習題 3-3 解答

一、基本題

1. 袋中有相同的紅球 5 顆與白球 3 顆，假設每顆球被取出的機會均等，每次取一球，連續取 3 次，則：
   (1) 若取出後放回，試問取出的三球依序為紅、白、紅的機率為何？
   (2) 若取出後不放回，試問取出的三球依序為紅、白、紅的機率為何？

解 (1) 令 A 表示取出紅球的事件，則 $P(A)=\dfrac{5}{8}$，

令 B 表示取出白球的事件，則 $P(B)=\dfrac{3}{8}$。

若取出後放回，則取出的三球依序為紅、白、紅的機率為 $\dfrac{5}{8}\times\dfrac{3}{8}\times\dfrac{5}{8}=\dfrac{75}{512}$。

(2) 令 A 表示第一球取出紅球的事件，
B 表示第二球取出白球的事件，
C 表示第三球取出紅球的事件，
故所求為 $P(A\cap B\cap C)$。

則 $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B|A)P(C|A\cap B)=\dfrac{5}{8}\times\dfrac{3}{7}\times\dfrac{4}{6}=\dfrac{5}{28}$。

2. 從 1 到 9 的 9 個數字中任取兩個數字，每一個數字皆不可重複選取，若已知選取的兩個數字的和為偶數，試求這兩個數字均為偶數的機率為何？

解 若選取的兩個數字的和為偶數，表示選出：① 兩個奇數；② 兩個偶數。

① 選出兩個奇數的情形有 n（2 奇）$=C_2^5$ 種；

② 選出兩個偶數的情形有 n（2 偶）$=C_2^4$ 種。

故所求為 P（2 偶|和為偶數）$=\dfrac{n(2\text{偶})}{n(\text{合為偶數})}=\dfrac{C_2^4}{C_2^5+C_2^4}=\dfrac{6}{10+6}=\dfrac{3}{8}$

3. 老師出了一道數學題要學生直接到黑板上解題。已知此班有 10 人，其中有 3 人不會作答。若老師依序隨機抽點兩人上臺解題，則兩人都不會解這道題的機率為何？

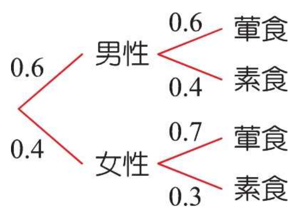
解 令 A 表示第一位同學不會解的事件，B 表示第二位同學不會解的事件，
所求即為 $P(A\cap B)$，由條件機率的乘法法則，

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{1}{15}$

4. 某城市的人口中，女性占 40 %，男性占 60 %。已知男性中有 40 % 的人飲食習慣為素食，女性中則有 30 % 的人飲食習慣為素食，則：
   (1) 若隨意抽出一人，不知此人為男性或女性，只知為素食者，則此人為男性的機率為何？
   (2) 承(1)，若已知此人為葷食者，則其為男性的機率為何？

解 (1) 由右圖可知，所求為 $\dfrac{0.6\times0.4}{0.6\times0.4+0.4\times0.3}=\dfrac{0.24}{0.36}=\dfrac{2}{3}$

(2) 由右圖可知，所求為 $\dfrac{0.6\times0.6}{0.6\times0.6+0.4\times0.7}=\dfrac{0.36}{0.64}=\dfrac{9}{16}$



5. 已知籤筒內有 10 支籤，其中 3 支標示有獎，假設每支籤被抽中的機會均等，今甲，乙，丙三人依序抽 1 支籤且抽完不放回，試問甲，乙，丙三人均未中獎的機率為何？

解 令 A 表示甲中獎的事件，B 表示乙中獎的事件，C 表示丙中獎的事件，
所求即為 $P(A'\cap B'\cap C')$，由條件機率的乘法法則，

$P(A'\cap B'\cap C')=P(A')P(B'|A')P(C'|A'\cap B')=\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}=\frac{7}{24}$

二、進階題

6. 甲，乙兩隊進行比賽，每一場比賽甲隊獲勝的機率為 $\frac{1}{4}$，和局的機率為 $\frac{1}{6}$。現在甲，乙兩隊連續進行 3 場比賽，每一場比賽的結果互不影響，試問乙隊恰贏一場比賽的機率為何？（四捨五入至小數點後第三位）

解 依題意，甲獲勝的機率為 $\frac{1}{4}$，和局的機率為 $\frac{1}{6}$，乙獲勝的機率為 $1-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{7}{12}$。

(1) 甲贏 2 場，乙贏 1 場：$C^3_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{7}{12}=\frac{7}{64}$

(2) 甲贏 1 場，和局 1 場，乙贏 1 場：$\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}\times\frac{7}{12}\times 3!=\frac{7}{48}$。

(3) 和局 2 場，乙贏 1 場：$C^3_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{7}{12}=\frac{7}{144}$

故乙恰贏 1 場的機率為 $\frac{7}{64}+\frac{7}{48}+\frac{7}{144}=\frac{175}{576}\approx 0.304$

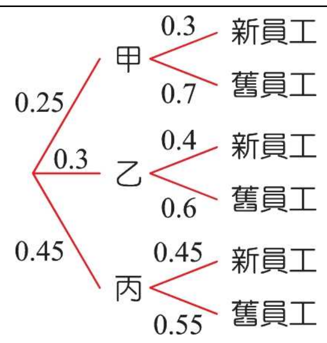
7. 甲、乙、丙三家工廠員工分別有 500、600、900 人，其中各有 30 ％、40 ％、45 ％ 是到職未滿一年的新員工。假設不論新舊員工離職的機率是相等的，今有一位到職未滿一年的新員工離職了，則他是在丙工廠工作的機率為何？

解 任選一名員工，則此員工來自

甲工廠的機率為 $P(甲)=\frac{500}{500+600+900}=\frac{1}{4}=0.25$，

乙工廠的機率為 $P(乙)=\frac{600}{500+600+900}=\frac{3}{10}=0.3$，

丙工廠的機率為 $P(丙)=\frac{900}{500+600+900}=\frac{9}{20}=0.45$。



則由右圖可知，所求為

$\frac{0.45\times 0.45}{0.25\times 0.3+0.3\times 0.4+0.45\times 0.45}=\frac{0.2025}{0.075+0.12+0.2025}=\frac{27}{53}$。

8. 小芬出門度假前，拜託小菡幫忙照顧魚缸裡的魚。已知沒有餵食飼料魚會死亡的機率是 0.8；若有餵食飼料，則魚會死亡的機率是 0.1。如果小菡八成會記得餵魚，試問當小芬度假回來後，發現魚缸裡的魚還活著的機率為何？

解 令 A 表示小菡記得餵魚的事件，則 $P(A)=0.8$，$P(A')=0.2$
B 表示魚活著的事件，則 $P(B|A)=0.9$，$P(B|A')=0.2$
故得 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(A')P(B|A')=0.8\times 0.9+0.2\times 0.2=0.76$

9. 衛福部公布 107 年度罹患癌症致死的國人中，男性與女性的人數比約為 3：2。死因為氣管、支氣管和肺癌的男、女性人數統計資料如下表所示。試求當年度罹患癌症致死的全體國人中，死因為氣管、支氣管和肺癌所占的比例為何？（四捨五入至百分比小數點後第五位）

男性		女性	
癌症死亡原因	死亡人數結構比（%）	癌症死亡原因	死亡人數結構比（%）
氣管、支氣管和肺癌	19.96017	氣管、支氣管和肺癌	18.13674

（資料來源：衛生福利部統計處 107 年）

解 因為罹患癌症致死的國人中，
男性與女性的人數比約為 3：2，
所以男性占死亡人數的 $\frac{3}{5}$，
女性占死亡人數的 $\frac{2}{5}$

則由右圖可知，所求為

$$\frac{3}{5}\times0.1996017+\frac{2}{5}\times0.1813674=0.19230798=19.230798\ \%\approx19.23080\ \%$$

三、挑戰題

10. 已知某種快篩試劑對某病毒的檢驗，其準確率（帶原者檢測出陽性反應加上非帶原者檢測出陰性反應占全體的比例）為 x %，現推估有 2 % 的民眾為此病毒帶原者，若希望以此試劑檢驗結果呈陽性反應的人，確實是帶原的機率達到 80 % 以上，則其準確率 x % 至少要達到多少以上？（四捨五入至百分比小數點後第二位）

解 由右圖可知，所求為

$$\frac{2\%\cdot x\%}{2\%\cdot x\%+98\%\cdot(1-x\%)}\geq 80\%，$$

故 x % $\geq 0.9949238579\cdots$，
故準確率 x % 至少要達到 99.49 % 以上