第 2 章　綜合演練詳解

符號＊為難題。

1. 某輛汽車在剛推出時售價為 76.9 萬元，經推估賣出後其每年的折舊率為 30%，即每年的價值比前一年減少 30%。請問該汽車賣出三年後，其價值約剩下多少萬元？
（四捨五入取到小數點後第一位，即千元位）

解 由題意知三年後其價值為

$76.9\times(1-30\%)^3=76.9\times0.7^3=26.3767\approx26.4$（萬元）

2. 一等差數列的首項與第二項之和為 7，且其第八項為 23，試求此等差數列的首項與公差

解 設此等差數列 $\langle a_n\rangle$ 的首項為 a_1，公差為 d，

則由 $\begin{cases}a_1+a_2=7\\a_8=23\end{cases}$，得 $\begin{cases}a_1+a_1+d=7\\a_1+7d=23\end{cases}$，

解得 $a_1=2$，$d=3$，因此，首項為 2，公差為 3

3. 已知一等差數列 $\langle a_n\rangle$ 有 $a_1+a_{10}=30$，試求 a_3+a_8 的值。

解 設首項為 a_1，公差為 d，
則由 $a_1+a_{10}=30$，得 $a_1+a_1+9d=30$，即 $2a_1+9d=30$，
所以 $a_3+a_8=a_1+2d+a_1+7d=2a_1+9d=30$

4. 關於下列遞迴數列，試判斷第 101 項的正負號：

(1) 數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_1=-1$，$a_n=a_{n-1}+(-1)^n$，$n\geq2$

(2) 數列 $\langle b_n\rangle$ 滿足 $b_1=1$，$b_n=-2b_{n-1}$，$n\geq2$

解 (1) 由數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_1=-1$，且 $a_n=a_{n-1}+(-1)^n$，$n\geq2$，得

$a_1=-1$，
$a_2=-1+(-1)^2=0$，
$a_3=0+(-1)^3=-1$，
$a_4=-1+(-1)^4=0$，
⋮
因此 $a_{101}=-1$，故第 101 項為負

(2) 由數列 $\langle b_n\rangle$ 滿足 $b_1=1$，且 $b_n=-2b_{n-1}$，$n\geq2$，得

$\langle b_n\rangle$ 是首項為 1，公比為－2 的等比數列

故 $b_{101}=1\times(-2)^{101-1}=(-2)^{100}$ 為正

5. 數列 $a_1+1,\ a_2+8,\ a_3+27,\ldots,\ a_{10}+10^3$ 共有十項，且其和為 3625，試求 $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{10}$ 的值

解 $a_1+1+a_2+8+a_3+27+\ldots+a_{10}+10^3=3625$，

得 $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{10}=3625-(1^3+2^3+3^3+\ldots+10^3)$

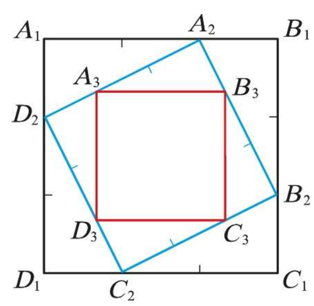
$$=3625-\left(\frac{10\times 11}{2}\right)^2=600$$

6. 有一單位正方形 $A_1B_1C_1D_1$，將各邊三等分，再連成正方形 $A_2B_2C_2D_2$，再將正方形 $A_2B_2C_2D_2$ 各邊三等分，連成正方形 $A_3B_3C_3D_3$，以此類推，得到一系列的正方形，試求：

(1) 正方形 $A_2B_2C_2D_2$ 的邊長

(2) 正方形 $A_2B_2C_2D_2$ 的面積

(3) 前 5 個正方形的面積和



解 (1) 正方形 $A_2B_2C_2D_2$ 的邊長為

$$\overline{A_2B_2}=\sqrt{\overline{A_2B_1}^2+\overline{B_1B_2}^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

(2) 正方形 $A_2B_2C_2D_2$ 的面積為 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}\times\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\dfrac{5}{9}$

(3) 承(2) 類推可知，前五個正方形的面積和為首項為 1，公比為 $\dfrac{5}{9}$ 的等比級數，其和為

$$1+\frac{5}{9}+\left(\frac{5}{9}\right)^2+\left(\frac{5}{9}\right)^3+\left(\frac{5}{9}\right)^4=\frac{1\times\left(1-\left(\frac{5}{9}\right)^5\right)}{1-\frac{5}{9}}=\frac{\frac{9^5-5^5}{9^5}}{\frac{4}{9}}=\frac{9^5-5^5}{9^4\times 4}=\frac{13981}{6561}$$

*7. 設三數成等差數列，其和為 90，若此三數依次加上 1、3、49 後，則成等比數列，試求原來的三個數。（提示：設此三數為 $30-d$，30，$30+d$）

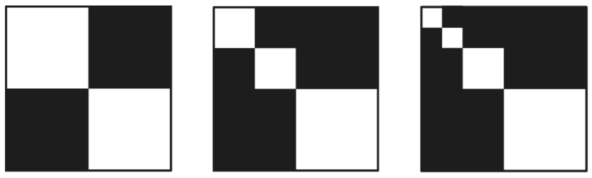
解 設此三數為 $30-d$，30，$30+d$，

則 $30-d+1$，$30+3$，$30+d+49$ 成等比數列，

所以 $\dfrac{33}{31-d}=\dfrac{79+d}{33}$，得 $d^2+48d-1360=0$，解得 $d=20$ 或 -68

故此三數為 10，30，50 或 98，30，-38

8. 一個面積為 4096 的正方形，先將其等分成 4 個相同的小正方形，並將右上角與左下角的兩個正方形塗成黑色，如第 1 圖；再將第 1 圖中左上角的正方形等分成 4 個相同的更小正方形，並將右上角與左下角的兩個更小的正方形塗成黑色，如第 2 圖。依此規律作成若干圖形：



第 1 圖　　第 2 圖　　第 3 圖

設 a_n 是第 n 圖中白色區域的面積，試求 a_5 的值

解 原正方形的面積減去黑色正方形面積，即為白色區域面積

觀察圖形規律得

$$a_1 = 4096\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=2048,$$

$$a_2 = 4096\times\left(1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\right)\right)=1536,$$

$$a_3 = 4096\times\left(1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{2}\right)\right)=1408,$$

$$a_4 = 4096\times\left(1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^3\times\frac{1}{2}\right)\right)=1376,$$

$$a_5 = 4096\times\left(1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^3\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^4\times\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$=4096\times\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{1\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{4}}\right)$$

$$=4096\times\frac{171}{512}$$

$$=1368$$

*9. 數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $\begin{cases} a_1 = 9 \\ a_n = a_{n-1} + 8n,\ n \ge 2 \end{cases}$

(1) 寫出 a_2, a_3, a_4

(2) 試推測此數列的一般項 a_n，並用數學歸納法證明

解 (1) $a_1 = 9$， $a_2 = a_1 + 8\times 2 = 9 + 16 = 25$

$a_3 = a_2 + 8\times 3 = 25 + 24 = 49$

$a_4 = a_3 + 8\times 4 = 49 + 32 = 81$

(2) 因為 $a_1 = 9 = 3^2$，

$a_2 = 25 = 5^2$，

$a_3 = 49 = 7^2$，

$a_4 = 81 = 9^2$，

所以推測 $a_n = (2n+1)^2$

證明如下：

① $n=1$ 時，$a_1 = 9 = (2\times 1+1)^2$，推測成立

② 設 $n=k$ 時，推測成立，即 $a_k = (2k+1)^2$，則 $n=k+1$ 時，

$a_{k+1} = a_k + 8(k+1) = (2k+1)^2 + 8k + 8 = 4k^2 + 12k + 9 = (2k+3)^2$

$= (2(k+1)+1)^2$，

所以 $n=k+1$ 時，推測也成立

故由數學歸納法可知，$a_n = (2n+1)^2$ 對所有正整數 n 均成立，此即數列的一般項

*10. 將正整數以順時針方向螺旋狀排列，如下圖所示，試求 200 的上、下、左、右各是什麼數？

21	22	23	24	25	26
20	7	8	9	10	27
19	6	1	2	11	28
18	5	4	3	12	
17	16	15	14	13	

解 觀察數字的排列方式得知

奇數的平方數，出現在以 1 為中心的正方形的右上角，如圖(一)

偶數的平方數，出現在以 $\begin{array}{|cc|}\hline 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ \hline\end{array}$ 為中心的正方形的左下角，如圖(二)

21	22	23	24	25	26
20	7	8	9	10	27
19	6	$\boxed{1}$	2	11	28
18	5	4	3	12	29
17	16	15	14	13	30
36	35	34	33	32	31

圖(一)

21	22	23	24	25	26
20	7	8	9	10	27
19	6	1	2	11	28
18	5	4	3	12	29
17	16	15	14	13	30
36	35	34	33	32	31

圖(二)

而最接近 200 的平方數為 $14^2 = 196$，因此，如圖(三)：

21	22	23	24	25	26
20	7	8	9	10	27
19	6	1	2	11	28
18	5	4	3	12	29
17	16	15	14	13	30
36	35	34	33	32	31

⋰

262	201	148	
261	200	147	
260	199	146	
259	198	145	144
258	197	196	195
257	256	255	254

圖(三)

故 200 的上、下、左、右各為 201、199、261、147