第 3 章　綜合演練詳解

符號＊為難題。

1. 下表是 16 歲中學男生一千六百公尺跑走百分等級對應表（單位：分'秒"），試問對 16 歲男生而言，若想達到銅牌以上的成績，其百分等級為何？

	待加強				中等				
百分等級	5th	10th	15th	20th	25th	30th	35th	40th	45th
時　間	11′55″	11′04″	10′27″	9′59″	9′38″	9′20″	9′04″	8′52″	8′40″

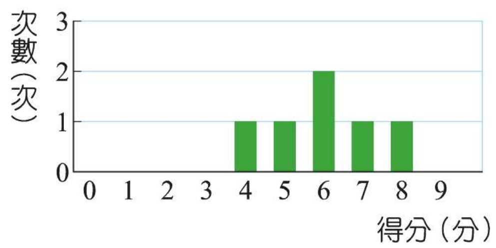
	銅牌					銀牌		金牌		
百分等級	50th	55th	60th	65th	70th	75th	80th	85th	90th	95th
時　間	8′27″	8′13″	8′04″	7′54″	7′42″	7′32″	7′20″	7′09″	6′53″	6′36″

（資料來源：教育部體育署體適能網站）

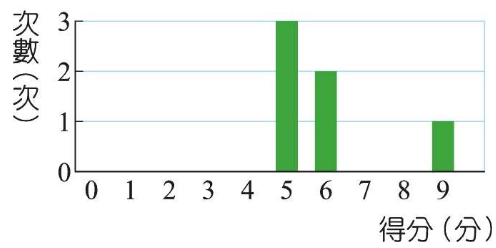
解 想達到銅牌以上的成績，其百分等級為 50 以上

2. 小珊與阿芬比賽射箭，兩人得分次數的長條圖如下，試比較兩人得分的平均與標準差大小關係。

小珊



阿芬



解 小珊的平均與標準差為

$$\mu_{珊}=\frac{4+5+2\times6+7+8}{6}=6\text{（分）},$$

$$\sigma_{珊}=\sqrt{\frac{(4-6)^2+(5-6)^2+2\times(6-6)^2+(7-6)^2+(8-6)^2}{6}}=\sqrt{\frac{5}{3}}\text{（分）}$$

阿芬的平均與標準差為

$$\mu_{芬}=\frac{3\times5+2\times6+9}{6}=6\text{（分）},$$

$$\sigma_{芬}=\sqrt{\frac{3\times(5-6)^2+2\times(6-6)^2+(9-6)^2}{6}}=\sqrt{2}\text{（分）}$$

故平均得分 $\mu_{珊}=\mu_{芬}$，標準差 $\sigma_{珊}<\sigma_{芬}$

3. 下列哪些選項的敘述是正確的？
(A)相關係數 r 一定滿足 $-1 \le r \le 1$
(B)若兩變量成直線關係，則相關係數為 1
(C)（x，y）的相關係數 r_{xy} 與（y，x）的相關係數 r_{yx} 相同
(D)二維數據的單位改變之後，相關係數也會改變
(E)將數據標準化，不會改變相關係數

解 (A)○：相關係數 r 的範圍是 $-1 \le r \le 1$
(B)×：若兩變數成斜直線（非鉛直與水平）關係，則依直線斜率之正負，相關係數 r 可能是±1
(C)○：由相關係數的公式可看出具有對稱性，即

$$r_{xy}=\frac{\sum(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sqrt{\sum(x_i-\mu_x)^2}\sqrt{\sum(y_i-\mu_y)^2}}=\frac{\sum(y_i-\mu_y)(x_i-\mu_x)}{\sqrt{\sum(y_i-\mu_y)^2}\sqrt{\sum(x_i-\mu_x)^2}}=r_{yx}$$

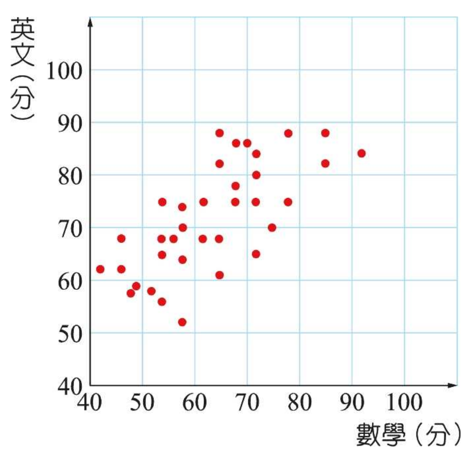
(D)×
(E)○：二維數據經過單位換算或是數據標準化後，不會改變相關係數
故選(A)(C)(E)

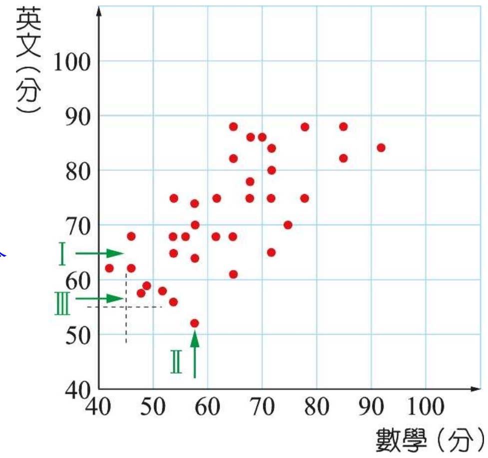
4. 若甲、乙兩家公司近兩年的成長率分別如下（$a>b>0$）：
甲：第一年的成長率為 a %，第二年的成長率為 b %
乙：第一年的成長率為 b %，第二年的成長率為 a %
則此兩家公司這兩年的每年平均成長率各為多少？何者較大？

解 甲的平均成長率為 $\sqrt{(1+a\%)(1+b\%)}-1$，

乙的平均成長率為 $\sqrt{(1+b\%)(1+a\%)}-1$，故相等。

5. 高一甲班 35 人某次考試數學（橫軸）與英文（縱軸）成績之散布圖如右，每個點代表一位學生的成績。若及格標準為 60 分，請問下列哪些選項是正確的？
(A)兩科都不及格的學生有 5 位
(B)每位同學兩科成績總和都超過 100 分
(C)數學的標準差大於英文的標準差
(D)若以最小平方法決定數據集中趨勢的直線方程式，則該直線的斜率大於 0





解 (A)○：有 5 位同學數學與英文成績均不及格

(B)○：在第 I 區的 3 位同學數學 40 分以上且英文 60 分以上，所以總分超過 100 分
在第 II 區的 3 位同學數學 50 分以上且英文 50 分以上，所以總分超過 100 分
在第 III 區的 2 位同學數學 45 分以上且英文 55 分以上，故每位同學總分均超過 100 分

(C)○：數學成績相較之下比英文成績分散，所以數學的標準差大於英文的標準差

(D)○：由圖知數學與英文呈正相關，又最適直線斜率與相關係數同號，因此，最適直線斜率為正

故選(A)(B)(C)(D)

6. 將 10 個數由小至大排列如下：

1，2，2，3，3，3，4，4，4，4

試問刪除下列哪一個數後，標準差會變大？
(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4。

解 原始數據的平均數為 3，標準差為 1

刪除 1，則平均數為 $\frac{29}{9}$，標準差為 $\frac{\sqrt{50}}{9}<1$

刪除 2，則平均數為 $\frac{28}{9}$，標準差為 $\frac{\sqrt{80}}{9}<1$

刪除 3，則平均數為 3，標準差為 $\sqrt{\frac{10}{9}}=\frac{\sqrt{90}}{9}>1$

刪除 4，則平均數為 $\frac{26}{9}$，標準差為 $\frac{\sqrt{80}}{9}<1$

故選(C)

*7. 將高一某班分成甲、乙兩組。某次測驗，甲組 20 位同學成績的平均為 60 分，標準差為 5 分；乙組 25 位同學成績的平均為 78 分，標準差為 4 分，試求全班 45 位同學此次測驗成績的平均與標準差。

解 假設 x_i，$i=1, 2, \cdots, 20$ 表示甲組學生的成績，
y_i，$i=1, 2, \cdots, 25$ 表示乙組學生的成績，
z_i，$i=1, 2, \cdots, 45$ 表示全班學生的成績。

根據題意可得 $\mu_{甲}=\dfrac{\sum x_i}{20}$，$\mu_{乙}=\dfrac{\sum y_i}{25}$，

即 $\sum x_i=20\times\mu_{甲}=20\times 60=1200$，$\sum y_i=25\times\mu_{乙}=25\times 78=1950$，

故 $\sum z_i=\sum x_i+\sum y_i=1200+1950=3150$

(1) 全班的平均為 $\mu=\dfrac{\sum z_i}{45}=70$（分）

(2) $\sigma_{甲}=\sqrt{\dfrac{1}{20}\sum x_i^2-\mu_{甲}^2}$，$\sigma_{乙}=\sqrt{\dfrac{1}{25}\sum y_i^2-\mu_{乙}^2}$，

$\sum x_i^2=20\times(\sigma_{甲}^2+\mu_{甲}^2)=72500$，$\sum y_i^2=25\times(\sigma_{乙}^2+\mu_{乙}^2)=152500$，

故 $\sum z_i^2=\sum x_i^2+\sum y_i^2=72500+152500=225000$，

全班的標準差為 $\sigma=\sqrt{\dfrac{1}{45}\sum z_i^2-\mu^2}=\sqrt{\dfrac{1}{45}\times 225000-70^2}=\sqrt{100}=10$（分）

8. 有 10 萬筆資料（x_i，y_i），已知平均數 $\mu_x=10$，$\mu_y=8$，且 x，y 的相關係數 $r=0.8$，若 y 對 x 的最適直線通過點（2，6），試求這 10 萬筆資料的最適直線方程式及 $\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$ 的值。

（σ_x、σ_y 分別為 x、y 的標準差）

解 最適直線為 $y-8=m(x-10)$，因為該線通過（2，6），故得 $m=\dfrac{1}{4}$，

即最適直線為 $y-8=\dfrac{1}{4}(x-10)$。

又 $m=r\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$，代入得 $\dfrac{1}{4}=0.8\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$，故 $\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=\dfrac{5}{16}$

9. 某系推薦甄試分為口試與筆試兩測驗，因為口試相當耗時，今年擬取消口試，調閱去年 4 名考生的筆試與口試成績如下：

	甲	乙	丙	丁
筆試成績 x（級分）	11	12	13	12
口試成績 y（級分）	13	15	14	14

（註：15 級分為滿級分）

(1) 試求此 4 名考生 x，y 的相關係數 r

(2) 若該系決定相關係數 $r>0.6$ 就取消口試，試問口試是否會取消？

解 計算算術平均數 $\mu_x=12$，$\mu_y=14$。製作表格如下：

x	y	$x-\mu_x$	$y-\mu_y$	$(x-\mu_x)(y-\mu_y)$	$(x-\mu_x)^2$	$(y-\mu_y)^2$
11	13	−1	−1	1	1	1
12	15	0	1	0	0	1
13	14	1	0	0	1	0
12	14	0	0	0	0	0
總和				1	2	2

(1) 相關係數 $r=\dfrac{1}{2}=0.5$

(2) 相關係數並未大於 0.6，所以口試不會取消

*10. 袋中有 24 支籤，分別寫著如下共 24 個由 1～4 組成的四位數字。

1234，1243，1324，1342，1423，1432，
2134，2143，2314，2341，2413，2431，
3124，3142，3214，3241，3412，3421，
4123，4132，4213，4231，4312，4321。

小珊從袋中抽出一支籤，看看有多少個數字的位置正確，就得到多少分。其中“第 i 個數字是 i”稱為位置正確，例如 3214 得到 2 分，因為 2，4 的位置正確；而 4132 得到 1 分，2341 則得到 0 分。試求袋中 24 支籤得分的平均與標準差。

解 1234（4 分），1243（2 分），1324（2 分），1342（1 分），1423（1 分），1432（2 分），
2134（2 分），2143（0 分），2314（1 分），2341（0 分），2413（0 分），2431（1 分），
3124（1 分），3142（0 分），3214（2 分），3241（1 分），3412（0 分），3421（0 分），
4123（0 分），4132（1 分），4213（1 分），4231（2 分），4312（0 分），4321（0 分）。

得 4 分的籤有 1 支，
得 3 分的籤有 0 支，
得 2 分的籤有 6 支，
得 1 分的籤有 8 支，
得 0 分的籤有 9 支。

故得分的平均為 $\dfrac{4\times1+3\times0+2\times6+1\times8+0\times9}{24}=\dfrac{24}{24}=1$（分）

標準差為 $\sqrt{\dfrac{4^2\times1+3^2\times0+2^2\times6+1^2\times8+0^2\times9}{24}-1^2}=1$（分）