1-4 外積、體積與行列式

例題 1 空間向量的外積及其應用

已知空間中向量 $\overrightarrow{a}=(1,0,2)$，$\overrightarrow{b}=(-2,1,3)$，試求：

(1) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ (2) $\left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right|$

解 (1) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$

$=\left(\begin{vmatrix}0&2\\1&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&1\\3&-2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\-2&1\end{vmatrix}\right)=(-2,-7,1)$

(2) $\left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{4+49+1}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

例題 2 兩向量所張成的平行四邊形面積

已知空間中三點 $A(3,-1,1)$，$B(2,2,1)$，$C(2,-1,3)$。試求：

(1) $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 所張成的平行四邊形面積

(2) $\triangle ABC$ 面積

解 $\overrightarrow{AB}=(-1,3,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,0,2)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}3&0\\0&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&-1\\2&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&3\\-1&0\end{vmatrix}\right)=(6,2,3)$

(1) $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 所張成的平行四邊形面積為 $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{36+4+9}=7$

(2) $\triangle ABC$ 面積為 $\dfrac{7}{2}$

例題 3 公垂向量及其單位向量

已知空間中兩向量 $\overrightarrow{a}=(4,1,-1)$，$\overrightarrow{b}=(2,2,1)$。試求：

(1) 與 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 同時垂直的單位向量

(2) 與 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 同時垂直且長度為 3 的向量

解 (1) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\left(\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&4\\1&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4&1\\2&2\end{vmatrix}\right)=(3,-6,6)$

$\left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{9+36+36}=9$

$\therefore$所求單位向量為 $\pm\dfrac{1}{9}(3,-6,6)=\pm\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$

即$\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ 或 $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$

(2) 將(1)的結果乘以 3 即可

$\therefore$所求為 $3\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ 或 $3\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$

即 $(1,-2,2)$ 或 $(-1,2,-2)$

例題 4 三階行列式求值

試求下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$　　　　(2) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

解 (1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=12+1-12-4-9+4=-8$

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-9+0+6+12-0-0=9$

例題 5 用向量的三重積求體積

已知空間中三向量 $\overrightarrow{a}=(2,3,-1)$，$\overrightarrow{b}=(1,-2,3)$，$\overrightarrow{c}=(4,-1,3)$。試求：

(1) $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 三向量所決定的平行六面體體積

(2) 假設 $\overrightarrow{d}=(3,1,k)$，若 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{d}$ 所決定的平行六面體體積為 28，試求 k 值

解 (1) $\left|\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}\right|=\left|-12+36+1-8-9+6\right|=14$

(2) 由題意知 $\left|\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & k \end{vmatrix}\right|=28$

⇨ $\left|-4k+27-1-6-3k-6\right|=28$

⇨ $\left|-7k+14\right|=28$

⇨ $-7k+14=\pm 28$

⇨ $-7k=14$ 或 -42

$\therefore$ $k=-2$ 或 6

例題 6 向量三重積的應用（四點共平面）

已知坐標空間中四點 $A(1,3,-2)$，$B(2,-2,1)$，$C(3,1,2)$，$D(6,2,k)$ 共平面，試求 k 值。

解 取 $\overrightarrow{AB}=(1,-5,3)$，$\overrightarrow{AC}=(2,-2,4)$，$\overrightarrow{AD}=(5,-1,k+2)$

$\because$ A，B，C，D 共平面　$\therefore$ $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ 共平面

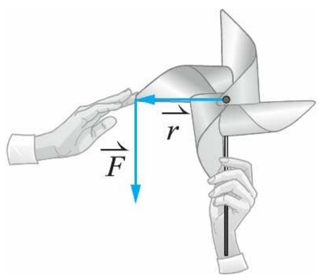
因此 $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 5 & -1 & k+2 \end{vmatrix}=0$

展開得 $-2k-4-100-6+30+10k+20+4=0$

⇨ $8k=56$ ⇨ $k=7$

例題 7 力矩的計算（一）

在距離風車中心 $\overrightarrow{r}$ 處施以 $\overrightarrow{F}$ 的力，已知 $\overrightarrow{r}$ 與 $\overrightarrow{F}$ 夾角為 90°，且 $\left|\overrightarrow{r}\right|=0.2$（米），$\left|\overrightarrow{F}\right|=1.2$（牛頓），試求所造成的力矩大小為多少牛頓．米



解 由已知可得力矩大小為

$\left|\overrightarrow{r}\right|\left|\overrightarrow{F}\right|\sin 90^\circ=0.2\times1.2\times1=0.24$（牛頓．米）

例題 8 力矩的計算（二）

一物體在距離原點 $\overrightarrow{r}$ 處受力 $\overrightarrow{F}$ 的作用，已知 $\overrightarrow{r}=(-3,4,0)$，$\overrightarrow{F}=(4,3,0)$，試求該力對原點所產生的力矩

解 $\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{F}=\left(\begin{vmatrix}4&0\\3&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&-3\\0&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-3&4\\4&3\end{vmatrix}\right)=(0,0,-25)$