4-2 矩陣的運算

例題 1 矩陣基本概念

已知矩陣 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \\ 8 & 6 & 9 \end{bmatrix}$，試寫出：

(1) 矩陣 A 的階數
(2) A 的第（2，3）元

解 (1) A 是 3×3 階矩陣，也是三階方陣
(2) A 的第（2，3）元為 5

例題 2 以算式定義矩陣的元

已知矩陣 $A=[a_{ij}]_{3\times 2}$，其中 $a_{ij}=3i+j$，試求矩陣 A

解 $A=[a_{ij}]_{3\times 2}$ 是一個 3 列 2 行的矩陣，有 6 個元
其中第 i 列，第 j 行的元（a_{ij}）定義為 $a_{ij}=3i+j$
所以 $a_{11}=3\times1+1=4$，$a_{12}=3\times1+2=5$
$a_{21}=3\times2+1=7$，$a_{22}=3\times2+2=8$
$a_{31}=3\times3+1=10$，$a_{32}=3\times3+2=11$
故得 $A=\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$

例題 3 矩陣的相等

已知矩陣 $A=\begin{bmatrix} 3 & a \\ b & 2 \\ c & 4 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} s & 6 \\ 1 & t \\ 5 & u \end{bmatrix}$，且 $A=B$，試求 a、b、c、s、t、u

解 $A=B$，故對應位置的元相等
$a=6$，$b=1$，$c=5$，$s=3$，$t=2$，$u=4$

例題 4 矩陣的加減法

已知矩陣 $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$，試求：

(1) $A+B$
(2) $A-B$

解 (1) $A+B=\begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 5 & -3 & 10 \end{bmatrix}$

(2) $A-B=\begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

例題 5 矩陣的係數積

已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 2 & 7\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-2 & 6\\ -3 & 5\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$，試求：

(1) $2A-B$

(2) $3A+B-C$

解 (1) $2A-B=\begin{bmatrix}8 & -6\\ 4 & 14\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2 & 6\\ -3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & -12\\ 7 & 9\end{bmatrix}$

(2) $3A+B-C=\begin{bmatrix}12 & -9\\ 6 & 21\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 6\\ -3 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & -4\\ 1 & 23\end{bmatrix}$

例題 6 矩陣方程式

已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}7 & 8\\ 0 & 4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 2\end{bmatrix}$，且 $2X+A=3B$，試求矩陣 X

解 $2X=3B-A=\begin{bmatrix}9 & 12\\ 6 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7 & 8\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 6 & 2\end{bmatrix}$

⇨ $X=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$

例題 7 矩陣的乘法

已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & 4 & 4\\ 3 & 7 & 6\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$，試求：

(1) AB

(2) AC

解 (1) $AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4 & 4\\ 3 & 7 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 18 & 16\\ 21 & 47 & 42\end{bmatrix}$

(2) $AC=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 8\\ 7 & 21\end{bmatrix}$

例題 8 二階方陣的乘法反方陣

已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix}8 & 5\\ 3 & 2\end{bmatrix}$，試問：

(1) A 是否有乘法反方陣 A^{-1}

(2) 若 A^{-1} 存在，試求 A^{-1}

解 (1) $\det A=\begin{vmatrix}8 & 5\\ 3 & 2\end{vmatrix}=1\neq 0$

∴ A 有乘法反方陣

(2) $A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}2 & -5\\ -3 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -5\\ -3 & 8\end{bmatrix}$

例題 9 用二階反方陣求解二元一次方程組

已知二元一次方程組 $\begin{cases} 2x+3y=3 \\ x-y=4 \end{cases}$，試求：

(1) 將方程組寫成 $AX=B$ 的形式

(2) 用 A 的反方陣 A^{-1} 解方程組

解 (1) 令 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

即 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(2) $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\dfrac{1}{-5}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$

承(1)，$X=A^{-1}B \Rightarrow X=\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

故 $x=3$，$y=-1$

例題 10 矩陣方程式

試解矩陣方程式 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

解 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$=\dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$