第 4 章 綜合演練詳解

1. 設 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}$，試求下列各矩陣：

(1) $(A+B)(A-B)$

(2) A^2-B^2

解

(1) $(A+B)(A-B)=\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}\right)$

$=\begin{bmatrix}2 & 3\\-1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1\\3 & -4\end{bmatrix}$。

(2) $A^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{bmatrix}$，$B^2=\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0 & 3\\-3 & 3\end{bmatrix}$

則 $A^2-B^2=\begin{bmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 3\\-3 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\3 & -2\end{bmatrix}$。

2. 試用高斯消去法求解下列方程組：

(1) $\begin{cases}x+y=3,\\y+z=5,\\x+z=4\end{cases}$。

(2) 試就 k 值討論 $\begin{cases}x+3y-z=6,\\2x-y+3z=17,\\3x+2y+kz=22\end{cases}$ 的解

解

(1) $\begin{cases}x+y=3, & ①\\y+z=5, & ②\\x+z=4。 & ③\end{cases}$

將①＋②＋③得 $2(x+y+z)=12$，

即 $x+y+z=6$。　④

由④－②，④－③，④－①得 $x=1$，$y=2$，$z=3$，

故方程組的解為 $x=1$，$y=2$，$z=3$。

(2) $\begin{cases}x+3y-z=6, & ①\\2x-y+3z=17, & ②\\3x+2y+kz=22, & ③\end{cases}$

將①×（－2）＋②，①×（－3）＋③，得

$\begin{cases}x+3y-z=6, & ④\\-7y+5z=5, & ⑤\\-7y+(k+3)z=4, & ⑥\end{cases}$

將⑤×（－1）＋⑥，得

$\begin{cases}x+3y-z=6, & ⑦\\-7y+5z=5, & ⑧\\(k-2)z=-1, & ⑨\end{cases}$

當 $k=2$，方程組無解；當 $k\neq 2$，則方程組恰有一解

3. 設 A，B，C 皆為 n 階方陣，O 為 n 階零方陣，則下列各性質，何者必成立？
(A)（$A+B$）$C=AC+BC$
(B) $A^2-B^2=$（$A+B$）（$A-B$）
(C)若 $A^2=O$，則 $A=O$
(D)若 $AB=AC$，A 有乘法反方陣，則 $B=C$
(E)（AB）$C=A$（BC）

解 (A) ○

(B) ×：當 $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&1\\-1&2\end{bmatrix}$ 時，$A^2-B^2=\begin{bmatrix}1&1\\3&-2\end{bmatrix}$，$(A+B)(A-B)=\begin{bmatrix}3&-1\\3&-4\end{bmatrix}$

(C) ×：當 $A=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\neq O$，$A^2=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

(D) ○：因為 $A^{-1}AB=A^{-1}AC$，故 $B=C$

(E) ○

故選(A)(D)(E)

4. 若 $\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}X+2\begin{bmatrix}2&1\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&5\\2&-1\end{bmatrix}$，試求 X

解 $\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}X+2\begin{bmatrix}2&1\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&5\\2&-1\end{bmatrix}$，移項得

$\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}1&5\\2&-1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}2&1\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&3\\4&-7\end{bmatrix}$，

則 $X=\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-3&3\\4&-7\end{bmatrix}=\dfrac{1}{-2}\begin{bmatrix}4&-3\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&3\\4&-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12&-\dfrac{33}{2}\\-5&\dfrac{13}{2}\end{bmatrix}$

5. 下列敘述何者正確？
(A)增廣矩陣任一列乘以 k 倍加到另一列，其方程組的解不變
(B)增廣矩陣化簡到有一列只有第一個元不為 0，則必為無解
(C)增廣矩陣化簡到有一列只有最後一個元不為 0，則必為無解
(D)增廣矩陣化簡到有一列各元全為 0，則必為無限多組解

解 (A) ○：增廣矩陣經列運算後仍有相同解

(B) ×：若增廣矩陣為 $\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&0&1&3\\1&0&0&0\end{array}\right]$，可得解為 $x=0$，$y=-1$，$z=3$，不為無解

(C) ○

(D) ×：若增廣矩陣為 $\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right]$ 為無解

故選(A)(C)

6. 若 $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -9 \\ -4 \end{bmatrix}$，則 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -9 \\ -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -9 \\ -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$，利用上述計算過程判斷下列哪些選項的敘述是正確的？

(A)方程組 $\begin{cases} 3x+5y=-9, \\ x+2y=-4 \end{cases}$ 恰有一組解（x，y）＝（2，－3）

(B) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的乘法反方陣為 $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

(C)點（－9，－4）可經由 $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 作線性變換到點（2，－3）

(D)向量（－9，－4）可表示成向量（3，1）與向量（5，2）的線性組合，且係數分別就是 2，－3。

解

(A) ○

(B) ○

(C) ×：應該是點（2，－3）經由 $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 作線性變換到點（－9，－4）

(D) ○：$\begin{bmatrix} -9 \\ -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}+(-3)\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

故選(A)(B)(D)

7. 假設小菡平時的讀書習慣是：如果她在今晚讀書，則她在明晚有 60 %的機率不讀書；如果她在今晚不讀書，則她在明晚有 50 %的機率不讀書。若已知小菡在星期一讀書，則她在星期三（兩天後）讀書的機率為何？

解

轉移矩陣為 $A=\begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}$，且 $X_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，

則 $X_2=\begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}$，

$X_3=\begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.46 \\ 0.54 \end{bmatrix}$，

所以星期三（兩天後）讀書的機率為 0.46

*8. 若將空間向量（3，a，11）表示成（1，2，3），（1，－1，6），（2，1，b）的線性組合，試問下列哪些敘述是正確的？
(A)若有無限多種表示方法，則 $a=4$
(B)若只有一種表示方法，則 $b\neq 9$
(C)若只有一種表示方法，則 $a=4$
(D)若（3，a，11）無法表示（1，2，3），（1，－1，6），（2，1，b）的線性組合，則 $b=9$
(E)若（3，a，11）無法表示（1，2，3），（1，－1，6），（2，1，b）的線性組合，則 $a\neq 4$

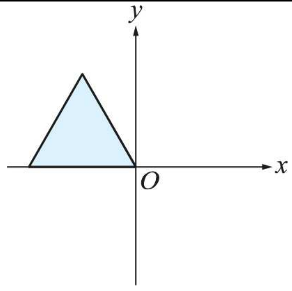
解　設（3，a，11）$=x$（1，2，3）$+y$（1，－1，6）$+z$（2，1，b），則
（3，a，11）＝（x，$2x$，$3x$）＋（y，$-y$，$6y$）＋（$2z$，z，bz）
＝（$x+y+2z$，$2x-y+z$，$3x+6y+bz$）。

因此解 $\begin{cases} x+y+2z=3, \\ 2x-y+z=a, \\ 3x+6y+bz=11, \end{cases}$ 利用增廣矩陣計算如下：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & a \\ 3 & 6 & b & 11 \end{array}\right] \times(-2) \times(-3) \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & a-6 \\ 0 & 3 & b-6 & 2 \end{array}\right] \times 1 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & a-6 \\ 0 & 0 & b-9 & a-4 \end{array}\right],$$

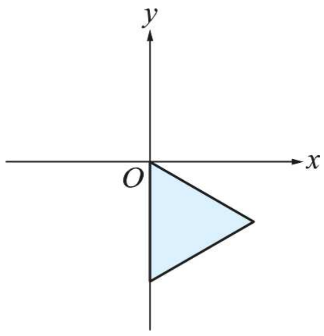
若 $b-9\neq 0$，則方程組恰有一組解；
若 $b-9=0$ 且 $a-4=0$，則方程組有無限多組解；
若 $b-9=0$ 且 $a-4\neq 0$，則方程組無解。
(A) ○
(B) ○
(C) ×：當 $b-9\neq 0$ 時，a 不論為何值，方程組都恰有一組解
(D) ○
(E) ○
故選(A)(B)(D)(E)

*9. 若平面上有一個正三角形如右圖所示，則：



(1) 經由 $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ 變換後所對應的圖形為何？

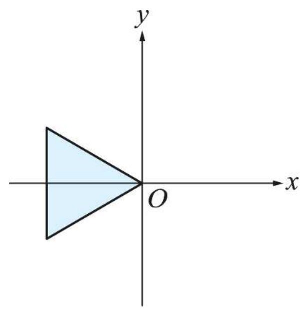
(2) 若題圖經矩陣 A 變換後會變成如下圖的圖形，試求矩陣 A



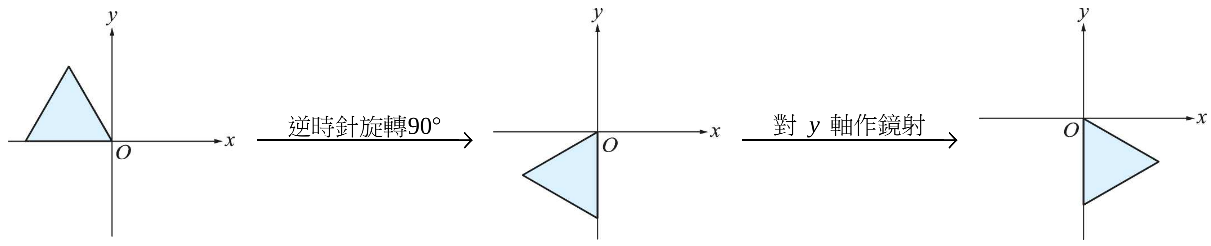
解

(1) 矩陣 $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix}$

所對應的線性變換為以原點為中心逆時針旋轉 30°，
故旋轉後的圖形如右圖所示



(2) ① 可由先以原點為中心逆時針旋轉 90°，再對 y 軸（$x=0$）作鏡射而得。



因此可由變換的合成，得矩陣 A 為

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{再鏡射}} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{bmatrix}}_{\text{先旋轉}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

② 也可將圖形以原點為中心逆時針旋轉 150° 而得，

因此矩陣 A 為 $\begin{bmatrix} \cos 150° & -\sin 150° \\ \sin 150° & \cos 150° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

*10. 試找出三個不同的二階方陣 A 使得 $A^8 = I_2$。

解

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^8 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2\right)^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^4 = I_2 \text{；}$$

$$\begin{bmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{bmatrix}^8 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^8 = \begin{bmatrix} \cos 360° & -\sin 360° \\ \sin 360° & \cos 360° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \text{；}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^8 = \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2\right)^4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^4 = I_2$$