3-2 條件機率與獨立事件

例題 1 條件機率：撲克牌的取牌問題

將一副撲克牌均勻洗牌後，任取 1 張，假設每張牌被取出的機會都相等，則：

(1) 已知取出牌的點數是 7 點，試求這張牌是梅花 7 的機率

(2) 已知取出牌的花色是黑桃，試求這張牌是黑桃 3 的機率

解 (1) P（梅花 7｜7 點）$=\dfrac{1}{4}$

(2) P（黑桃 3｜黑桃）$=\dfrac{1}{13}$

例題 2 條件機率：投擲硬幣的正反面問題

擲三枚均勻的硬幣，已知至少出現兩個正面，試求：

(1) 恰好出現三個正面的機率

(2) 恰好出現兩個正面、一個反面的機率

解 至少出現兩個正面有 4 種情形如下：

三個正面：正正正 1 種情形

兩個正面、一個反面：正正反、正反正、反正正 3 種情形

(1) P（恰好出現三個正面｜至少出現兩個正面）$=\dfrac{1}{4}$

(2) P（兩個正面、一個反面｜至少出現兩個正面）$=\dfrac{3}{4}$

例題 3 條件機率：擲骰子的點數問題

擲一顆公正骰子一次，已知出現點數不小於 2，試求：

(1) 出現點數大於 5 的機率

(2) 出現點數是偶數的機率）

解 點數不小於 2 的事件有 $\{2，3，4，5，6\}$ 等 5 個元素

(1) 點數大於 5 且點數不小於 2 的事件 $\{6\}$ 有 1 個元素

故 P（點數大於 5｜點數不小於 2）$=\dfrac{1}{5}$

(2) 點數是偶數且點數不小於 2 的事件 $\{2，4，6\}$ 有 3 個元素

故 P（點數是偶數｜點數不小於 2）$=\dfrac{3}{5}$

例題 4 條件機率：一般問題

檢視段考成績，全班有 $\frac{5}{9}$ 的同學數學及格，有 $\frac{7}{9}$ 的同學英文及格，有 $\frac{4}{9}$ 的同學數學與英文都及格。現在任意抽選一位同學，試問：

(1) 若這位同學數學及格，則他英文及格的機率是多少？

(2) 若這位同學英文及格，則他數學及格的機率是多少？

解 設 A、B 分別代表數學、英文及格的事件，則 $P(A)=\frac{5}{9}$，$P(B)=\frac{7}{9}$，$P(A\cap B)=\frac{4}{9}$

(1) $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9}}=\dfrac{4}{5}$

(2) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{7}{9}}=\dfrac{4}{7}$

例題 5 檢驗兩事件是否獨立

擲一顆公正骰子一次，令事件 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，$C=\{3,4,6\}$，試問：

(1) A 與 B 是否為獨立事件？

(2) A 與 C 是否為獨立事件？

解 $P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，$P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，$P(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(1) $A\cap B=\{3,4\}$，得 $P(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$P(A)P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

故 A 與 B 不是獨立事件

(2) $A\cap C=\{3,4\}$，得 $P(A\cap C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$P(A)P(C)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

故 A 與 C 是獨立事件

例題 6 獨立事件公式的應用

甲、乙兩人一起打靶，已知命中率分別為 $\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$，且兩人打中靶面的事件為獨立事件。今兩人各射擊 1 發，試求：

(1) 兩人都沒打中的機率

(2) 靶面恰中 1 發的機率

解 設 A、B 分別為甲、乙打中靶面的事件，$P(A)=\frac{2}{3}$，$P(B)=\frac{3}{4}$

(1) 因為 A，B 獨立，所以 A'，B' 也獨立

所求為 $P(A'\cap B')=P(A')P(B')=\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

(2) 分為甲打中乙未打中，或甲未打中乙打中兩種情形，即 $A\cap B'$，$A'\cap B$

另一方面，A 與 B'，A' 與 B 也是獨立事件，故所求機率為

$P(A\cap B')+P(A'\cap B)=P(A)P(B')+P(A')P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{5}{12}$

例題 7 三事件為獨立事件公式的應用

甲、乙、丙三人分別對同一個靶射擊一發子彈，根據過去的紀錄，三人的命中率分別是 $\frac{2}{3}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{2}$，且每個人命中與否是獨立事件，試問：

(1) 三人都命中的機率

(2) 恰有兩人命中的機率

解 設 A、B、C 分別代表甲、乙、丙命中的事件

(1) 三人都命中的機率為 $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{9}$

(2) 恰有兩人命中的機率為 $P(A\cap B\cap C')+P(A\cap B'\cap C)+P(A'\cap B\cap C)$

$=P(A)P(B)P(C')+P(A)P(B')P(C)+P(A')P(B)P(C)$

$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{2}+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{7}{18}$

例題 8 獨立事件公式的計算（一）

假設 A、B 為獨立事件，且 $P(A)=\frac{2}{3}$，$P(B)=\frac{3}{5}$，試求：

(1) $P(A\cap B')$

(2) $P(A'\cap B')$

解 (1) A、B 為獨立事件，則 A、B' 也是獨立事件

故 $P(A\cap B')=P(A)P(B')=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{15}$

(2) A、B 為獨立事件，則 A'、B' 也是獨立事件

故 $P(A'\cap B')=P(A')P(B')=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{2}{15}$

例題 9 獨立事件公式的計算（二）

已知 A，B 是兩獨立事件，且 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(A\cup B)=\frac{1}{2}$，試求：

(1) $P(B)$

(2) $P(B\mid A)$

解 A，B 是獨立事件，故 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

(1) 因為 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

所以 $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+P(B)-\frac{1}{3}P(B)$

$\frac{2}{3}P(B)=\frac{1}{6}$，故得 $P(B)=\frac{1}{4}$

(2) 因為 A、B 獨立，所以 $P(B\mid A)=P(B)=\frac{1}{4}$

〈另解〉

將本題條件代入公式，可以得到相同的結果

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)=\frac{1}{4}$$