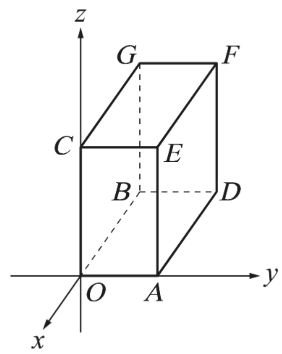
1-2 空間向量的坐標表示法

例題 1 坐標空間中的點坐標

右圖為一個長方體，已知 $\overline{OA}=3$，$\overline{OB}=4$，$\overline{OC}=5$，試寫出 D、E、F、G 各點的坐標



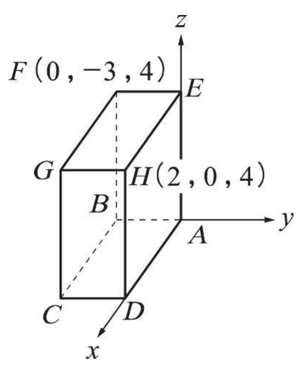
解 $D(-4, 3, 0)$，$E(0, 3, 5)$，$F(-4, 3, 5)$，$G(-4, 0, 5)$

例題 2 坐標空間中的點坐標與兩點距離

如右圖，坐標空間中一個長方體，已知 $F(0, -3, 4)$，$H(2, 0, 4)$，試求：

(1) G 點坐標

(2) C 點到 E 點的距離



解 (1) 由 F、H 坐標知 $G(2, -3, 4)$

(2) 同(1)可知 $C(2, -3, 0)$，$E(0, 0, 4)$

$\therefore\ \overline{CE}=\sqrt{4+9+16}=\sqrt{29}$

例題 3 距離公式的應用

空間中相異兩點 $A(2, 6, -1)$，$B(-1, 3, 5)$，P 為 z 軸上一點，且 $\overline{PA}=2\overline{PB}$，試求 P 點坐標。

解 設 P 坐標為 $(0, 0, c)$

$\because\ \overline{PA}=2\overline{PB}$

$\therefore\ \sqrt{(-2)^2+(-6)^2+(c+1)^2}=2\sqrt{1^2+(-3)^2+(c-5)^2}$

兩邊平方，展開得

$4+36+c^2+2c+1=4(1+9+c^2-10c+25)$

$\Rightarrow 3c^2-42c+99=0$

$\Rightarrow c^2-14c+33=0$

$\Rightarrow (c-3)(c-11)=0$

$\Rightarrow c=3$ 或 11

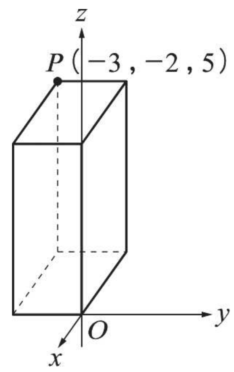
$\therefore\ P$ 點坐標為 $(0, 0, 3)$ 或 $(0, 0, 11)$

例題 4 點到坐標軸、坐標平面的距離

如右圖，坐標空間中的一個長方體，P 點坐標為（-3，-2，5），試求：

(1) P 點在 zx 平面上的投影點坐標

(2) P 點到 y 軸的距離



解 (1) P 點在 zx 平面的投影點為（-3，0，5）

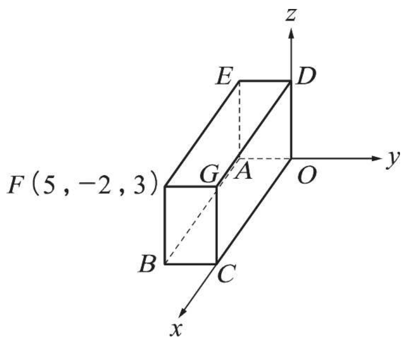
(2) P 點到 y 軸距離為 $\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$

例題 5 空間向量的坐標表示法

右圖為坐標空間中的一個長方體，F 點坐標為（5，-2，3），試求：

(1) E 點的位置向量 $\overrightarrow{OE}$

(2) $\overrightarrow{BD}$ 的坐標表示



解 (1) $\because$ F 點坐標為（5，-2，3）

$\therefore$ E 點坐標為（0，-2，3）

得 $\overrightarrow{OE}=(0,-2,3)$

(2) 同(1)，B 點、D 點坐標分別為（5，-2，0）、（0，0，3）

$\therefore$ $\overrightarrow{BD}=(-5,2,3)$

例題 6 空間向量的係數積與長度

$\overrightarrow{a}$ ＝（2，1，2），$\overrightarrow{b}$ ＝（2，0，5）為坐標空間中的兩個向量，試求：

(1) $2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$

(2) $\left|2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$

解 (1) $2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$

$=2(2,1,2)-(2,0,5)$

$=(4,2,4)-(2,0,5)$

$=(2,2,-1)$

(2) $\left|2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$

$=\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}$

$=3$

例題 7 空間向量的加、減法

已知空間中三點 A（2，−1，3），B（5，1，4），C（7，3，8），試求：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ 的坐標表示

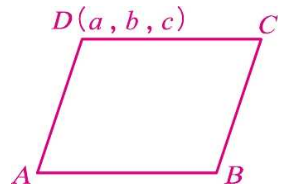
(2) 若四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，試求 D 點坐標

解 (1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AC}$

$=$（5，4，5）

(2) 作示意圖如右



設 D 點坐標（a，b，c）

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

∴（$a-2$，$b+1$，$c-3$）=（2，2，4）

解 $a-2=2$，$b+1=2$，$c-3=4$

得 $a=4$，$b=1$，$c=7$

∴ D 點坐標為（4，1，7）

例題 8 分點公式及中點公式的應用

已知 A（−2，3，1），B（1，3，5）為坐標空間中的相異兩點：

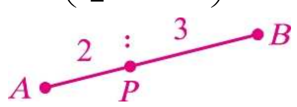
(1) M 為 $\overline{AB}$ 中點，試求 M 點坐標

(2) P 點在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:3$，試求 P 點坐標

解 (1) 由中點公式，M 點坐標為 $\left(\dfrac{-2+1}{2},\dfrac{3+3}{2},\dfrac{1+5}{2}\right)$

即 $\left(\dfrac{-1}{2},3,3\right)$

(2)



由分點公式

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OB}$

令 O 為原點（0，0，0）

得 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{3}{5}(-2,3,1)+\dfrac{2}{5}(1,3,5)$

$=\left(-\dfrac{4}{5},\dfrac{15}{5},\dfrac{13}{5}\right)$

$=\left(-\dfrac{4}{5},3,\dfrac{13}{5}\right)$

〈另解〉

由分點公式得 $P\left(\dfrac{-6+2}{5},\dfrac{9+6}{5},\dfrac{3+10}{5}\right)$

得 $P\left(-\dfrac{4}{5},3,\dfrac{13}{5}\right)$

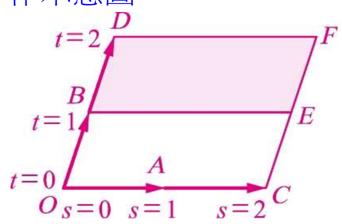
例題 9 空間向量的線性組合

坐標空間中，已知 $\overrightarrow{OA}=(2,3,-2)$，$\overrightarrow{OB}=(1,2,3)$，試問滿足下列條件的 P 點所成的圖形為何？

(1) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，其中 $0\le s\le 2$，$1\le t\le 2$

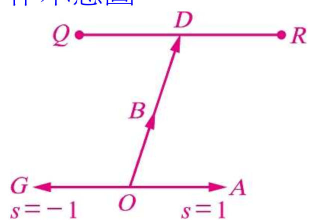
(2) $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$，其中 $-1\le s\le 1$

解 (1) 作示意圖



可知 $\overrightarrow{OP}$ 終點落在平行四邊形 $BEFD$ 所圍成的區域內（含邊界）中
故知 P 點所形成的圖形為平行四邊形

(2) 作示意圖



可知 $\overrightarrow{OP}$ 終點落在 $\overline{QR}$ 上
即 P 點所形成的圖形為一線段

例題 10 向量加減法的應用—動量

在物理學上，我們知道物體在分裂時，其動量之和保持不變（動量是向量），假設空間中有一個飛行中的質點，動量為 $\overrightarrow{v}$，突然分裂成 3 個小質點，動量分別為 $\overrightarrow{a}=(5,3,2)$，$\overrightarrow{b}=(-2,4,7)$，$\overrightarrow{c}=(1,-3,-1)$，試求：

(1) 分裂前的動量 $\overrightarrow{v}$

(2) 若動量 $\overrightarrow{a}$ 的質點又分裂為 2 個小質點，其中一個的動量為 $\overrightarrow{d}=(-2,3,0)$，試求另一個動量 $\overrightarrow{e}$

解 (1) $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$
$=(5,3,2)+(-2,4,7)+(1,-3,-1)$
$=(4,4,8)$

(2) $\because\ \overrightarrow{a}=\overrightarrow{d}+\overrightarrow{e}$
$\therefore\ \overrightarrow{e}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{d}$
$=(5,3,2)-(-2,3,0)$
$=(7,0,2)$