2-2 級　數

例題 1 等差級數前 n 項、求和

已知等差級數 5＋8＋11＋14＋……

(1) 試寫出此級數所形成的前 6 項級數形式

(2) 試求此級數前 6 項之和

解 (1) 首項為 5，公差 $d=8-5=3$

∴前 6 項為 5＋8＋11＋14＋17＋20

(2) 前 6 項之和為

$S_6=5+8+11+14+17+20$

$=75$

例題 2 等差級數求和公式的應用(一)

試求下列等差級數的和：

(1) 首項為 7，公差為 3，求前 12 項和

(2) 首項為 12，末項為 46，共有 18 項

解 (1) 首項為 7，公差為 3

故前 12 項之和為

$$S_{12}=\frac{12[2\times7+(12-1)\times3]}{2}=6\times(14+33)=282$$

(2) 由已知代入求和公式

$$S_{18}=\frac{18(12+46)}{2}=9\times58=522$$

例題 3 等差級數求和公式的應用(二)

已知等差級數 $2+8+14+20+\cdots\cdots+80$。試求：

(1) 此級數的首項、公差、項數

(2) 56 是此級數的第幾項？

(3) 此級數之和

解 設此級數的首項為 a_1，公差為 d，項數為 n

(1) $a_1=2$，$d=8-2=6$

$80=a_1+(n-1)d$

$=2+(n-1)\times 6=6n-4$

解得 $n=14$

故首項為 2，公差為 6，項數為 14

(2) 設 56 是第 k 項

則 $56=a_1+(k-1)d$

$=2+(k-1)\times 6=6k-4$

⇨ $6k=60$ ⇨ $k=10$

故 56 是第 10 項

(3) 此級數首項為 2，末項為 80，項數為 14

代入求和公式得 $\dfrac{14(2+80)}{2}=7\times 82=574$

故此級數之和為 574

例題 4 等比級數前 n 項、求和

已知等比級數 $3-6+12-24+\cdots\cdots$。

(1) 試寫出此級數所形成的前 6 項級數形式

(2) 試求此級數前 6 項之和

解 (1) 首項為 3，公比 $r=\dfrac{-6}{3}=-2$

∴前 6 項為 $3-6+12-24+48-96$

(2) 前 6 項之和為

$S_6=3-6+12-24+48-96$

$=(3+12+48)-(6+24+96)$

$=63-126$

$=-63$

例題 5 等比級數求和公式的應用(一)

試求下列等比級數的和：

(1) 首項為 8，公比為 $\frac{3}{2}$，求前 6 項和

(2) 首項為 3，末項為 384，共有 8 項

解 (1) 首項為 8，公比為 $\frac{3}{2}$

故前 6 項和為 $S_6=\dfrac{8\times\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^6\right]}{1-\frac{3}{2}}=\dfrac{8\times\left(1-\frac{729}{64}\right)}{-\frac{1}{2}}=-16\times\left(-\frac{665}{64}\right)=\frac{665}{4}$

(2) 設公比為 r

由已知得 $384=3\times r^7$ ⇨ $r^7=128=2^7$

$\therefore\ r=2$

故此級數和為 $\dfrac{3\times(1-2^8)}{1-2}=-3\times(1-256)=-3\times(-255)=765$

例題 6 等比級數求和公式的應用(二)（可使用計算機輔助計算）

已知等比級數 $2+6+18+54+\cdots\cdots+39366$。試求：

(1) 此級數的首項、公比、項數

(2) 4374 是此級數的第幾項？

(3) 此級數之和。

解 設此級數的首項為 a_1，公比為 r，項數為 n

(1) $a_1=2$，$r=\frac{6}{2}=3$

$39366=2\times 3^{n-1}$

⇨ $3^{n-1}=19683=3^9$

⇨ $n-1=9$ ⇨ $n=10$

故此級數首項為 2，公比為 3，項數為 10

(2) 設 4374 是第 k 項，

則 $4374=2\times 3^{k-1}$ ⇨ $3^{k-1}=2187=3^7$ ⇨ $k-1=7$ ⇨ $k=8$

故 4374 是第 8 項

(3) 此級數之和為

$\dfrac{2\times(1-3^{10})}{1-3}=-(1-3^{10})=3^{10}-1=59049-1=59048$

例題 7　求和公式的應用(一)

試求下列各級數和：

(1) 13＋14＋15＋16＋……＋87

(2) $30^2+29^2+28^2+27^2+\cdots\cdots+1^2$

解 (1) 13＋14＋15＋16＋……＋87

$=(1+2+3+\cdots\cdots+87)-(1+2+3+\cdots\cdots+12)$

$=\dfrac{87\times(1+87)}{2}-\dfrac{12\times(1+12)}{2}$

$=3828-78$

$=3750$

(2) $30^2+29^2+\cdots\cdots+1^2$

$=1^2+2^2+\cdots\cdots+29^2+30^2$

$=\dfrac{30\times31\times61}{6}=9455$

例題 8　求和公式的應用(二)

試求下列各級數和：

(1) 113＋123＋133＋143＋……＋203

(2) $(1^2-6)+(2^2-7)+(3^2-8)+\cdots\cdots+(10^2-15)$

解 (1) $11^3+12^3+13^3+\cdots\cdots+20^3$

$=(1^3+2^3+\cdots\cdots+20^3)-(1^3+2^3+\cdots\cdots+10^3)$

$=\left(\dfrac{20\times21}{2}\right)^2-\left(\dfrac{10\times11}{2}\right)^2$

$=210^2-55^2$

$=44100-3025$

$=41075$

(2) $(1^2-6)+(2^2-7)+(3^2-8)+\cdots\cdots+(10^2-15)$

$=(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+10^2)-(6+7+8+\cdots\cdots+15)$

$=\dfrac{10\times11\times21}{6}-\dfrac{10\times(6+15)}{2}$

$=385-105$

$=280$

例題 9　求和公式的應用(三)（可使用計算機輔助計算）

計算下列各級數的和：

(1) $2\times1+3\times2+4\times3+\cdots\cdots+10\times9$

(2) $2\times2+4\times3+6\times4+\cdots\cdots+30\times16$

解 (1) 觀察此級數的第 k 項
發現它們的乘號左右各自有其規律，
形式為 $(k+1)\times k=k^2+k$，$k=1,2,\cdots\cdots,9$
故 $2\times1+3\times2+4\times3+\cdots\cdots+10\times9$

$$=(1+1)\times1+(2+1)\times2+(3+1)\times3+\cdots\cdots+(9+1)\times9$$
$$=(1^2+1)+(2^2+2)+(3^2+3)+\cdots\cdots+(9^2+9)$$
$$=(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+9^2)+(1+2+3+\cdots\cdots+9)$$
$$=\frac{9\times10\times19}{6}+\frac{9\times10}{2}$$
$$=285+45=330$$

(2) 同(1)，此級數第 k 項為 $2k(k+1)=2k^2+2k$，$k=1,2,\cdots\cdots,15$
故 $2\times2+4\times3+6\times4+\cdots\cdots+30\times16$

$$=2\times1\times(1+1)+2\times2\times(2+1)+2\times3\times(3+1)+\cdots\cdots+2\times15\times(15+1)$$
$$=2\times(1^2+2^2+\cdots\cdots+15^2)+2(1+2+\cdots\cdots+15)$$
$$=2\times\frac{15\times16\times31}{6}+2\times\frac{15\times16}{2}$$
$$=2480+240=2720$$

例題 10　複利問題（等比級數問題，使用計算機輔助計算）

在低利率的年代，某銀行為了吸收存款，提出優惠方案，以月利率 0.1 % 複利孳息。社會新鮮人小雯打算每個月從薪水提撥固定的金額存入銀行，請幫小雯計算底下兩種方式的本利總和：

(1) 每個月初存入銀行 10000 元，存滿 6 年

(2) 每個月初存入銀行 12000 元，存滿 5 年

（四捨五入取到整數位）

解 (1) 6 年就是 72 個月
第一個月初存入的 10000 元，經過 72 個月複利孳息，成為 $10000(1+0.1\%)^{72}$ 元
第二個月初存入的 10000 元，經過 71 個月複利孳息，成為 $10000(1+0.1\%)^{71}$ 元
以此類推，直到最後一個月初存入的 10000 元，成為 $10000(1+0.1\%)^{1}$ 元
所以本利總和為

$$10000(1+0.1\%)^{72}+10000(1+0.1\%)^{71}+\cdots\cdots+10000(1+0.1\%)^{1}$$
$$=10000(1.001+1.001^2+\cdots\cdots+1.001^{72})$$
$$=10000\times\frac{1.001\times(1-1.001^{72})}{1-1.001}\approx746912.9962$$

本利總和約為 746913 元

(2) 5 年就是 60 個月，同(1)的討論
本利總和為

$$12000(1+0.1\%)^{60}+12000(1+0.1\%)^{59}+\cdots\cdots+12000(1+0.1\%)^{1}$$
$$=12000(1.001+1.001^2+1.001^3+\cdots\cdots+1.001^{60})$$
$$=12000\times\frac{1.001\times(1-1.001^{60})}{1-1.001}\approx742398.2142$$

本利總和約為 742398 元