第 3 章　綜合演練　　月　日　得分

一、單選題

1. 袋中有 5 白球、3 紅球，由袋中一次取出 2 球，則至少有一紅球之機率為下列何者？

(A) $\frac{3}{5}$　(B) $\frac{2}{5}$　(C) $\frac{5}{14}$　(D) $\frac{9}{14}$　(E) $\frac{13}{14}$

解 一次取 2 球，共有 C^8_2 個樣本點

至少取出一紅球之機率相當於 1－未取出紅球的機率

也就是 1－取出 2 白球的機率，即 $1-\frac{C^5_2}{C^8_2}=1-\frac{5}{14}=\frac{9}{14}$

故選(D)

2. 已知樣本空間有 A、B 兩事件，A 事件發生的機率為 0.4，B 事件發生的機率為 0.6，A 發生或 B 發生的機率為 0.8，則 A 與 B 都發生的機率為下列何者？

(A)0.2　(B)0.24　(C)0.32　(D)0.48　(E)1

解 由已知 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.6$，$P(A\cup B)=0.8$

則 $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.4+0.6-0.8=0.2$

故選(A)

二、多選題

3. 設 A、B 為獨立事件，且 $P(A)=\frac{2}{3}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，試選出正確的選項。

(A)A、B 為互斥事件　(B)$P(A\cap B)=\frac{1}{3}$　(C)$P(A\cap B')=\frac{1}{3}$

(D)$P(A'\cap B)=\frac{1}{6}$　(E)$P(A'\cap B')=\frac{1}{6}$

解 (A)×：A、B 為獨立事件，$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\neq 0$

故 A、B 非互斥事件

(B) ○：A、B 為獨立事件，所以 $P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

(C) ○：A、B 為獨立事件，則 A、B' 也是獨立事件

所以 $P(A\cap B')=P(A)P(B')=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

(D) ○：A、B 為獨立事件，則 A'、B 也是獨立事件

所以 $P(A'\cap B)=P(A')P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

(E) ○：A、B 為獨立事件，則 A'、B' 也是獨立事件

所以 $P(A'\cap B')=P(A')P(B')=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

故選(B)(C)(D)(E)

4. 設 A、B 為獨立事件，若 $P(A)=\frac{1}{3}$、$P(B)=\frac{1}{2}$，試選出正確的選項。

(A)$P(A)=P(A \mid B)$　　(B)$P(A \mid B)=P(B \mid A)$　　(C)$P(A \mid B)=\frac{1}{6}$

(D)$P(A' \mid B)=\frac{2}{3}$　　(E)$P(B \mid A')=\frac{1}{2}$

解 (A) ○：由獨立的定義可知，B 事件發生與否，不影響 A 發生的機率

(B) ×：$P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$，$P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

但 $P(A) \neq P(B)$，故 $P(A \mid B) \neq P(B \mid A)$

(C) ×：$P(A \mid B)=P(A)=\frac{1}{3}$

(D) ○：A、B 為獨立事件，則 A'、B 也是獨立事件，所以 $P(A' \mid B)=P(A')=\frac{2}{3}$

(E) ○：A、B 為獨立事件，則 A'、B 也是獨立事件，所以 $P(B \mid A')=P(B)=\frac{1}{2}$

故選(A)(D)(E)

三、填充題

5. 慶祝校慶，話劇社動員了 16 名演員演出一齣舞臺劇。已知這 16 人當中，有 10 名高二社員，6 名高一社員。高二社員中有 6 名女生、4 名男生，高一社員中則有 3 名女生、3 名男生。今任選一名社員向觀眾介紹這一齣舞臺劇，試求：

(1) 已知是高二社員的情況下，是女生的機率為________

(2) 已知是男生的情況下，是高二社員的機率為________

解 依條件作表格如右

	高二	高一	小計
女	6	3	9
男	4	3	7
小計	10	6	

(1) $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

(2) $\frac{4}{7}$

6. 甲，乙，丙三人參加校內桌球比賽，根據平常練習與經驗判斷，甲、乙、丙進入決賽的機率依序為 $\frac{3}{4}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{2}$，且三人能否進入決賽是獨立事件，則：

(1) 三人中至少有一人進入決賽的機率為________

(2) 三人中恰有兩人進入決賽的機率為________

解 設 A、B、C 分別代表甲、乙、丙進入決賽的事件

則甲、乙、丙進入決賽的機率分別為 $P(A)=\frac{3}{4}$、$P(B)=\frac{2}{3}$、$P(C)=\frac{1}{2}$

(1) 三人中至少有一人進入決賽的機率為 $1-P(A'\cap B'\cap C')$

$=1-P(A')P(B')P(C')=1-\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{23}{24}$

(2) 三人中恰有兩人進入決賽的機率為 $P(A\cap B\cap C')+P(A\cap B'\cap C)+P(A'\cap B\cap C)$

$=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{11}{24}$

7. 甲、乙兩人同時解一數學問題，根據過去的經驗，甲每 3 題能解出 2 題，乙每 4 題能解出 3 題，已知兩人解題互不影響，則：

(1) 恰有一人解出的機率為________

(2) 此題被解出的機率為________

解 設 A、B 分別代表甲、乙解出此題的事件，則 $P(A)=\frac{2}{3}$，$P(B)=\frac{3}{4}$

(1) 所求為甲解出乙未解出，或甲未解出乙解出

即 $P(A\cap B')+P(A'\cap B)=P(A)P(B')+P(A')P(B)$

$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{5}{12}$

(2) 所求機率為 1－甲未解出且乙未解出的機率

$1-P(A'\cap B')=1-P(A')P(B')=1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$

8. 桌上有甲，乙，丙三個袋子，甲袋有 3 個白球，乙袋有 2 個紅球、1 個白球，丙袋有 1 個紅球、2 個白球。小偉擲兩枚均勻的硬幣一次，若出現兩個正面，則從甲袋抽出 1 球；若出現兩個反面，則從乙袋抽出 1 球；出現一正面，一反面，則從丙袋抽出 1 球。則：

(1) 抽出白球的機率為________

(2) 此白球來自乙袋的機率為________

解 設 S 為擲兩枚均勻硬幣的樣本空間，則 $n(S)=2^2=4$

設事件 A、B、C 分別代表擲出兩正面、兩反面、一正面一反面的事件

則 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B)=\frac{1}{4}$，$P(C)=\frac{2}{4}$

即選出甲、乙、丙袋的機率為 $\frac{1}{4}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{2}{4}$

(1) 由加法法則，選出白球的機率為 $\frac{1}{4}\times\frac{3}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{3+1+4}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$

(2) 由貝氏定理，此白球來自乙袋的機率為 $\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{8}{12}}=\frac{1}{8}$

9. 甲，乙，丙三人同時打靶，每人一發，已知甲、乙、丙的命中率依序為 0.5、0.3、0.4，且三人命中靶面的事件為獨立事件，試問：

(1) 靶面恰中一發的機率為________

(2) 靶面恰中一發，是由甲命中的機率為________

解 設 A、B、C 分別代表甲、乙、丙命中靶面的事件

則 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.3$，$P(C)=0.4$

(1) 所求為 $P(A\cap B'\cap C')+P(A'\cap B\cap C')+P(A'\cap B'\cap C)$

$=P(A)P(B')P(C')+P(A')P(B)P(C')+P(A')P(B')P(C)$

$=0.5\times(1-0.3)\times(1-0.4)+(1-0.5)\times0.3\times(1-0.4)+(1-0.5)\times(1-0.3)\times0.4$

$=0.21+0.09+0.14$

$=0.44$

(2) 由貝氏定理，所求為 $\frac{0.21}{0.44}=\frac{21}{44}$

10. 設 A、B 是樣本空間 S 的兩事件，且 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(A\cup B)=\frac{2}{3}$，試依據下列條件求：

(1) A 與 B 是互斥事件，則 $P(B)=$________

(2) A 與 B 是獨立事件，則 $P(B)=$________

解 (1) A 與 B 是互斥事件，則 $A\cap B=\varnothing$，故 $P(A\cap B)=0$

由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$，得 $\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+P(B)-0$，故 $P(B)=\frac{1}{6}$

(2) A 與 B 是獨立事件，則 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$，得 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

故 $\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+P(B)-\frac{1}{2}P(B)$，即 $\frac{1}{2}P(B)=\frac{1}{6}$，故得 $P(B)=\frac{1}{3}$

四、計算題

11. 袋中有 2 白球 3 黑球，自袋中任取一球，甲、乙看過之後都說是白球。根據經驗，甲說實話的機率是 $\frac{4}{7}$，乙說實話的機率為 $\frac{2}{7}$，試求此球確實為白球的機率。

解 甲、乙看過之後都說是白球有兩種情形

取出白球且兩人都說實話，機率為 $\frac{2}{5}\times\frac{4}{7}\times\frac{2}{7}=\frac{16}{245}$

取出黑球且兩人都沒說實話，機率為 $\frac{3}{5}\times\frac{3}{7}\times\frac{5}{7}=\frac{45}{245}$

故此球確實為白球的機率為 $\dfrac{\frac{16}{245}}{\frac{16}{245}+\frac{45}{245}}=\frac{16}{61}$

12. 科學研習社社員的年級與性別分配如右表，如果希望性別與年級獨立，試問應再招收幾名高一女生社員？

	高二	高一
男	16	8
女	12	2

解 假設再招收 x 名高一女生社員可以使性別與年級獨立

則任選一社員是女生的機率等於選出高一社員是女生的機率

	高二	高一	合計
男	16	8	24
女	12	$2+x$	$14+x$
合計	28	$10+x$	$38+x$

故 $\frac{14+x}{38+x}=\frac{2+x}{10+x}$，解得 $x=4$

故應再招收 4 名高一女生