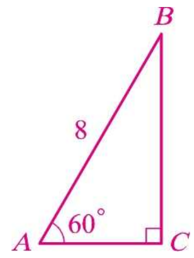
1-3 面積公式與正餘弦定理

例題 1 正射影長與三角形面積公式

直角三角形 ABC 中，$\angle A = 60°$，$\angle C = 90°$，$\overline{AB} = 8$。試求：

(1) $\overline{AC}$ (2) $\triangle ABC$ 面積



解 (1) $\overline{AC} = 8\cos A$

$= 8 \times \cos 60° = 8 \times \frac{1}{2} = 4$

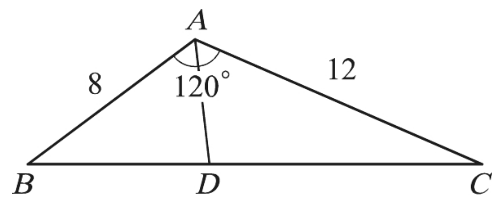
(2) $\triangle ABC$ 面積為 $\frac{1}{2} \times 8 \times 4 \times \sin 60°$

$= \frac{1}{2} \times 8 \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$

例題 2 三角形面積公式

如右圖，$\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A = 120°$，$\overline{AB} = 8$，$\overline{AC} = 12$，$\angle A$ 的角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D 點。試求：

(1) $\triangle ABC$ 面積 (2) $\overline{AD}$



解 (1) $\triangle ABC$ 面積為 $\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin A$

$= \frac{1}{2} \times 8 \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$

(2) 設角平分線段長為 x

$\triangle ABD$ 面積 $+$ $\triangle ACD$ 面積 $=$ $\triangle ABC$ 面積

$\angle BAD = \angle CAD = 60°$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 8 \times x \times \sin 60° + \frac{1}{2} \times 12 \times x \times \sin 60° = 24\sqrt{3}$

$\Rightarrow 4x \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 6x \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$

$\Rightarrow 5\sqrt{3}x = 24\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $x = \frac{24}{5}$

$\therefore \overline{AD} = \frac{24}{5}$

例題 3 正弦定理(一)

已知△ABC 中，∠A：∠B：∠C＝1：2：3，試求：

(1) 三內角∠A、∠B、∠C

(2) 三邊邊長比 $\overline{BC}:\overline{CA}:\overline{AB}$

解 (1) ∵∠A：∠B：∠C＝1：2：3

∴ $\angle A=180°\times\frac{1}{6}=30°$，$\angle B=180°\times\frac{2}{6}=60°$，$\angle C=180°\times\frac{3}{6}=90°$

(2) 由正弦定理知

$\overline{BC}:\overline{CA}:\overline{AB}=\sin A:\sin B:\sin C$

$=\sin 30°:\sin 60°:\sin 90°$

$=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}:1$

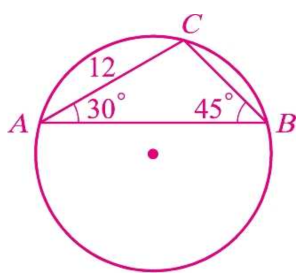
$=1:\sqrt{3}:2$

例題 4　正弦定理(二)

△ABC 中，∠A＝30°，∠B＝45°，$\overline{AC}=12$。試求：

(1) $\overline{BC}$　　(2) △ABC 的外接圓面積

解 (1) 由正弦定理知 $\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{AC}}{\sin B}$



即 $\frac{\overline{BC}}{\sin 30°}=\frac{\overline{AC}}{\sin 45°}$ ⇨ $\frac{\overline{BC}}{\frac{1}{2}}=\frac{12}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

∴ $\overline{BC}=6\sqrt{2}$

(2) 設外接圓半徑為 R

由正弦定理知 $\frac{\overline{AC}}{\sin B}=2R$，即 $\frac{12}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2R$

得 $R=6\sqrt{2}$

故外接圓面積為 72π

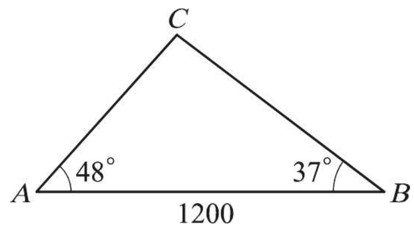
例題 5 測量問題（正弦定理的應用，使用計算機）

如右圖，A、B 兩地距離 1200 公尺，自 A 地測得$\angle BAC=48°$，自 B 地測得$\angle ABC=37°$。試求：

(1) A、C 兩地之距離 $\overline{AC}$

(2) B、C 兩地之距離 $\overline{BC}$

（四捨五入取到小數點後第一位）



解 $\angle C=180°-(48°+37°)=95°$

由正弦定理知$\dfrac{\overline{AC}}{\sin 37°}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin 48°}=\dfrac{1200}{\sin 95°}$

分別按計算機

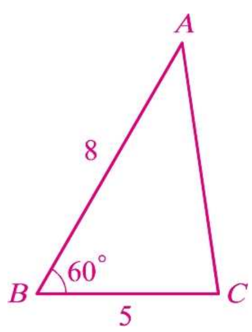
(1) $\overline{AC}=\dfrac{1200\sin 37°}{\sin 95°}\approx 724.9366305\approx 724.9$，取 $\overline{AC}\approx 724.9$（公尺）

(2) $\overline{BC}=\dfrac{1200\sin 48°}{\sin 95°}\approx 895.1802216\approx 895.2$，取 $\overline{BC}\approx 895.2$（公尺）

例題 6 餘弦定理基本應用

$\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=5$，$\angle B=60°$，試求：

(1) $\overline{AC}$ (2) $\cos A$



解 (1) 由餘弦定理知

$\overline{AC}^2=8^2+5^2-2\times 8\times 5\times\cos 60°$

$=89-40=49$

$\therefore\ \overline{AC}=7$

(2) 由餘弦定理知

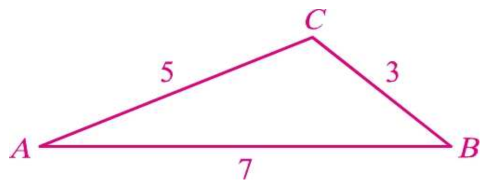
$\cos A=\dfrac{8^2+7^2-5^2}{2\times 8\times 7}=\dfrac{88}{2\times 8\times 7}=\dfrac{11}{14}$

例題 7　餘弦定理求夾角（使用計算機）

已知△ABC 中，三邊邊長分別為 $\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CA}=5$。試求：

(1) $\angle A$　　(2) $\angle C$

（若非特別角，請四捨五入取到小數點後第一位）



解 分別用餘弦定理求解

(1) $\cos A=\dfrac{5^2+7^2-3^2}{2\times5\times7}=\dfrac{13}{14}$

按計算機得

$\angle A\approx 21.7867893°\approx 21.8°$

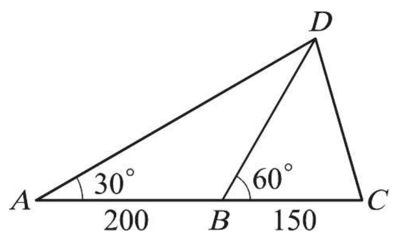
(2) $\cos C=\dfrac{5^2+3^2-7^2}{2\times5\times7}=-\dfrac{1}{2}$

$-\dfrac{1}{2}$是特別角的餘弦值，不需使用計算機

$\therefore \angle C=180°-60°=120°$

例題 8　測量問題（餘弦定理，使用計算機）

如右圖，A、B、C 為東西向筆直公路上的三點，D 是公路北側地面一點。小明在 A 點測得$\angle DAC=30°$後，沿著公路走 200 公尺到 B 點，測得$\angle DBC=60°$，再走 150 公尺到 C 點，試求：



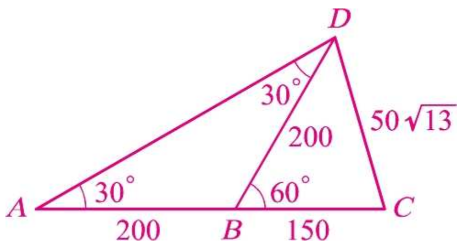
(1) C 點到 D 點之距離 $\overline{CD}$

(2) $\angle BCD$。（使用計算機四捨五入取到小數點後第一位）

解 (1) 如右圖，$\angle ADB=60°-30°=30°$

$\therefore$ △BAD 是等腰三角形，⇨ $\overline{BD}=\overline{BA}=200$

△BCD 中，由餘弦定理知



$\overline{CD}^2=200^2+150^2-2\times200\times150\times\cos60°$

$=62500-30000$

$=32500$

$\therefore$ $\overline{CD}=50\sqrt{13}$（約 180.3 公尺）

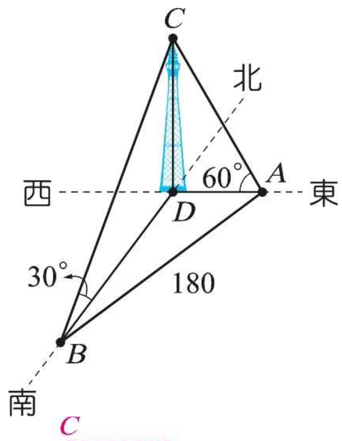
(2) 由餘弦定理知

$\cos\angle BCD=\dfrac{150^2+(50\sqrt{13})^2-200^2}{2\times150\times50\sqrt{13}}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$

按計算機得$\angle BCD\approx 73.89788625°\approx 73.9°$

例題 9 立體測量(一)

如右圖，在塔的正東方一點 A 測得塔頂仰角 $60°$，在塔的正南方一點 B 測得塔頂仰角 $30°$。已知 A 點與 B 點距離 180 公尺，試求塔高 $\overline{CD}$。



解 由題意知，

地面上 A、B、D 點與塔頂 C 點都是長方體的頂點

設塔高 $\overline{CD}=h$

在直角三角形 ACD 中，$\tan 60°=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\sqrt{3}$ $\therefore \overline{AD}=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$

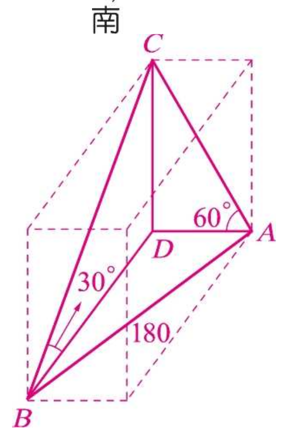
在直角三角形 BCD 中，$\tan 30°=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\therefore$ $\overline{BD}=\sqrt{3}\,h$

在直角三角形 ABD 中，$\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2$

故得 $\dfrac{h^2}{3}+3h^2=180^2$，$\dfrac{10}{3}h^2=32400$

⇨ $h^2=9720$ ⇨ $h=18\sqrt{30}$

故塔高 $\overline{CD}=18\sqrt{30}$（公尺）（約 98.59 公尺）



例題 10 立體測量(二)（使用計算機）

已知某大樓高 120 公尺，今自樓頂測得東 $30°$南地面 A 點的俯角為 $30°$，又測得東 $50°$北地面 B 點的俯角為 $45°$，試求 A、B 兩點距離。（四捨五入取到整數位）

解 如右圖，$\angle BCA=80°$

在$\triangle ACD$ 中，$\tan 30°=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$ $\therefore \overline{AC}=\dfrac{120}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=120\sqrt{3}$

在$\triangle BCD$ 中，$\tan 45°=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BC}}$ $\therefore$ $\overline{BC}=120$

由餘弦定理，按計算機得

$\overline{AB}^2=(120\sqrt{3})^2+120^2-2\times120\sqrt{3}\times120\times\cos 80°\approx$ 48937.89697

$\overline{AB}\approx 221.2191153\approx 221$

$\therefore$ A、B 相距約 221 公尺