4-4 機　率

例題 1 寫出試驗的樣本空間與樣本(一)

擲一枚硬幣 3 次，觀察出現的正反面並依序記錄。例如：以（正，正，正）的方式代表連續三次都出現正面。試寫出：

(1) 樣本空間
(2) 不可能事件
(3) 出現 2 次正面的事件
(4) 三次都是反面的事件

解 (1) S ＝{(正，正，正)，(正，正，反)，(正，反，正)，(正，反，反)，(反，正，正)，(反，正，反)，(反，反，正)，(反，反，反)}
(2) $\varnothing$（或{ }）
(3) {(正，正，反)，(正，反，正)，(反，正，正)}
(4) {(反，反，反)}

例題 2 寫出試驗的樣本空間與樣本(二)

擲一顆骰子一次，觀察出現的點數。試寫出：

(1) 基本事件
(2) 必然事件
(3) 出現偶數點數的事件
(4) 點數不大於 4 的事件

解 (1) {1}，{2}，{3}，{4}，{5}，{6}
(2) {1，2，3，4，5，6}
(3) {2，4，6}
(4) {1，2，3，4}

例題 3 事件的運算

擲一顆骰子一次，觀察出現的點數。令 S 表示這個試驗的樣本空間，A 表示點數不小於 4 的事件，B 表示出現偶數點的事件。試寫出：

(1) 事件 A
(2) 事件 B
(3) A 與 B 的和事件
(4) A 與 B 的積事件
(5) B 的餘事件

解 (1) A ＝{4，5，6}
(2) B ＝{2，4，6}
(3) $A\cup B$ ＝{2，4，5，6}
(4) $A\cap B$ ＝{4，6}
(5) B' ＝{1，3，5}

例題 4　古典機率基礎問題(一)：擲硬幣

擲 3 枚均勻硬幣一次，觀察出現的正反面，試求：

(1) 恰好一個正面的機率

(2) 至少一個反面的機率

解 設樣本空間為 S，恰好一個正面的事件為 A，至少一個反面的事件為 B，　$n(S)=2^3=8$

(1) $n(A)=C_1^3=3$　$\therefore\ P(A)=\dfrac{3}{8}$

(2) B' 表全無反面的事件 $n(B')=1$（3 個正面）

$\therefore\ P(B)=1-P(B')=1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$

例題 5　古典機率基礎問題(二)：擲骰子

擲 2 顆公正的骰子一次，計算其點數和，試求：

(1) 點數和為 6 的機率

(2) 點數和大於 3 的機率

解 $n(S)=6^2=36$

(1) $6=5+1=4+2=3+3=2+4=1+5$

點數和為 6 的事件為 $A=\{(5,1),(4,2),(3,3),(2,4),(1,5)\}$　$\therefore\ P(A)=\dfrac{5}{36}$

(2) 仿(1)的討論，我們利用取捨原理

點數和小於或等於 3 的事件為 $B=\{(2,1),(1,2),(1,1)\}$

$\therefore$所求為 $P(B')=1-P(B)=1-\dfrac{3}{36}=\dfrac{11}{12}$

例題 6　古典機率基礎問題(三)：抽取撲克牌

一副撲克牌有 4 種花色，各有 13 種點數，合計 52 張牌。小明從一副撲克牌中任意抽取 2 張，試求：

(1) 點數相同，花色不同的機率

(2) 花色相同，點數不同的機率

解 $n(S)=C_2^{52}$

(1) 點數相同花色不同有 $C_1^{13}\times C_2^4$ 種　$\therefore$機率為 $\dfrac{C_1^{13}\times C_2^4}{C_2^{52}}=\dfrac{\frac{13}{1}\times\frac{4\times3}{1\times2}}{\frac{52\times51}{1\times2}}=\dfrac{13\times4\times3}{52\times51}=\dfrac{1}{17}$

(2) 花色相同點數不同有 $C_1^4\times C_2^{13}$　$\therefore$機率為 $\dfrac{C_1^4\times C_2^{13}}{C_2^{52}}=\dfrac{\frac{4}{1}\times\frac{13\times12}{1\times2}}{\frac{52\times51}{1\times2}}=\dfrac{4\times13\times12}{52\times51}=\dfrac{4}{17}$

例題 7 古典機率基礎問題(四)：取球

袋中有 4 顆紅球與 3 顆白球，小雯依下列兩種方式取球，試求：

(1) 同時取 2 球，取到 1 紅球 1 白球的機率

(2) 同時取 4 球，取到 3 紅球 1 白球的機率

解 (1) $n(S)=C_2^7=21$

1 紅 1 白：$C_1^4\times C_1^3=12$

∴機率為 $\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$

(2) $n(S)=C_4^7=35$

3 紅 1 白：$C_1^4\times C_1^3=12$

∴機率為 $\frac{12}{35}$

例題 8 機率性質與取捨原理(一)

假設樣本空間 $S=\{0，1，2，3，4，5，6，7，8，9\}$，事件 $A=\{2，4，6，8\}$，$B=\{3，4，5，6，7\}$。試求：

(1) $P(A\cap B)$ (2) $P(A\cup B)$ (3) $P(A\cap B')$

解 (1) $A\cap B=\{4，6\}$，故得 $P(A\cap B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

(2) $A\cup B=\{2，3，4，5，6，7，8\}$，故得 $P(A\cup B)=\frac{7}{10}$

(3) $A\cap B'=\{2，4，6，8\}\cap\{0，1，2，8，9\}=\{2，8\}$，故得 $P(A\cap B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

〈另解〉

因為 $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B')$

代入得 $\frac{4}{10}=\frac{2}{10}+P(A\cap B)$，故 $P(A\cap B)=\frac{4}{10}-\frac{2}{10}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

例題 9　機率性質與取捨原理(二)

假設 S 為某試驗之樣本空間，A、B 為兩事件。若事件 A 或事件 B 發生的機率為 $\frac{5}{6}$，事件 A 與事件 B 均發生的機率為 $\frac{1}{6}$，事件 B 發生的機率為 $\frac{2}{3}$，試求：

(1) 事件 A 發生的機率
(2) 事件 A 發生且事件 B 不發生的機率

解 由題意知 $P(A\cup B)=\frac{5}{6}$，$P(A\cap B)=\frac{1}{6}$，$P(B)=\frac{2}{3}$

(1) $\because P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

代入得 $\frac{5}{6}=P(B)+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}$，解得 $P(A)=\frac{1}{3}$

(2) 事件 A 發生且事件 B 不發生的機率即為 $P(A\cap B')$

事件 A 發生可以分為「A 發生且 B 發生」與「A 發生且 B 不發生」

故得 $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B')$ 代入得 $\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+P(A\cap B')$

故 $P(A\cap B')=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$

例題 10　期望值

袋中裝有大小相同的紅球 2 顆、白球 2 顆，自袋中一次取出 2 球：

(1) 假設取出的 2 球顏色相同可得 20 元，顏色不同可得 10 元，試求此遊戲的期望值。
(2) 假設取出 2 紅球可得 50 元，2 白球可得 30 元，如果希望期望值為 0 元，則取出 2 球顏色不同時，應賠幾元？

解 $n(S)=C_2^4=6$

(1) 令事件 A 為 2 球顏色相同，事件 B 為 2 球顏色不同

$n(A)=C_2^2+C_2^2=2$　　$n(B)=C_1^2+C_1^2=4$

$\therefore$期望值為 $20\times\frac{2}{6}+10\times\frac{4}{6}=\frac{40}{3}$（元）

(2) 取到 2 紅球的機率為 $\frac{C_2^2}{6}=\frac{1}{6}$

取到 2 白球的機率為 $\frac{C_2^2}{6}=\frac{1}{6}$

取到 2 球顏色不同的機率為 $1-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)=\frac{4}{6}$

設所求為 x 元，則 $50\times\frac{1}{6}+30\times\frac{1}{6}-\frac{4x}{6}=0$

⇨ $\frac{80}{6}=\frac{4x}{6}$　　⇨ $x=20$

故應賠 20 元