1-2 廣義角與極坐標

基礎題

1. 試求下列廣義角的同界角 θ，且 $0° \leq \theta < 360°$

(1) 450°　(2) $-610°$　(3) $-5°$

解 (1) $450° = 360° + 90°$，∴同界角為 90°

(2) $-610° = (-2) \times 360° + 110°$，∴同界角為 110°

(3) $-5° = (-1) \times 360° + 355°$，∴同界角為 355°

2. (1) 若點（$\sin\theta$，$-\cos\theta$）在第三象限內，則 θ 是第幾象限角？

(2) 已知點 P（$\tan\theta$，$\cos\theta$）在第三象限內，則點 Q（$\sin\theta$，$\cos\theta$）在第幾象限內？

解 (1) 因為點（$\sin\theta$，$-\cos\theta$）在第三象限內，所以 $\sin\theta < 0$，$-\cos\theta < 0$

得 $\sin\theta < 0$，$\cos\theta > 0$，故 θ 為第四象限角

(2) 因為 P（$\tan\theta$，$\cos\theta$）在第三象限內，所以 $\tan\theta < 0$，$\cos\theta < 0$

得 θ 為第二象限角，因此 $\sin\theta > 0$，$\cos\theta < 0$

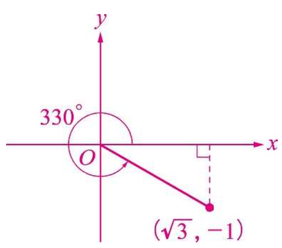
故點 Q（$\sin\theta$，$\cos\theta$）在第四象限內

3. 試求下列各三角比的值：

(1) $\sin(-390°)$　(2) $\cos(-240°)$　(3) $\tan(-135°)$

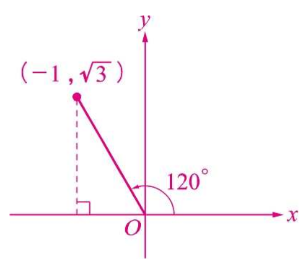
解 (1) $\sin(-390°) = \sin(2\times360° - 390°) = \sin 330°$

$$= \frac{-1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = -\frac{1}{2}$$



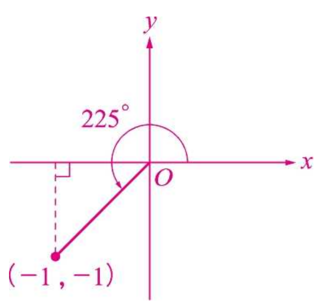
(2) $\cos(-240°) = \cos(360° - 240°) = \cos 120°$

$$= \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2}} = -\frac{1}{2}$$



(3) $\tan(-135°) = \tan(360° - 135°) = \tan 225°$

$$= \frac{-1}{-1} = 1$$



4. 已知 $\sin\theta=-\frac{1}{3}$，且 θ 是第三象限角，試求 $\cos\theta$ 和 $\tan\theta$ 的值

解 由 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，可得 $\cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$\because\theta$ 是第三象限角　$\therefore\cos\theta<0$

故得 $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

再由商數關係得 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

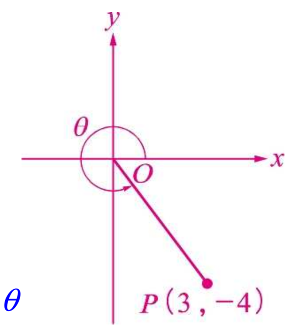
5. 已知直線 L 的斜角為 $45°$，並通過點（－1，2），試求 L 的方程式

解 直線 L 的斜角為 $45°$，故其斜率 $m=\tan 45°=1$

又 L 通過點（－1，2），故其直線方程式為 $y-2=1\times(x-(-1))$

即 $y=x+3$

6. 設有向角 θ 以原點 O 為頂點，以 x 軸的正向為始邊。若 θ 的終邊上有一點 $P(3，-4)$，試求 $\sin(180°-\theta)+\sin(\theta-90°)$ 的值



解 $\overline{OP}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

由定義得 $\sin\theta=\frac{-4}{5}$，$\cos\theta=\frac{3}{5}$

因此 $\sin(180°-\theta)+\sin(\theta-90°)$

$=\sin\theta+\sin(-(90°-\theta))=\sin\theta-\sin(90°-\theta)=\sin\theta-\cos\theta$

$=-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}=-\frac{7}{5}$

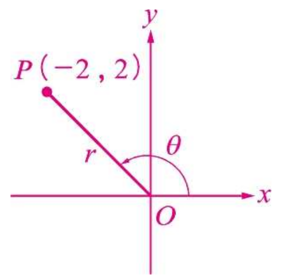
7. (1) 已知 Q 點的極坐標為 $[6，120°]$，試求其直角坐標

(2) 若選定直角坐標之 x 軸正方向為極軸，原點作為極點，試求點 $P(-2，2)$ 的極坐標

解 (1) $\because r=6，\theta=120°$

$\therefore$直角坐標為 $(x，y)=(6\cos 120°，6\sin 120°)=\left(6\times\left(-\frac{1}{2}\right),\ 6\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=(-3,\ 3\sqrt{3})$

(2) 設 P 點的極坐標為 $[r，\theta]$，如右圖所示



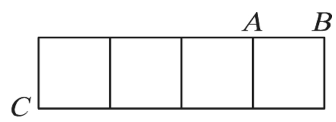
$r=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

則 $\cos\theta=\dfrac{-2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，所以 $\theta=135°$

故 P 點的極坐標為 $[2\sqrt{2}，135°]$

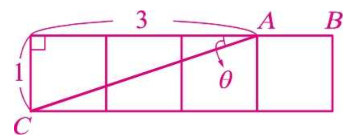
進階題

8. 如右圖，各正方形的邊長都是 1，試求 $\cos\angle CAB$ 的值



解 〈解法一〉

如右圖，$\overline{CA}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$



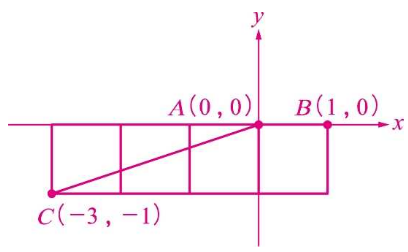
$\cos\angle CAB=\cos(180°-\theta)=-\cos\theta=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

〈解法二〉

定坐標系使 $A(0，0)$，$B(1，0)$，則 $C(-3，-1)$

由定義得 $\cos\angle CAB=\cos(360°-\angle CAB)$

$=\dfrac{-3}{\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}}=\dfrac{-3}{\sqrt{10}}=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$



9. 已知 $\tan\theta=-\dfrac{4}{3}$，且 $\cos\theta+\sin\theta<0$，試求 $\dfrac{3\cos\theta-1}{2\sin\theta+1}$ 的值

解 $\because\tan\theta<0$

$\therefore\theta$ 為第二象限角或第四象限角

① 若 θ 為第二象限角，$\tan\theta=\dfrac{4}{-3}$

令 $(x,y)=(-3,4)$ 為終邊上一點，則 $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}=\dfrac{-3}{5}$，$\sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{4}{5}$，⇨ $\cos\theta+\sin\theta=\left(\dfrac{-3}{5}\right)+\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{5}>0$，不合

② 若 θ 為第四象限角，$\tan\theta=\dfrac{-4}{3}$

令 $(x,y)=(3,-4)$ 為終邊上一點，則 $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}=\dfrac{3}{5}$，$\sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{-4}{5}$，⇨ $\cos\theta+\sin\theta=\dfrac{3}{5}+\left(\dfrac{-4}{5}\right)=-\dfrac{1}{5}<0$，成立

故得 $\dfrac{3\cos\theta-1}{2\sin\theta+1}=\dfrac{3\times\frac{3}{5}-1}{2\times\left(\frac{-4}{5}\right)+1}=-\dfrac{4}{3}$

10. (1) 若 $0°\le\theta<360°$ 且 $2\cos^2\theta+3\cos\theta-2=0$，試求 θ

(2) 已知 $\sin^2\theta-4\cos^2\theta=3\sin\theta\cos\theta$，且 θ 為第二象限角，試求 $\tan\theta$ 的值

解 (1) $2\cos^2\theta+3\cos\theta-2=0$，⇨ $(2\cos\theta-1)(\cos\theta+2)=0$

⇨ $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 或 -2（不合，由定義知 $|\cos\theta|\le1$）

$\dfrac{1}{2}=\cos 60°=\cos(360°-60°)=\cos 300°$，故 $\theta=60°$ 或 $300°$

(2)〈解法一〉

$\sin^2\theta-4\cos^2\theta=3\sin\theta\cos\theta$

⇨ $\sin^2\theta-3\sin\theta\cos\theta-4\cos^2\theta=0$

⇨ $(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-4\cos\theta)=0$

⇨ $\sin\theta+\cos\theta=0$ 或 $\sin\theta-4\cos\theta=0$

⇨ $\sin\theta=-\cos\theta$ 或 $\sin\theta=4\cos\theta$

⇨ $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-1$ 或 4

又因為 θ 為第二象限角，所以 $\tan\theta<0$，故 $\tan\theta=-1$

〈解法二〉

將等式兩邊同乘以 $\dfrac{1}{\cos^2\theta}$，即 $\dfrac{\sin^2\theta-4\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{3\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta}$，

化簡得 $\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2-4=3\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$，由商數關係得 $\tan^2\theta-4=3\tan\theta$

⇨ $\tan^2\theta-3\tan\theta-4=0$，⇨ $(\tan\theta+1)(\tan\theta-4)=0$，⇨ $\tan\theta=-1$ 或 4

又因為 θ 為第二象限角，所以 $\tan\theta<0$

故 $\tan\theta=-1$