4-3 矩陣的應用

例題 1 轉移矩陣的判斷

下列哪些是轉移矩陣？

(A) $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 \\ 0.3 & 0.9 \end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix} \sqrt{5}-2 & 4-\sqrt{13} \\ 3-\sqrt{5} & \sqrt{13}-3 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} \sqrt{11}-3 & 4-\sqrt{3} \\ 4-\sqrt{11} & \sqrt{3}-3 \end{bmatrix}$　(E) $\begin{bmatrix} 1.3 & 0.5 \\ -0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$

解 符合「每個元都介於 0 與 1 之間」及「每行之和都為 1」兩個條件的方陣可以是轉移矩陣

(A)×：每個元都介於 0 與 1 之間，但第二行之和 $0.5+0.6=1.1\neq 1$，故不是轉移矩陣

(B)○：每個元都介於 0 與 1 之間，且第一行與第二行之和都是 1，所以是轉移矩陣

(C)○：每個元都介於 0 與 1 之間，且第一行與第二行之和都是 1，所以是轉移矩陣

(D)×：雖然各行之和都是 1，但是有一個元 $\sqrt{3}-3<0$，所以不是轉移矩陣

(E)×：雖然各行之和都是 1，但是有一個元 $-0.3<0$，所以不是轉移矩陣

故選(B)(C)

例題 2 轉移矩陣的應用

早餐店販賣漢堡與蛋餅，根據統計發現，購買漢堡的顧客第二天有 60 % 的人繼續購買漢堡，其餘 40 % 改買蛋餅；購買蛋餅的顧客第二天有 30 % 繼續購買蛋餅，其餘 70 % 則改買漢堡。已知星期一購買漢堡與蛋餅的顧客各占 50 %，假設這些顧客會繼續來購買早餐，試求：

(1) 此早餐店顧客購買漢堡與蛋餅變化情形的轉移矩陣

(2) 星期三（兩天後）購買漢堡與蛋餅的比例

解 (1) 轉移矩陣為

$$\begin{array}{cc} \text{漢堡} & \text{蛋餅} \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.7 \\ 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \text{漢堡} \\ \text{蛋餅} \end{array}$$

(2) 將星期一購買漢堡與蛋餅的比例用機率向量表示 $X_0=\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

則星期二為 $X_1=AX_0=\begin{bmatrix} 0.6 & 0.7 \\ 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{bmatrix}$

星期三為 $X_2=AX_1=\begin{bmatrix} 0.6 & 0.7 \\ 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.635 \\ 0.365 \end{bmatrix}$

故知星期三有 63.5 % 購買漢堡，36.5 % 購買蛋餅

例題 3 線性變換實例

在平面上定義變換矩陣 $A=\begin{bmatrix}2&5\\3&8\end{bmatrix}$，則：

(1) 矩陣 A 把 P（-4，2）變換到 P'，試求 P' 點坐標

(2) 矩陣 A 把 Q 變換到 Q'（1，2），試求 Q 點坐標

解 (1) $\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&5\\3&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$

故 P' 點坐標為（2，4）

(2) $\det A=16-15=1$

得 $A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}8&-5\\-3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&-5\\-3&2\end{bmatrix}$

設 Q 點坐標為（x，y）

則 $A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ $\quad\therefore\ \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&-5\\-3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$

故 Q 點坐標為（-2，1）

例題 4 單位向量的變換結果決定線性變換

已知線性變換矩陣 A 將 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 變換到 $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 變換到 $\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$，試求：

(1) 變換矩陣 A

(2) 點 P（2，3）經 A 變換到 P'，試求 P' 點坐標

解

(1) 由已知 $A=\begin{bmatrix}2&-1\\3&2\end{bmatrix}$

(2) $A\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\12\end{bmatrix}$

故 P' 點坐標為（1，12）

例題 5 線性變換面積比的應用

已知平面上三點 P（1，2），Q（3，-1），R（0，4），若 P、Q、R 三點經過 $A=\begin{bmatrix}3&2\\2&2\end{bmatrix}$ 線性變換後，得到 P'、Q'、R' 三點，試求 $\overrightarrow{P'Q'}$ 與 $\overrightarrow{P'R'}$ 所張出的平行四邊形面積

解 $\overrightarrow{PO}=$（2，-3），$\overrightarrow{PR}=$（-1，2）

$\therefore$ $\overrightarrow{PQ}$、$\overrightarrow{PR}$ 所張出的平行四邊形面積為 $\left|\begin{vmatrix}2&-1\\-3&2\end{vmatrix}\right|=|4-3|=1$

又 $|\det A|=\left|\begin{vmatrix}3&2\\2&2\end{vmatrix}\right|=2$

故所求面積為 $1\times2=2$

例題 6 伸縮變換與伸縮矩陣

設 $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$，坐標平面上三點 O（0，0），P（3，−2），Q（1，1）經由 A 線性變換至 O'、P'、Q' 三點，試求：

(1) O'、P'、Q' 三點的坐標

(2) $\triangle O'P'Q'$ 面積

(3) $\triangle OPQ$ 面積

(4) $\triangle O'P'Q'$ 與 $\triangle OPQ$ 面積的比值

解 (1) O' 點坐標為 $\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

P' 點坐標為 $\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-6\end{bmatrix}$

Q' 點坐標為 $\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$

故 O' 點坐標為（0，0），P' 點坐標為（6，−6），Q' 點坐標為（2，3）

(2) $\overrightarrow{O'P'}$ =（6，−6），$\overrightarrow{O'Q'}$ =（2，3）

$\triangle O'P'Q'$ 面積為 $\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}6 & 2\\-6 & 3\end{vmatrix}\right|=15$

(3) $\overrightarrow{OP}$ =（3，−2），$\overrightarrow{OQ}$ =（1，1）

$\triangle OPQ$ 面積為 $\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}3 & 1\\-2 & 1\end{vmatrix}\right|=\dfrac{5}{2}$

(4) $\triangle O'P'Q'$ 面積與 $\triangle OPQ$ 面積比值為 $\dfrac{15}{\frac{5}{2}}=6$

例題 7 鏡射變換

已知直線 L 方程式 $x-y-1=0$，則：

(1) 在直線 L 上取兩點 A（4，3），B（−1，−2），試求 A、B 對 x 軸作鏡射後的點 A'、B' 的坐標。

(2) 直線 L 對 x 軸作鏡射後的圖形為直線 L'，試求 L' 的方程式

解 (1) 由題目知 $\theta=0°$

鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix}\cos 0° & \sin 0°\\\sin 0° & -\cos 0°\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$

A' 點坐標為 $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix}$

B' 點坐標為 $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$

故 A' 點坐標為（4，−3），B' 點坐標為（−1，2）

(2) 直線 L' 即 $\overleftrightarrow{A'B'}$

$y+3=\dfrac{2-(-3)}{-1-4}(x-4)$

整理得 $x+y-1=0$

例題 8 旋轉變換

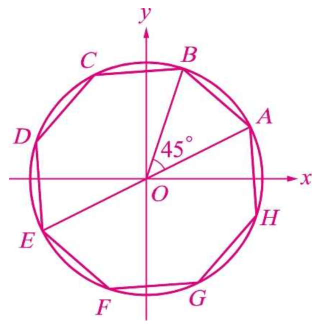
平面上有一個正八邊形，其八個頂點依逆時針方向排列為 $ABCDEFGH$，已知 A 點坐標為（4，2），試求：

(1) B 點坐標

(2) E 點坐標

解

如右圖，O 為原點



(1) 將 A 點旋轉 45°恰與 B 點重合

故 B 點坐標為 $\begin{bmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \end{bmatrix}$

故 B 點坐標為 $(\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

(2) 同理，E 點坐標為 $\begin{bmatrix} \cos 180° & -\sin 180° \\ \sin 180° & \cos 180° \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$

故 E 點坐標為（−4，−2）

例題 9 推移變換

設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是一個 x 方向的推移矩陣，已知 O（0，0）、P（1，0）、Q（1，3）、R（0，3）四點，將此四點經由推移矩陣 A 變換得 O'、P'、Q'、R' 四點，試求：

(1) O'，P'，Q'，R' 四點的坐標

(2) 計算原四邊形面積與變換後的四邊形面積

解 (1) O' 點坐標為 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$P'$ 點坐標為 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Q' 點坐標為 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$，$R'$ 點坐標為 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

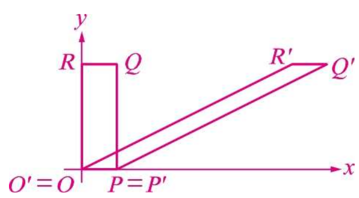
故 O' 點坐標為（0，0），P' 點坐標為（1，0）

Q' 點坐標為（7，3），R' 點坐標為（6，3）

(2) 將 O，P，Q，R，O'，P'，Q'，R' 標示在平面坐標點上，如右圖

顯然原四邊形 $OPQR$ 面積為 1×3＝3

變換後的四邊形 $O'P'Q'R'$ 面積為 1×3＝3



例題 10 綜合變換

定義坐標平面上點（x，y）變換為 $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$。試求：

(1) 點（x，y）經過哪些變換？

(2) 點（2，4）經過變換以後的新坐標

解

(1) 設 $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

得 $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ $\theta=-45°$，此為順時針 45°的旋轉矩陣

$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$ 為伸縮矩陣，x 坐標不變，y 坐標變為 2 倍

故知本題的變換是將點（x，y）先順時針旋轉 45°，再將新的 y 坐標伸縮為 2 倍

(2) $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\sqrt{2}\\2\sqrt{2}\end{bmatrix}$

故點（2，4）經過變換後的坐標為 $(3\sqrt{2},2\sqrt{2})$