第 *2* 章　數列與級數

2-1 數　列

基礎題

1. 試觀察下列數列的規律性，並依此規律寫出下列數列的一般項 a_n：

(1) 2，4，6，8，10，⋯⋯，則 a_n＝？

(2) 1，4，9，16，25，⋯⋯，則 a_n＝？

(3) $\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$，$\frac{5}{6}$，⋯⋯，則 a_n＝？

解 (1) 原數列⇨ 2×1，2×2，2×3，2×4，2×5，⋯⋯　∴ $a_n=2n$

(2) 原數列⇨ 1^2，2^2，3^2，4^2，5^2，⋯⋯　∴ $a_n=n^2$

(3) 此數列的分母都比分子多 1　∴ $a_n=\dfrac{n}{n+1}$

2. 已知等差數列 $\langle a_n\rangle$ 的首項為 3，公差為 2，試求：

(1) 第 n 項 a_n＝？

(2) 73 為第幾項？

解 (1) $a_n=3+2(n-1)=2n+1$

(2) 承(1)，$2n+1=73$，得 $n=36$，所以 73 是第 36 項

3. (1) 已知等比數列 $\langle a_n\rangle$ 的首項為 4，公比為 2，則 1024 為第幾項？

(2) 已知等比數列 $\langle a_n\rangle$ 的公比是正實數，且 $a_2=6$，$a_4=24$，試求 a_{10} 及一般項 a_n

解 (1) $a_n=4\times 2^{n-1}$，令 $4\times 2^{n-1}=1024$，得 $n=9$

故 1024 是第 9 項

(2) 設首項為 a_1，公比為 r，且 $r>0$，則

$$\begin{cases} a_2=a_1r=6\text{L L L L L L } ① \\ a_4=a_1r^3=24\text{L L L L L } ② \end{cases}$$

由 $\dfrac{②}{①}$ 得 $r^2=4$，因為 $r>0$，所以 $r=2$，代入①得 $a_1=3$

因此，$a_{10}=a_1r^9=3\times 2^9=1536$，一般項 $a_n=a_1r^{n-1}=3\times 2^{n-1}$

4. 已知 3，x，y，18 四正數中，前三數成等比數列，後三數成等比數列，試求 x，y 的值

解　因為 3，x，y 成等比數列，x，y，18 成等差數列

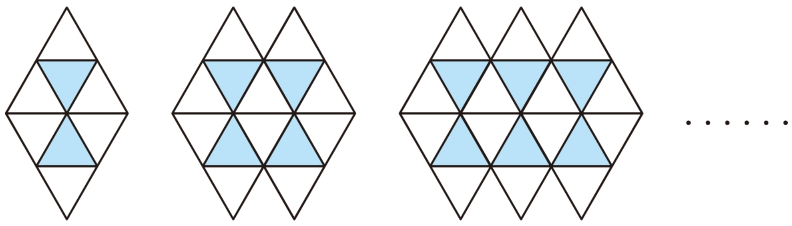
所以 $\begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{x} \\ y - x = 18 - y \end{cases}$，得 $\begin{cases} x^2 = 3y & ① \\ 2y = x + 18 & ② \end{cases}$

由①得 $y = \dfrac{1}{3}x^2$ 代入②，整理得 $2x^2 - 3x - 54 = 0$

解得 $x = 6$ 或 $-\dfrac{9}{2}$，但 x 為正數，因此 $x = 6$

代入①得 $y = 12$，故 $x = 6$，$y = 12$

5. 用藍、白正三角形磁磚依照如下的規律拼成若干圖形：



第 1 圖　　第 2 圖　　第 3 圖

設 a_n 是第 n 圖中白色正三角形磁磚的總數

(1) 寫出數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴式

(2) 試求 a_n

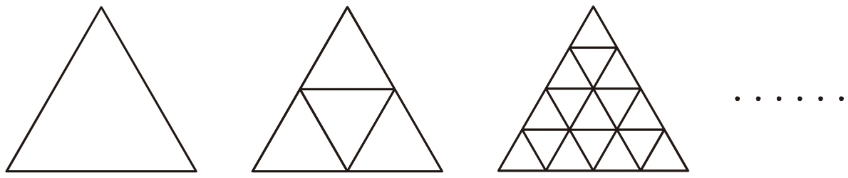
解　觀察題圖可知，$a_1 = 6$，$a_2 = 10$，$a_3 = 14$，且
a_{n-1} 的圖加上 4 個白色正三角形，2 個藍色正三角形，就可得到 a_n 的圖
因此，

(1) $\langle a_n \rangle$ 的遞迴式為 $\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_n = a_{n-1} + 4，n \geq 2 \end{cases}$

(2) $\langle a_n \rangle$ 是一個首項為 6，公差為 4 的等差數列

因此，$a_n = 6 + 4(n-1) = 4n + 2$

6. 將圖中的正三角形等分成 4 個相同的正三角形；接著再將 4 個小正三角形分別等分成 4 個相同的正三角形，重複這樣的步驟，如下圖所示：



第 1 圖　　第 2 圖　　第 3 圖

設 a_n 為第 n 圖中最小正三角形的總數

(1) 試求 a_1，a_2，a_3

(2) 寫出數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴式

(3) 試求 a_n

解 (1) $a_1=1$，$a_2=4$，$a_3=16$

(2) 由題圖知，第 n 圖中的最小正三角形總數是第 $n-1$ 圖中的 4 倍

因此，$\langle a_n \rangle$ 的遞迴式為 $\begin{cases} a_1=1 \\ a_n=4a_{n-1}\ ,\ n\geq 2 \end{cases}$

(3) $\langle a_n \rangle$ 是首項為 1，公比為 4 的等比數列

因此，$a_n=1\times 4^{n-1}=4^{n-1}$

7. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴式為 $\begin{cases} a_1=2 \\ a_n=a_{n-1}+2n\ ,\ n\geq 2 \end{cases}$，試求 a_4 及一般項 a_n

解 由定義可知 $a_2=a_1+2\times2=2+4=6$，$a_3=a_2+2\times3=6+6=12$

故 $a_4=a_3+2\times4=12+8=20$

由

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \cancel{a_1} & = & 2 \\
 & \cancel{a_2} & = & \cancel{a_1}+2\times2 \\
 & \cancel{a_3} & = & \cancel{a_2}+2\times3 \\
 & & \vdots & \\
 & \cancel{a_{n-1}} & = & \cancel{a_{n-2}}+2\times(n-1) \\
+) & a_n & = & \cancel{a_{n-1}}+2\times n \\
\hline
\end{array}
$$

$$\Rightarrow a_n=2(1+2+3+\cdots\cdots+n)=2\times\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1)$$

$n=1$ 代入得 $a_1=1\times(1+1)=2$ 成立

故一般項 $a_n=n(n+1)$

8. 設 $\langle a_n \rangle$ 是等差數列且共有 19 項，滿足公差 $d>0$，$a_5+a_{15}=0$，則下列哪些選項正確？

(A) $a_1>0$　(B) $a_{19}>0$　(C) $a_{10}=0$
(D) $a_6+a_{14}>0$　(E) $a_9+a_{10}+a_{11}=0$

解 設首項為 a_1，公差為 $d>0$

$a_5+a_{15}=0 \Rightarrow (a_1+4d)+(a_1+14d)=0 \Rightarrow 2a_1+18d=0$

$\Rightarrow a_1+9d=0 \Rightarrow a_{10}=0$

(A) ×：$a_1=a_{10}-9d=-9d<0$

(B) ○：$a_{19}=a_{10}+9d=9d>0$

(C) ○

(D) ×：$a_6+a_{14}=(a_5+d)+(a_{15}-d)=a_5+a_{15}=0$

(E) ○：$a_9+a_{10}+a_{11}=(0-d)+0+(0+d)=0$

故選(B)(C)(E)

進階題

9. 數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1=3$，$a_n=2a_{n-1}-1$，$n\geq 2$，則：

(1) 試求出 a_2，a_3，a_4

(2) 試推測 $\langle a_n \rangle$ 一般項之通式。(以 n 表示之)

(3) 利用數學歸納法驗證(2)之推測是正確的

解 (1) $a_2=2\times a_1-1=2\times 3-1=5$，
$a_3=2\times a_2-1=2\times 5-1=9$，
$a_4=2\times a_3-1=2\times 9-1=17$

(2) 由(1)可推測 $a_n=2^n+1$

(3) ① 當 $n=1$ 時，$a_1=2^1+1=3$，推測成立

② 設 $n=k$ 時，$a_k=2^k+1$ 推測成立

則 $n=k+1$ 時，

$a_{k+1}=2\times a_k-1=2(2^k+1)-1=2^{k+1}+1$ 推測亦成立

故由數學歸納法可知，對任意正整數 n，$a_n=2^n+1$ 恆成立

10. 試證明：$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$，對所有正整數 n 均成立。

證 (1) 當 $n=1$ 時，左式$=1\times2=2$，右式$=\dfrac{1\times2\times3}{3}=2$，原式成立

(2) 設 $n=k$ 時原式成立

即 $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots\cdots+k(k+1)=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}$

則 $n=k+1$ 時，

左式$=1\times2+2\times3+3\times4+\cdots\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)$

$=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$

$=\dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}=$右式

所以 $n=k+1$ 時，原式也成立

故由數學歸納法可知，原式對所有正整數 n 均成立