4-1 高斯消去法與矩陣

例題 1 高斯消去法解三元一次方程組

利用高斯消去法解方程組 $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+3y+z=10 \\ 3x-4y-4z=-10 \end{cases}$

解

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \cdots\cdots ① \\ 2x+3y+z=10 \cdots\cdots ② \\ 3x-4y-4z=-10 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

將① ×（−2）＋②，① ×（−3）＋③得

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \cdots\cdots ④ \\ -y+3z=8 \cdots\cdots ⑤ \\ -10y-z=-13 \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

將⑤ ×（−10）+⑥得

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \cdots\cdots ⑦ \\ -y+3z=8 \cdots\cdots ⑧ \\ -31z=-93 \cdots\cdots ⑨ \end{cases}$$

由⑨得 $z=3$，代入⑧得 $y=1$
再將 $y=1$，$z=3$ 代入⑦得 $x=2$
故方程組的解為 $x=2$，$y=1$，$z=3$

例題 2 線性方程組的增廣矩陣與係數矩陣（一）

請寫出線性方程組 $\begin{cases} 3x+y+z=11 \\ x+5y-2z=-1 \\ 2x-y+3z=12 \end{cases}$ 的

(1) 係數矩陣
(2) 增廣矩陣

解

(1) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

(2) $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 5 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 12 \end{array}\right]$

例題 3 線性方程組的增廣矩陣與係數矩陣（二）

某三元一次聯立方程式的增廣矩陣為 $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 4 \end{array}\right]$，試寫出：

(1) 此三元一次聯立方程式

(2) 此三元一次聯立方程式的係數矩陣

解

(1) $\begin{cases} 3x+z=1 \\ 8x+4y+3z=2 \\ 2x+5y+6z=4 \end{cases}$

(2) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

例題 4 高斯消去法及矩陣列運算解線性方程組（一）

試用矩陣列運算解三元一次方程組 $\begin{cases} 3x+4y-z=5 \\ x+y+z=4 \\ 2x-3y+4z=7 \end{cases}$

解 利用增廣矩陣進行列運算

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 7 \end{array}\right] \times(-3) \times(-2)$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & -5 & 2 & -1 \end{array}\right] \times 5 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -18 & -36 \end{array}\right]$$

對應方程組為 $\begin{cases} x+y+z=4 \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ y-4z=-7 \cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ -18z=-36 \cdots\cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$

由③得 $z=2$ 代入②得 $y=1$，再將 $y=1$，$z=2$

代入①得 $x=1$，故方程組解為 $x=1$，$y=1$，$z=2$

例題 5 高斯消去法及矩陣列運算解線性方程組（二）

試用矩陣列運算解三元一次方程組 $\begin{cases} x+2y-z=4 \\ 2x-y-7z=-7 \\ 4x+3y-9z=1 \end{cases}$

解 利用增廣矩陣進行列運算

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & -7 & -7 \\ 4 & 3 & -9 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \times(-2) \\ \times(-4) \end{array} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & -5 & -15 \\ 0 & -5 & -5 & -15 \end{array}\right] \times\left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -5 & -15 \end{array}\right] \times 5 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

對應的方程組為 $\begin{cases} x+2y-z=4 \cdots\cdots ① \\ y+z=3 \cdots\cdots ② \\ 0z=0 \cdots\cdots ③ \end{cases}$

令 $z=t$ 代入②得 $y=3-t$，再將 $y=3-t$，$z=t$ 代入①得 $x=-2(3-t)+t+4=-2+3t$

故方程組解為 $\begin{cases} x=-2+3t \\ y=3-t \\ z=t \end{cases}$，$t$ 為任意實數

例題 6 高斯消去法及矩陣列運算解線性方程組（三）

試用高斯消去法及矩陣列運算解三元一次方程組 $\begin{cases} x-y-z=1 \\ 3x-5y+4z=12 \\ x-3y+6z=11 \end{cases}$

解 利用增廣矩陣進行列運算

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 4 & 12 \\ 1 & -3 & 6 & 11 \end{array}\right] \begin{array}{l} \times(-3) \\ \times(-1) \end{array} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 9 \\ 0 & -2 & 7 & 10 \end{array}\right] \times(-1)$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

對應的方程組為 $\begin{cases} x-y-z=1 \cdots\cdots ① \\ -2y+7z=9 \cdots\cdots ② \\ 0z=1 \cdots\cdots ③ \end{cases}$

第③式為矛盾式

故方程組無解

例題 7　已知方程組解的狀況求係數

已知方程組 $\begin{cases} x+3y-4z=7 \\ 2x+5y+z=6 \\ 4x+9y+11z=a \end{cases}$ 有解，試求實數 a

解 利用增廣矩陣進行列運算

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 6 \\ 4 & 9 & 11 & a \end{array}\right] \begin{array}{l} \times(-2) \\ \times(-4) \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 7 \\ 0 & -1 & 9 & -8 \\ 0 & -3 & 27 & a-28 \end{array}\right] \times(-3)$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 7 \\ 0 & -1 & 9 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \end{array}\right]$$

對應的方程組為 $\begin{cases} x+3y-4z=7 \cdots\cdots\text{①} \\ -y+9z=-8 \cdots\cdots\text{②} \\ 0z=a-4 \cdots\cdots\text{③} \end{cases}$

顯然第③式為 $0z=0$ 才有解

故令 $a-4=0$ 得 $a=4$

例題 8 三元一次方程組的應用（一）：求二次函數的係數

已知一元二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 圖形通過（1，2），（2，8），（−2，−4），試求序組（a，b，c）

解

將（1，2），（2，8），（−2，−4）代入得 $\begin{cases} a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=8 \\ 4a-2b+c=4 \end{cases}$

利用增廣矩陣進行列運算

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 8 \\ 4 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \times(-4) \\ \times(-4) \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -12 \end{array}\right] \times(-3)$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -12 \end{array}\right]$$

對應的方程組為 $\begin{cases} a+b+c=2 \cdots\cdots\text{①} \\ -2b-3c=0 \cdots\cdots\text{②} \\ 6c=-12 \cdots\cdots\text{③} \end{cases}$

$c=-2$ 代入②得 $-2b=3c=-6 \Rightarrow b=3$

再將 $b=3$，$c=-2$ 代入①得 $a=2-3-(-2)=1$

故序組（a，b，c）＝（1，3，−2）

例題 9　三元一次方程組的應用（二）：空間向量的線性組合

給定空間中四個向量 $\overrightarrow{a}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{b}=(3,1,2)$，$\overrightarrow{c}=(-1,1,1)$，$\overrightarrow{d}=(6,0,3)$，試將 $\overrightarrow{d}$ 表成 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ 的線性組合

解　設 $\overrightarrow{d}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}+z\overrightarrow{c}$ 得 $(6,0,3)=(x,0,x)+(3y,y,2y)+(-z,z,z)$

即 $\begin{cases} x+3y-z=6 \\ y+z=0 \\ x+2y+z=3 \end{cases}$

利用增廣矩陣進行列運算

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \times(-1) \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right] \times 1$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

對應的方程組為 $\begin{cases} x+3y-z=6 \cdots\cdots ① \\ y+z=0 \cdots\cdots ② \\ 3z=-3 \cdots\cdots ③ \end{cases}$

由③得 $z=-1$ 代入②得 $y=1$，再將 $y=1$，$z=-1$ 代入①得 $x=2$

故得 $\overrightarrow{d}=2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$