第 2 章 空間中的平面與直線

2-1 平面方程式

例題 1 已知點坐標及法向量求平面方程式

(1) 試求通過點 A（3，−1，4），且以 $\overrightarrow{n}=$（2，3，−1）為法向量的平面方程式

(2) 試求 xy 平面的一個法向量及 xy 平面的方程式

解 (1) 令所求為 $2x+3y-z+d=0$

（3，−1，4）代入得 $6-3-4+d=0$

⇨ $d=1$

∴所求為 $2x+3y-z+1=0$

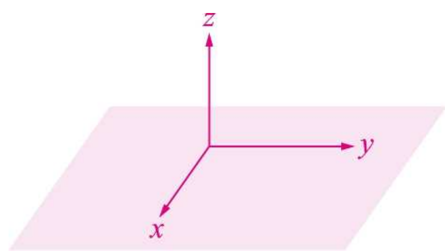
(2) ∵ z 軸垂直 xy 平面

∴取 xy 平面的法向量為（0，0，1）

令 $z+d=0$

（0，0，0）代入得 $d=0$

∴ xy 平面的方程式為 $z=0$



例題 2 與已知平面平行的平面

(1) 設平面 E 通過點 P（3，0，2），且與平面 $x+2y-3z+1=0$ 平行，試求平面 E 的方程式。

(2) 設平面 E 通過原點 O（0，0，0），且與平面 $2x+5y+z+1=0$ 平行，試求平面 E 的方程式。

解 (1) 設 E 的方程式為 $x+2y-3z+d=0$

（3，0，2）代入得 $3+0-6+d=0$

⇨ $d=3$

∴ E 的方程式為 $x+2y-3z+3=0$

(2) 令 E 的方程式為 $2x+5y+z+d=0$

（0，0，0）代入得 $d=0$

∴ E 的方程式為 $2x+5y+z=0$

（討論：所有過原點的平面方程式常數項必為 0，故直接取 $2x+5y+z=0$ 亦可）

例題 3 不共線的相異三點決定一平面

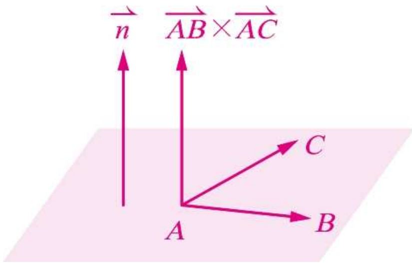
已知空間中三點 A（1，−2，0），B（2，1，9），C（3，−3，4），試求：

(1) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

(2) ABC 三點所決定的平面方程式

解 (1) $\overrightarrow{AB}=(1,3,9)$，$\overrightarrow{AC}=(2,-1,4)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}3&9\\-1&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}9&1\\4&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&3\\2&-1\end{vmatrix}\right)=(21,14,-7)$$



(2) 承(1)，$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(21,14,-7)$ 同時垂直 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$

∴取 $\vec{n}=(3,2,-1)$ 可以是所求平面的法向量

令 $3x+2y-z+d=0$

$(1,-2,0)$ 代入得 $3-4-0+d=0$

⇨ $d=1$

∴所求為 $3x+2y-z+1=0$

例題 4 由位置向量的線性組合求平面方程式

已知坐標空間中，O 為原點，$\overrightarrow{OA}=(2,1,-3)$，$\overrightarrow{OB}=(1,1,2)$，試求：

(1) $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 的外積

(2) $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 的所有線性組合會張成一個平面，試求此平面方程式

解 (1) $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$

$$=\left(\begin{vmatrix}1&-3\\1&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-3&2\\2&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}\right)=(5,-7,1)$$

(2) 取 $\vec{n}=(5,-7,1)$

令 $5x-7y+z+d=0$

∵ $O(0,0,0)$ 在此平面上

∴$(0,0,0)$ 代入得 $d=0$

所求為 $5x-7y+z=0$

例題 5 平面的截距式

(1) 若平面 E 分別交 x、y、z 軸於 A（2，0，0）、B（0，1，0）、C（0，0，3）三點，

試求平面 E 的方程式

(2) 已知平面 E：$3x-2y-4z=12$ 與坐標軸分別交於（a，0，0），（0，b，0），（0，0，c），試求序組（a，b，c）

解 (1) 由已知及平面的截距式

所求為 $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{3}=1$

同乘以 6 得 $3x+6y+2z=6$

即 $3x+6y+2z-6=0$

(2) 已知 $3x-2y-4z=12$

兩邊同除以 12 得 $\frac{x}{4}-\frac{y}{6}-\frac{z}{3}=1$

即 $\frac{x}{4}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{-3}=1$

故知此平面的 x、y、z 截距分別為 4、-6、-3

即序組（a，b，c）＝（4，-6，-3）

例題 6 兩平面的夾角（使用計算機）

(1) 空間中兩平面 E_1：$4x+5y+3z=4$，E_2：$2x+2y-z=1$，試求 E_1 與 E_2 的夾角

(2) 空間中兩平面 E_1：$2x+y+4z=1$，E_2：$3x+2y-z=7$，試求 E_1 與 E_2 的夾角。（用度表示，四捨五入至小數點後第二位）

解 (1) 取 $\overrightarrow{n_1}$ ＝（4，5，3），$\overrightarrow{n_2}$ ＝（2，2，-1）

$\cos\theta=\frac{8+10-4}{\sqrt{50}\sqrt{9}}=\frac{15}{15\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

可得 $\theta=45°$，$180°-45°=135°$

∴所求為 45°，135°

(2) 取 $\overrightarrow{n_1}$ ＝（2，1，4），$\overrightarrow{n_2}$ ＝（3，2，-1）

$\cos\theta=\frac{6+2-4}{\sqrt{21}\sqrt{14}}=\frac{4}{7\sqrt{6}}$

按計算機得 $\theta\approx 76.50946454°\approx 76.51°$

$180°-76.51°=103.49°$

∴所求為 76.51°，103.49°

例題 7 點到平面的距離

(1) 試求點 P（3，7，2）到平面 E：$2x+y+z-3=0$ 的距離

(2) 已知點（2，3，0）到平面 $x-2y+2z+k=0$ 距離為 1，試求 k 值

解 (1) 由點到平面距離公式得

$$\frac{|6+7+2-3|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{12}{\sqrt{6}}=2\sqrt{6}$$

(2) 由已知條件，

$$\frac{|2-6+0+k|}{\sqrt{1+4+4}}=1$$

⇨ $|k-4|=3$

⇨ $k-4=\pm3$

⇨ $k=7$ 或 1

例題 8 兩平行平面的距離

(1) 試求兩平行平面 E_1：$2x+y-2z+1=0$ 與 E_2：$2x+y-2z-5=0$ 的距離

(2) 已知平面 E_1：$2x-3y+6z+1=0$ 與平面 E_2：$4x-6y+12z-5=0$，試求平面 E_1 與 E_2 的距離。

解 (1) 所求為 $\dfrac{|1-(-5)|}{\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{6}{3}=2$

(2) 將 E_2 方程式兩邊同除以 2

得 $2x-3y+6z-\dfrac{5}{2}=0$

∴所求為 $\dfrac{\left|1-\left(-\dfrac{5}{2}\right)\right|}{\sqrt{4+9+36}}=\dfrac{\frac{7}{2}}{7}=\dfrac{1}{2}$

例題 9 由平行平面的距離求平面方程式

已知平面 E_1 與平面 E_2：$x+2y+z+3=0$ 平行，且平面 E_1 與 E_2 的距離為 4，試求平面 E_1 的方程式。（有兩解）

解 設所求為 $x+2y+z+k=0$

則 $\dfrac{|k-3|}{\sqrt{1+4+1}}=4$

⇨ $|k-3|=4\sqrt{6}$

⇨ $k-3=\pm4\sqrt{6}$

⇨ $k=3\pm4\sqrt{6}$

∴所求為 $x+2y+z+3+4\sqrt{6}=0$ 或 $x+2y+z+3-4\sqrt{6}=0$

例題 10 已知點與垂直線段求平面方程式

(1) 已知空間中兩點 $A(2,5,3)$，$B(4,1,5)$，試求 $\overline{AB}$ 的垂直平分面方程式

(2) 已知點 $P(2,4,7)$ 對稱於平面 E 的點為 $Q(4,2,1)$，試求平面 E 的方程式

解 (1) $\overline{AB}$ 中點為 $M(3,3,4)$

又 $\overrightarrow{AB}=(2,-4,2)$

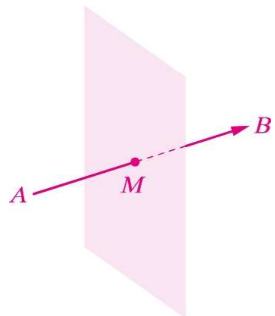
取法向量 $\overrightarrow{n}=(1,-2,1)$

令 $x-2y+z+d=0$

$(3,3,4)$ 代入得 $3-6+4+d=0$

⇨ $d=-1$

故得 $x-2y+z-1=0$



(2) 顯然 $\overline{PQ}$ 中點 M 在平面 E 上，由 P、Q 坐標得 $M(3,3,4)$

又 $\overrightarrow{PQ}=(2,-2,-6)$

取法向量 $\overrightarrow{n}=(1,-1,-3)$

令 $x-y-3z+d=0$

$(3,3,4)$ 代入得 $3-3-12+d=0$

⇨ $d=12$

∴所求為 $x-y-3z+12=0$