

習題 4-4 解答

一、基本題

1. 一副撲克牌有 52 張，經過均勻洗牌後任取 1 張，若每張被取出的機會均等，試求：

- (1) 取出的牌是紅色 A 的機率。
 (2) 取出的牌不是黑桃的機率。

解 樣本空間為 $S = \{\spadesuit A, \dots, \spadesuit K, \heartsuit A, \dots, \heartsuit K, \clubsuit A, \dots, \clubsuit K, \diamondsuit A, \dots, \diamondsuit K\}$,

(1) 令事件 A 表示取出紅色 A 的事件，故 $A = \{\heartsuit A, \diamondsuit A\}$ 。因此

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}。$$

(2) 令事件 B 表示取出黑桃的事件，故 $B = \{\spadesuit A, \dots, \spadesuit K\}$ 。因此

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{n(B)}{n(S)} = 1 - \frac{13}{52} = \frac{3}{4}。$$

2. 甲、乙兩人從 1, 2, 3, 4, 5 中各任選一個幸運數字，試求兩人選到相同數字的機率。

解 [解法一]

令事件 A 表示兩人所選的數字相同的事件，因為甲、乙各有 C_1^5 種選法，

$$\text{則 } P(A) = \frac{C_1^5 \times C_1^1}{C_1^5 \times C_1^5} = \frac{1}{5}。$$

[解法二]

另 A 表示兩人所選的數字相同事件，則 A' 表示兩人所選的數字不同的事件。

$$\text{所以機率 } P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{C_1^5 \times C_1^4}{C_1^5 \times C_1^5} = \frac{1}{5}。$$

3. 甲、乙、丙、丁、戊等 5 人任意排成一列，試求：

- (1) 甲恰在正中間的機率。
 (2) 甲、乙恰在最兩側的機率。

解 (1) 令事件 A 表示甲恰在正中間的事件，所以甲固定中間，其餘有 $4!$ 種的排法，

$$\text{則 } P(A) = \frac{1 \times 4!}{5!} = \frac{1}{5}。$$

(2) 令事件 B 表示甲、乙在最兩側的事件，所以甲左乙右或甲右乙左，其餘中間有 $3!$ 種的排

$$\text{法，則 } P(B) = \frac{2 \times 3!}{5!} = \frac{1}{10}。$$

4. 假設 S 為某試驗之樣本空間, A, B 為兩事件。若事件 A 或事件 B 發生的機率為 $\frac{1}{2}$, 事件 A 與事件 B 均發生的機率為 $\frac{1}{4}$, 事件 A 發生的機率為 $\frac{1}{3}$, 試求:
- (1) 事件 B 發生的機率。
 - (2) 事件 A 發生且事件 B 不發生的機率。

解 (1) 由題意可得 $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A) = \frac{1}{3}$, 則

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{4},$$

$$\text{故 } P(B) = \frac{5}{12}。$$

$$(2) P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

5. 某摸彩箱中有分別標示 1, 2, 3, 4, 5, 6 號的彩券各一張, 假設每張彩券被抽出的機會均等, 今從中抽出一張, 抽到幾號則可得幾元, 試問獎金金額的期望值。

解 $E = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$ (元)。

二、進階題

6. 從一副 52 張的撲克牌中任意選取相異 5 張牌, 假設每一張被選取的機率均等, 試求:
- (1) 這 5 張牌是同一花色的機率。
 - (2) 這 5 張牌為“兩對”(形如 $aabbc$ 的組合)的機率。
 - (3) 第(1)、(2)小題哪一種的機率較低?

解 樣本空間為 $S = \{\spadesuit A, \dots, \spadesuit K, \heartsuit A, \dots, \heartsuit K, \clubsuit A, \dots, \clubsuit K, \diamondsuit A, \dots, \diamondsuit K\}$ 。

- (1) 令事件 A 表示取出 5 張牌同一花色的事件, 故 $n(A) = C_1^4 \times C_5^{13}$ 。因此機率為

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{C_1^4 \times C_5^{13}}{C_5^{52}} = \frac{33}{16660}。$$

- (2) 令事件 B 表示取出 5 張牌是“兩對”的事件,

故 $n(B) = (C_2^{13} \times C_2^4 \times C_2^4) \times C_1^{44}$ 。因此機率為

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{(C_2^{13} \times C_2^4 \times C_2^4) \times C_1^{44}}{C_5^{52}} = \frac{198}{4165}。$$

- (3) 第(1)小題 5 張牌同一花色的機率較低。

7. 袋中有 5 紅球 3 白球 1 黑球，假設每球被取出的機會均等，今從袋中一次取出 2 球，試求恰為 1 紅球 1 白球的機率。

解 $n(S) = C_2^9$ ，令事件 A 表示取出 1 紅球 1 白球的事件，故 $n(A) = C_1^5 \times C_1^3$ 。因此機率為

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{C_1^5 \times C_1^3}{C_2^9} = \frac{5}{12}。$$

8. 某考試的單選題有 5 個選項，答對得 4 分，答錯倒扣 1 分，未作答則不給分亦不扣分。小珊已經確定某一個選項是錯的，請問她想得到較高分數的話，該不該猜答？

解 $E = \frac{1}{4} \times 4 + \frac{3}{4} \times (-1) = \frac{1}{4}$ ，期望值大於 0，故應該猜答。

9. 高鐵的第 10, 11, 12 節車廂是自由座。今有甲、乙、丙三人買自由座且搭同一班車。試求：

- (1) 三人在同一車廂的機率。
- (2) 三人皆在不同車廂的機率。

解 (1) $\frac{3}{3^3} = \frac{1}{9}$

(2) $\frac{3!}{3^3} = \frac{2}{9}$

三、挑戰題

例 10. “今彩 539” 的玩法係由 01 到 39 的號碼中任選 5 個投注，開獎單位開出 5 個號碼為該期之開獎號碼，如果彩券上的 5 個號碼與開獎號碼完全吻合，就得頭獎。某彩迷從 39 個號碼中挑選 20 個，再把這 20 個號碼的所有組合均予簽注。只要開獎號碼在這 20 個號碼中，則頭獎必中無疑。

- (1) 若每注需付 50 元，則此人共花了多少錢？
- (2) 請問此人中頭獎的機率為何？



解 (1) $50 \times C_5^{20} = 50 \times 15504 = 775200$ (元)

(2) [解法一]

$$\frac{C_5^5 \times C_{15}^{34}}{C_{20}^{39}} = \frac{34 \times 33 \times 32 \times L \times 20}{15 \times 14 \times 13 \times L \times 1} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16}{39 \times 38 \times 37 \times 36 \times 35} = \frac{272}{10101}$$

[解法二]

$$\frac{C_5^{20}}{C_5^{39}} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16}{39 \times 38 \times 37 \times 36 \times 35} = \frac{272}{10101}$$