

1-2 廣義角與極坐標

例題 1 同界角

- (1) 試求 750° 的同界角 θ ，其中 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$
 (2) 試求 -480° 的同界角 ϕ ，其中 $0^\circ \leq \phi < 360^\circ$

解 (1) $750^\circ = 30^\circ + 360^\circ \times 2$ ， $\therefore \theta = 30^\circ$

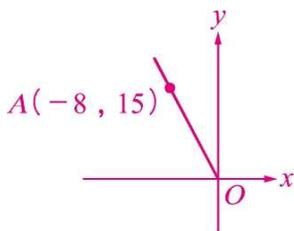
(2) $-480^\circ = 240^\circ + 360^\circ \times (-2)$ ， $\therefore \phi = 240^\circ$

例題 2 廣義角三角比(一) (標準位置角終邊一點的坐標)

- (1) 已知標準位置角 θ 終邊一點 A 坐標為 $(-8, 15)$ ，試求 $\sin \theta$ ， $\cos \theta$
 (2) 已知標準位置角 θ 終邊一點 P 坐標為 $(x, 3)$ ，且 $\cos \theta = \frac{3}{5}$ ，試求 x ， $\tan \theta$

解 (1) $r = \sqrt{(-8)^2 + 15^2} = 17$

$$\therefore \sin \theta = \frac{15}{17}, \quad \cos \theta = -\frac{8}{17}$$



(2) 令 $r = \sqrt{x^2 + 3^2}$

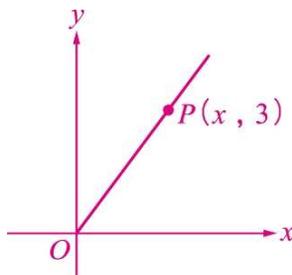
$$\text{則 } \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2 + 9} = \frac{9}{25} \Leftrightarrow 25x^2 = 9x^2 + 81$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 = 81 \Leftrightarrow x^2 = \frac{81}{16} \Leftrightarrow x = \pm \frac{9}{4}$$

但 $\cos \theta > 0$

$$\therefore x = \frac{9}{4}, \quad \tan \theta = \frac{3}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{3}$$



例題 3 廣義角三角比(二) (標準位置角終邊一點的坐標)

試求 $\sin 210^\circ$ ， $\cos 210^\circ$ ， $\tan 210^\circ$ 之值

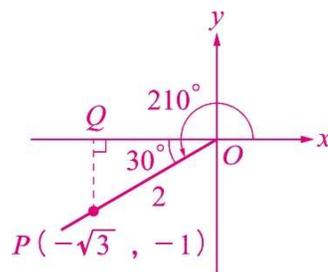
解 如右圖，在 210° 終邊取一點 P ，使得 $\overline{OP} = 2$

則 $\overline{PQ} = 1$ ， $\overline{OQ} = \sqrt{3}$ ， $\therefore P$ 坐標為 $(-\sqrt{3}, -1)$

$$\therefore \sin 210^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 210^\circ = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



例題 4 廣義角三角比(三) (使用計算機)

使用計算機求下列各三角比：(四捨五入取到小數點後第四位)

- (1) $\sin 143^\circ$ (2) $\cos 162^\circ 30'$ (3) $\tan (-108^\circ)$

解 (1) 按計算機得 $\sin 143^\circ \approx 0.601815023$

取近似值 0.6018

(2) 按計算機得 $\cos 162^\circ 30' \approx -0.95371695$

取近似值 -0.9537

(3) 按計算機得 $\tan (-108^\circ) \approx 3.077683537$

取近似值 3.0777

例題 5 $180^\circ - \theta$ 關係、 $90^\circ - \theta$ 關係、 $-\theta$ 關係

已知 θ 為銳角，且 $\sin \theta = 0.3$ ，試求：

- (1) $\sin (180^\circ - \theta)$ (2) $\cos (\theta - 90^\circ)$

解 (1) $\sin (180^\circ - \theta) = \sin \theta = 0.3$

(2) $\cos (\theta - 90^\circ) = \cos [-(90^\circ - \theta)]$
 $= \cos (90^\circ - \theta) = \sin \theta = 0.3$

例題 6 平方關係、商數關係

已知 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 且 $\sin \theta = \frac{2}{3}$ ，試求：

- (1) $\cos \theta$ (2) $\tan \theta$

解 (1) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1$

$$\therefore \cos^2 \theta = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$$

但 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ， $\therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$$(2) \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

例題 7 廣義角三角比(四) (同界角)

- (1) 試求 $\sin(-1590^\circ)$ 的值
- (2) 試求 $\cos 510^\circ$ 的值
- (3) 試求 $\tan 330^\circ$ 的值

解 (1) $\sin(-1590^\circ) = \sin[210^\circ + 360^\circ \times (-5)]$
 $= \sin 210^\circ$
 $= \sin[180^\circ - (-30^\circ)]$
 $= \sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

(2) $\cos 510^\circ = \cos(150^\circ + 360^\circ)$
 $= \cos 150^\circ$
 $= \cos(180^\circ - 30^\circ)$
 $= -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan 330^\circ = \tan(-30^\circ + 360^\circ)$
 $= \tan(-30^\circ)$
 $= -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

例題 8 圓上點的坐標

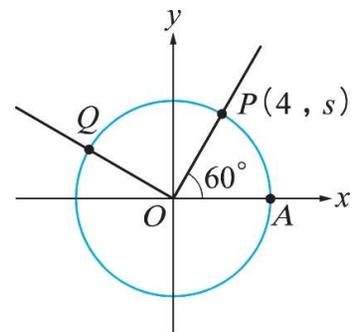
如右圖，圓 C 的圓心在原點 $O(0, 0)$ ， $\angle POA = 60^\circ$ ， P 點坐標為 $(4, s)$ ，試求：

- (1) s 值
- (2) 若 $\angle QOA = 150^\circ$ ，試求 Q 點坐標

解 (1) $\tan 60^\circ = \frac{s}{4} = \sqrt{3}$ ， $\therefore s = 4\sqrt{3}$

(2) 半徑 $r = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{64} = 8$

$\therefore Q$ 點坐標為 $(8 \cos 150^\circ, 8 \sin 150^\circ)$
 $= (8(-\cos 30^\circ), 8 \sin 30^\circ)$
 $= \left(-\frac{8\sqrt{3}}{2}, 8 \times \frac{1}{2}\right) = (-4\sqrt{3}, 4)$



例題 9 直線的斜角與兩直線的夾角（使用計算機）

已知兩直線方程式 $L_1: y=3x-2$ ， $L_2: x-2y+2=0$ 。試求：

- (1) 直線 L_1 的斜角
- (2) 直線 L_2 的斜角
- (3) L_1 與 L_2 的銳夾角

（使用計算機 \tan^{-1} 鍵計算角度，並四捨五入取到小數點後第一位）

解 L_1 斜率為 3， L_2 斜率為 $\frac{1}{2}$

$$\therefore \tan \theta_1 = 3, \tan \theta_2 = \frac{1}{2}$$

按計算機得

$$\theta_1 \approx 71.56505118^\circ \approx 71.6^\circ$$

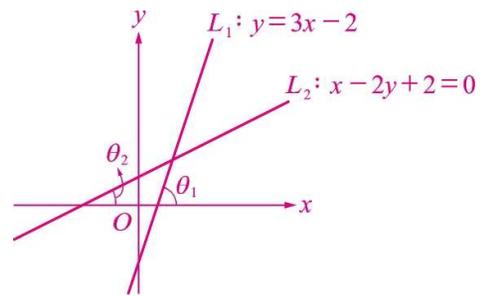
$$\theta_2 \approx 26.56505118^\circ \approx 26.6^\circ$$

$$\theta_1 - \theta_2 \approx 71.56505118^\circ - 26.56505118^\circ \approx 45.0^\circ$$

故(1) L_1 的斜角為 71.6°

(2) L_2 的斜角為 26.6°

(3) L_1 與 L_2 的銳夾角為 45.0°



例題 10 直角坐標與極坐標互換（使用計算機）

使用計算機做下列轉換：

- (1) 將直角坐標 $P(-5, 2)$ 轉換成極坐標表示。（角度介於 0° 至 360° 之間，四捨五入取到整數位）
- (2) 將極坐標 $Q[12, 230^\circ]$ 轉換為直角坐標。（四捨五入取到小數點後第一位）

解 (1) $r = \overline{OP} = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$ ， $\tan \theta = \frac{2}{-5}$

按計算機得

$$\theta \approx -21.80140949^\circ \approx -21.8^\circ$$

但 θ 在第二象限， $\therefore \theta \approx 180^\circ - 21.80140949^\circ \approx 158^\circ$

$$\therefore P[\sqrt{29}, 158^\circ]$$

(2) 將 $Q[12, 230^\circ]$ 轉換為 (x, y)

$$x = 12 \cos 230^\circ, y = 12 \sin 230^\circ$$

按計算機取近似值得 $x \approx -7.7, y \approx -9.2$

$$\therefore Q(-7.7, -9.2)$$

