

4-1 計數原理

例題 1 邏輯

試寫出下列敘述的否定敘述。

- (1) (擲一枚公正的骰子) 點數小於 3
- (2) (x 是實數) $3 < x < 8$

解 (1) 點數大於或等於 3
 (2) $x \leq 3$ 或 $x \geq 8$

例題 2 集合基本概念

集合 $S = \{a, b, c\}$, 試問:

- (1) S 有多少個元素?
- (2) 請依元素個數依序列出 S 的所有子集合

解 (1) $n(S) = 3$
 (2) 0 個: $\{\}$
 1 個: $\{a\}, \{b\}, \{c\}$
 2 個: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$
 3 個: $\{a, b, c\}$

例題 3 聯集與交集

集合 $A = \{x \mid 1 \leq x < 9\}$, $B = \{x \mid 4 < x \leq 12\}$, 試求:

- (1) $A \cap B$
- (2) $A \cup B$

解 (1) $A \cap B = \{x \mid 4 < x < 9\}$
 (2) $A \cup B = \{x \mid 1 \leq x \leq 12\}$

例題 4 差集與餘集

假設字集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$,

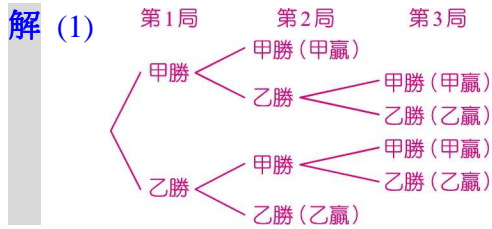
$B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, 試求:

- (1) A'
- (2) B'
- (3) $A - B$
- (4) $B - A$

解 (1) $A' = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{0, 2, 4, 6, 8\}$
 (2) $B' = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{0, 1, 8, 9\}$
 (3) $A - B = A - A \cap B$
 $= \{1, 3, 5, 7, 9\} - \{3, 5, 7\} = \{1, 9\}$
 (4) $B - A = B - B \cap A$
 $= \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{3, 5, 7\} = \{2, 4, 6\}$

例題 5 窮舉法 (樹狀圖)

- (1) 甲、乙兩人參加羽毛球比賽，規定 3 局 2 勝 (沒有和局) 者贏得比賽，請列出所有可能的比賽結果
- (2) A、B 兩校參加排球比賽，規定 5 局 3 勝者獲勝 (沒有和局)，已知第一、二局都由 A 校獲勝，試問接下來的比賽過程有幾種勝負情形？



(2) 已知 A 校 2 勝，故所求為 A 校再勝 1 次或 B 連勝 3 次



例題 6 加法原理

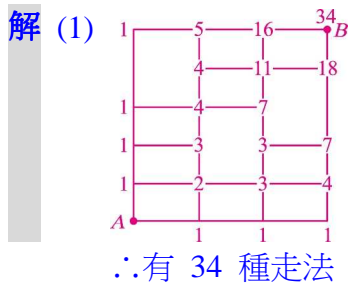
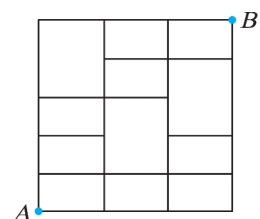
- (1) 翰翰旅行社推出 5 種日本深度遊，7 種歐洲浪漫行，3 種北美輕鬆遊，小雯打算利用暑假參加其中一種行程，共有幾種選擇？
- (2) 小華有 3 雙運動鞋，2 雙皮鞋，4 雙布鞋，試問小華出門時可以有幾種鞋子的選擇？

解 (1) $5+7+3=15$ (種)
 (2) $3+2+4=9$ (種)

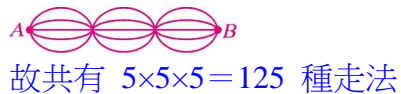
例題 7 加法原理與乘法原理

如右圖，從 A 點到 B 點依下列行進方式，各有幾種走法：

- (1) 只能向上或向右
- (2) 只能向上、向下或向右



(2) ∴ 可以向上、向下、向右
 ∴ 可視為如下圖形



例題 8 乘法原理

- (1) 翰翰旅行社推出 5 種日本深度遊，7 種歐洲浪漫行，3 種北美輕鬆遊，小慧打算就這三類行程各選一種行程參加，有幾種選擇？
- (2) 小偉有 2 頂不同的帽子，6 件不同的上衣，3 條不同的長褲，假設帽子可戴上也可不戴，試求任意搭配最多有幾種穿著方式？

解 (1) 各選一種行程， \therefore 有 $5 \times 7 \times 3 = 105$ 種選擇
 (2) \therefore 帽子可戴可不戴， \therefore 帽子有 3 種選擇
 故 $3 \times 6 \times 3 = 54$ (種)

例題 9 取捨原理

高一某班 42 人的段考成績，英文與數學至少一科及格者有 36 人，英文及格者有 30 人，數學及格者有 26 人，試問：

- (1) 英文、數學都及格者有多少人？
 (2) 英文、數學都不及格者有多少人？

解 設 U 、 E 、 M 分別代表全班、英文及格、數學及格的人所成的集合
 由題意知

$$n(U) = 42, n(E \cup M) = 36, n(E) = 30, n(M) = 26$$

(1) 由取捨原理得

$$n(E \cup M) = n(E) + n(M) - n(E \cap M)$$

$$\Rightarrow 36 = 30 + 26 - n(E \cap M)$$

$$\Rightarrow n(E \cap M) = 20$$

\therefore 英文、數學都及格者有 20 人

$$(2) n(E' \cap M') = n(E \cup M)'$$

$$= n(U) - n(E \cup M) = 42 - 36 = 6$$

\therefore 英文、數學都不及格者有 6 人

例題 10 乘法原理與取捨原理

用 0, 1, 2, 3, 4 排五位數，依下列規則，可以排幾個相異的五位數？

- (1) 數字可重複 (2) 數字不可重複

解 (1) 數字可重複

□□□□□

排五位數則最高位不可排 0

$$\therefore 4 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 2500 \text{ (種)}$$

(2) 數字不可重複，

$$\text{則有 } 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96 \text{ (種)}$$

〈另解〉(取捨原理)

(1) □□□□□

先任意排，得 $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 3125$

但 0 不可置最高位

$$0 \square \square \square \square : 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$

$$\therefore 3125 - 625 = 2500 \text{ (種)}$$

(2) □□□□□

先任意排，得 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

但 0 不可置最高位

$$0 \square \square \square \square : 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$\therefore 120 - 24 = 96 \text{ (種)}$$