習題 4-3 解答

一、基本題

1. (1) 寫出集合｛1，2，3，4，5｝中所有含三個元素的部分集合。
   (2) 在 1，2，3 中選三個數，數字可以重複選，且不需要排列。試列出所有的方法。

解 (1) 集合｛1，2，3，4，5｝中所有含三個元素的部分集合有 $C_3^5=10$ 個，表列如下：

｛1，2，3｝,｛1，2，4｝,｛1，2，5｝,｛1，3，4｝,｛1，3，5｝,｛1，4，5｝,
｛2，3，4｝,｛2，3，5｝,｛2，4，5｝,｛3，4，5｝。

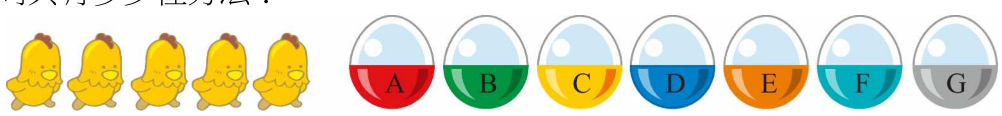
(2) 111，222，333，112，113，122，223，133，233，123。

2. (1) 平面上有 10 個點，任三點不共線，若將任兩點連線，試問共可畫出多少條直線？
   (2) 平面上畫 6 條相異直線最多可以出現幾個交點？

解 (1) $C_2^{10}=\dfrac{10\times 9}{2\times 1}=45$ 條。

(2) $C_2^6=15$ 個。

3. 小芬將五個相同的公仔放入 A，B，C，D，E，F，G 這七顆扭蛋裡，而且每顆扭蛋最多只能有一個公仔，試問共有多少種方法？



解 從 A，B，C，D，E，F，G 中選 5 顆扭蛋各放入一個公仔，故共有 $C_5^7=21$ 種方法。

4. (1) 試求 $(x+y)^6$ 的展開式。
   (2) 試求 $(x-3y)^7$ 的 x^4y^3 項係數。

解 (1) $x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$。

(2) $(x-3y)^7$ 的 x^4y^3 項係數為 $C_3^7\times(-3)^3=-945$。

5. (1) 若 $2C_2^n = C_3^n$，試求 n 值。

(2) 若 $C_{n-1}^n + C_2^n = 28$，試求 n 值。

解 (1) $2C_2^n = C_3^n$，

展開得 $2\times\dfrac{n\times(n-1)}{2\times1}=\dfrac{n\times(n-1)\times(n-2)}{3\times2\times1}$，

化簡得 $n-2=6$，故 $n=8$。

(2) $C_{n-1}^n + C_2^n = 28$，因為 $C_{n-1}^n = C_1^n$，所以原式化為 $C_1^n + C_2^n = 28$，

由巴斯卡公式知 $C_1^n + C_2^n = C_2^{n+1} = 28$，故 $n=7$。

二、進階題

6. 若 $(1+x)^n$ 的 x^4 項係數等於 x^8 項係數，試求 n 值。

解 因為 $C_4^n = C_8^n$，由巴斯卡三角形知 $n=4+8=12$。

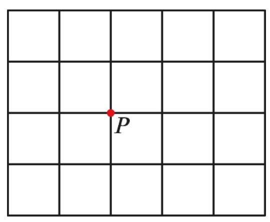
7. 一副撲克牌有 52 張，分為 A，K，Q，J，10，9，8，7，6，5，4，3，2 等數字及黑桃 ♠、紅心 ♥、梅花 ♣、方塊 ♦ 等花色，每張牌面由一個數字與一種花色組合而成，各張牌的組合均不相同。若從中選出 5 張，試問出現“鐵支”（形如 *aaaab* 的組合）有多少種方法？

解 先選 1 個數字，再從 4 種花色選 4 種出來（即 *aaaa* 的位置），共有 $C_1^{13}\times C_4^4$ 種方法。

另選 1 個數字，再從 4 種花色選 1 種出來（即 *b* 的位置），共有 $C_1^{12}\times C_1^4$ 種方法。

因此，根據乘法原理，拿到“鐵支”的組合共有 $C_1^{13}\times C_4^4\times C_1^{12}\times C_1^4 = 624$ 種。

8. 如右圖，在一個 4×5 的方格上，試問包含 P 點的矩形共有多少個？（P 點在矩形邊界上時是算“不包含”）
（提示：一個矩形是由兩條橫邊及兩條直線所圍出來的）



解 若要包含 P 點，則矩形的四個邊要分別選定，步驟如下：
在 P 點左方有 2 條縱向的線選擇 1 條，
在 P 點右方有 3 條縱向的線選擇 1 條，
在 P 點上方有 2 條橫向的線選擇 1 條，
在 P 點下方有 2 條橫向的線選擇 1 條，

故共有 $C_1^2\times C_1^3\times C_1^2\times C_1^2 = 24$ 個。

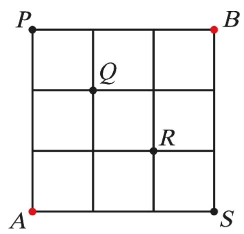
9. 設一列火車有七節車廂，車廂編號為 1，2，3，4，5，6，7。今有兩男兩女同時上火車，試問若此四人剛好選坐兩節車廂，而且是一男一女在一節車廂、另外一男一女選坐另一車廂，則有多少種選法？

解 先從 7 個車廂中選 2 個車廂，再分別將 2 個男生及 2 個女生排入車廂，因此，

有 $C_2^7\times 2!\times 2!=84$ 種選法。

三、挑戰題

10. (1) 如右圖的棋盤街道，試說明從 A 走最短路徑到 B 的方法數共有 C_3^6 種。



(2) 承(1)，從 A 走最短路徑到 B 的走法可分為 4 類，分別是由 A 先走到 P、Q、R、S 再走到 B，試說明其方法數分別為 $(C_0^3)^2$、$(C_1^3)^2$、$(C_2^3)^2$、$(C_3^3)^2$ 種。

(3) 由(1)、(2)得到 $C_3^6=(C_0^3)^2+(C_1^3)^2+(C_2^3)^2+(C_3^3)^2$

試以同樣的方法說明 $C_n^{2n}=(C_0^n)^2+(C_1^n)^2+(C_2^n)^2+\dots+(C_n^n)^2$

解 若是最短路徑，則每一步必定是“向上”或“向右”。

(1) 從 A 走最短路徑到 B 必須向上 3 次，向右 3 次。
可知“上上上右右右”的任何一種排列都相當於一條路線，換個角度思考，從 6 步中選 3 步走“上”，剩下的 3 步走“右”，也相當於一條路線，因此，方法數共有 C_3^6 種。

(2) 承(1)，由 A 走最短路徑到 B 的走法可分為 4 類，分別是由 A 先走到 P、Q、R、S 再走到 B，說明如下：

① A 到 P 必須向右 0 步，向上 3 步，有 C_0^3 種方法。接著，P 到 B 必須向右 3 步，向上 0 步，有 $C_3^3=C_0^3$ 種方法，所以此類有 $C_0^3\times C_0^3=(C_0^3)^2$ 種方法。

② A 到 Q 必須向右 1 步，向上 2 步，有 C_1^3 種方法。接著，Q 到 B 必須向右 2 步，向上 1 步，有 $C_2^3=C_1^3$ 種方法，所以此類有 $C_1^3\times C_1^3=(C_1^3)^2$ 種方法。

③ 同理，A 到 R 再到 B 有 $C_2^3\times C_2^3=(C_2^3)^2$ 種方法。

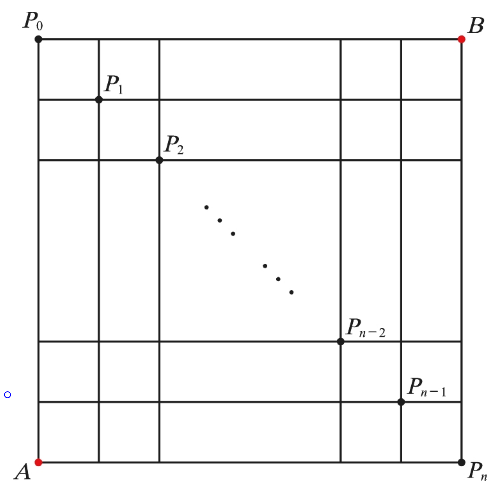
④ 同理，A 到 S 再到 B 有 $C_3^3\times C_3^3=(C_3^3)^2$ 種方法。

(3) 將(1)之圖形擴展成 $n\times n$ 的棋盤方格，如右圖。
從 A 走最短路徑到 B 必須向右 n 步，向上 n 步，

因此方法數為 C_n^{2n}。

也可分為 $n+1$ 類，分別由 A 先走到 P_0，P_1，P_2，…，P_{n-2}，P_{n-1}，P_n 再走到 B，
其方法數分別為

$(C_0^n)^2$，$(C_1^n)^2$，$(C_2^n)^2$，…，$(C_{n-2}^n)^2$，$(C_{n-1}^n)^2$，$(C_n^n)^2$。



故得 $C_n^{2n}=(C_0^n)^2+(C_1^n)^2+(C_2^n)^2+\dots+(C_n^n)^2$