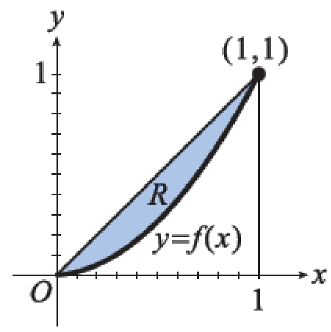

解：利用旋轉體的體積公式，得體積為 $\int_0^1 \pi[x(1-x)]^2\,dx$

$$=\pi\int_0^1 (x^4-2x^3+x^2)dx=\pi\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{30}$$

12.設函數 $f(x)$是定義在[0，1]上的遞增連續函數，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$。經濟學家將這類函數的圖形統稱為羅倫茲曲線，並常使用它們來測度「所得分配不均」的程度。例如 $f(0.2)=0.15$ 表示 20%最低所得者的總所得占全部總所得的 15%。除此之外，與羅倫茲曲線相關的吉尼係數(Gini coefficient)也可以用來測度所得分配不均程度，其定義如下：

吉尼係數＝2×(R 的面積)，其中 R 代表右圖中被羅倫茲曲線 $y=f(x)$割出的鋪色區域。

吉尼係數愈大表示所得分配愈不平均；反之，係數愈小則分配愈平均。




已知某一國家的所得分配符合羅倫茲曲線 $y=\frac{14}{15}x^2+\frac{1}{15}x$，回答下列問題：

(1)使用羅倫茲曲線，求這國家 30%最低所得者的總所得占全部總所得的百分比

(2)已知吉尼係數$=k\int_0^1 (x-f(x))dx$，其中 $k$ 為定值，求 $k$ 的值

(3)求此國家的吉尼係數

解：(1) $f(0.3)=\frac{14}{15}\times\frac{9}{100}+\frac{1}{15}\times\frac{3}{10}=\frac{13}{125}=0.104$，所以所求為 10.4%

(2)因為 R 是由 $y=x$、$y=f(x)$、$x=0$ 與 $x=1$ 所圍成的區域，所以由曲線間的面積公式，

得 R 的面積為 $\int_0^1 (x-f(x))dx$，⇒吉尼係數＝2×(R 的面積)$=2\int_0^1 (x-f(x))dx$，∴$k=2$

(3)由(2)，吉尼係數$=2\int_0^1 (x-f(x))dx=2\int_0^1 \left[x-\left(\frac{14}{15}x^2+\frac{1}{15}x\right)\right]dx$

$$=2\int_0^1 \left(-\frac{14}{15}x^2+\frac{14}{15}x\right)dx=-\frac{28}{15}\int_0^1 (x^2-x)dx=-\frac{28}{15}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1=\frac{14}{45}$$