

習題 4-2 解答

一、基本題

1. (1) 將 1, 2, 3, 4 的每個排列視為一個四位數，試以“由小到大的順序”寫出這 24 個四位數。
 (2) 承(1), 3142 是第幾個？

解 (1) 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432,
 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431,
 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421,
 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321。
 (2) 承(1), 3142 是第 14 個數。

2. 將一盒 12 枝不同顏色的彩色筆一枝一枝由左至右放回盒子裡，有多少種可能的排法？

解 $12! = 479001600$ 種。

3. (1) 將 ●, ●, ●, ●, ●, ●, ○, ○ 共八個圓圈排成一列，有多少種排法？
 (2) 將 a, a, b, b, b, c, c, c 共八個字母排成一列，有多少種排法？

解 (1) $\frac{8!}{6!2!} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28 = 28$ 種。
 (2) $\frac{8!}{2!3!3!} = 560$ 種。

4. 在牆上有如右的一排裝飾燈泡，每個燈泡可以出現紅、黃、綠三種顏色之一，則有多少種可能的顏色圖案？



解 八個燈泡，每個燈泡可以出現紅、黃、綠三種顏色之一，因此，有 $3^8 = 6561$ 種可能。

5. 今有 4 個男生及 3 個女生排成一列照相，若要求男生必須排在一起，女生亦須排在一起，則排法有多少種？

解 依題意可分為兩類：
 (1) 4 男排左邊，3 女排右邊有 $4! \times 3! = 144$ 種。
 (2) 3 女排左邊，4 男排右邊有 $3! \times 4! = 144$ 種。
 因此，共有 $144 + 144 = 288$ 種排法。

二、進階題

6. (1) 集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 有 4 種元素，試求此集合有多少個部分集合？並將全部列出來。
 (2) 試求 n 個元素的集合有多少個部分集合？

解 (1) 要決定 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的一個子集合，
 相當於看 1, 2, 3, 4 在或不在這個子集合中，

因此，利用乘法原理，得 $\{1, 2, 3, 4\}$ 共有 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$ 個子集合。

按照元素的個數做分類：

0 個元素的子集合有 \emptyset 。

1 個元素的子集合有 $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$ 。

2 個元素的子集合有 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$ 。

3 個元素的子集合有 $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$ 。

4 個元素的子集合有 $\{1, 2, 3, 4\}$ 。

(2) n 個元素的集合有 2^n 個子集合。

7. 今有 6 個人要排成一橫列照相，身高兩兩不同，但是身高較矮的不希望相鄰兩側的人都比他還高。試問排法有多少種？（提示：先考慮身高最矮的人）

解 先考慮身高最矮的人，因為其他人都比他高，所以他只能選擇最左側或最右側的位置，如下圖。

●□□□□□或□□□□□●

所以他有 2 種選擇，接著身高第 2 矮的人，同理也要選剩下的 5 個位置中的最左側或最右側，也有 2 種選擇，剩下的人依此類推，都有 2 種選擇，但最後，最高的人只剩 1 個位置可選，

故前 5 人都有 2 種選擇，最高的人只有 1 個選擇，因此，排法有 $2^5 \times 1 = 32$ 種。

8. 某遊戲有 A, B 兩條主線， A, B 兩線關卡全破之後才能進入王關。其中 A 線有 a, b, c, d 四個小關卡須依序完成， B 線有 x, y, z 三個小關卡也須依序完成，但 A, B 的各小關卡之間沒有其他先後順序的限制。例如 a, b, x, y, c, z, d 是一種可行的過關順序。試問進入王關前有多少種可行的過關順序？

解 將 A 主線的 a, b, c, d 先視為相同的 4 個○， B 主線的 x, y, z 先視為相同的 3 個□，
 將 4 個○與 3 個□作有相同物的排列，

再將 a, b, c, d 依序填入 4 個○中， x, y, z 依序填入 3 個□中，

因此，共有 $\frac{7!}{4!3!} = 35$ 種過關順序。

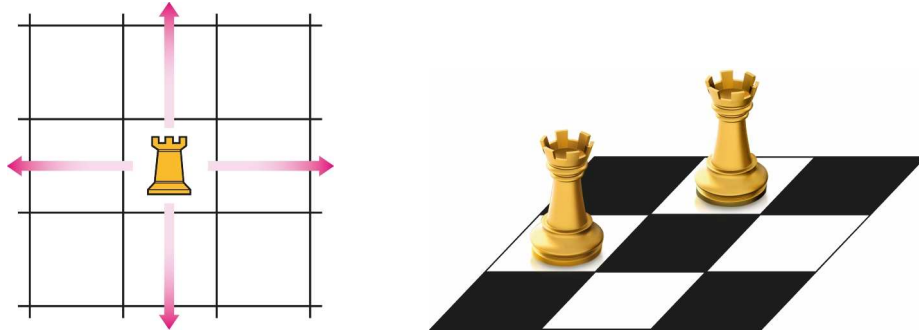
9. 一隻青蛙站在原點，每一步往左或往右跳一個單位長。已知青蛙跳了六步之後回到原點，試問青蛙跳的方法有多少種？

解 設青蛙往左跳 x 步，往右跳 y 步，則 $\begin{cases} x+y=6 \\ -x+y=0 \end{cases}$ ，得 $x=3, y=3$ ，

青蛙跳的方法相當於 3 個左加 3 個右的排列數，即 $\frac{6!}{3!3!} = 20$ 種。

三、挑戰題

10. 西洋棋的城堡可以攻擊同一列或同一行的任一位置（如同象棋的“車”），



試問：

- (1) 在 3×3 的棋盤上放 3 個不能互相攻擊的城堡有多少種方法？
（棋盤不能旋轉）
- (2) 在 3×3 的棋盤上放 2 個不能互相攻擊的城堡有多少種方法？
（棋盤不能旋轉）

解 (1) 先在第一列中選 1 行放城堡，有 3 種選擇，接著在第二列中只剩 2 行可選放城堡，而第三列只剩 1 行可選，故有 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 種方法。

(2) 先在三列中挑兩列來放城堡，可能是第一、二列或第一、三列或第二、三列，有 3 種選擇，其中一列有 3 種放法，另一列剩 2 種放法，故有 $3 \times 3 \times 2 = 18$ 種方法。