

第 1 章 三角比

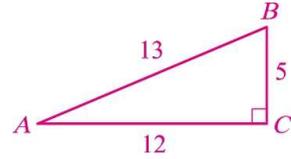
1-1 直角三角形的邊角關係

例題 1 直角三角形的三角比(一)

直角三角形 ABC 中， $\angle C=90^\circ$ ，兩股長 $\overline{BC}=5$ ， $\overline{AC}=12$ ，試求 $\sin A$ ， $\cos A$ ， $\tan A$ 。

解 由畢氏定理得 $\overline{AB}^2 = 5^2 + 12^2 = 169$ ， $\therefore \overline{AB} = 13$

$$\text{故 } \sin A = \frac{5}{13}, \cos A = \frac{12}{13}, \tan A = \frac{5}{12}$$



例題 2 直角三角形的三角比(二)

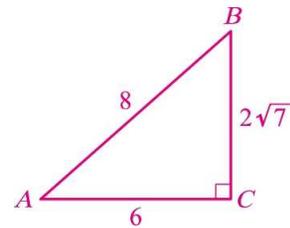
直角三角形 ABC 中， $\angle C=90^\circ$ ，斜邊 $\overline{AB}=8$ ， $\cos A = \frac{3}{4}$ ，試求：

- (1) \overline{AC} (2) $\tan A$

解 (1) 已知 $\cos A = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{8} = \frac{3}{4}$ ， $\therefore \overline{AC} = 6$

(2) 由畢氏定理得 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 28$ ， $\therefore \overline{BC} = 2\sqrt{7}$

$$\text{故 } \tan A = \frac{2\sqrt{7}}{6} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$



例題 3 商數關係

已知 θ 為銳角且 $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = 2$ ，試求 $\tan \theta$ 之值

解 已知 $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = 2$ ，移項得 $\sin \theta + \cos \theta = 2 \sin \theta - 2 \cos \theta$

$$\Rightarrow 3 \cos \theta = \sin \theta, \Rightarrow 3 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

故 $\tan \theta = 3$

例題 4 平方關係、商數關係

已知 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 且 $\cos \theta = \frac{3}{5}$ ，試求 $\sin \theta$ 與 $\tan \theta$

解 由平方關係 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ，得 $\sin^2 \theta + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$ ， $\therefore \sin^2 \theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

$$\Rightarrow \sin \theta = \pm \frac{4}{5}, \text{ 但負號不合, } \therefore \sin \theta = \frac{4}{5}$$

$$\text{由商數關係得 } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

例題 5 平方關係、餘角關係

直角三角形 ABC 中， $\angle C=90^\circ$ ，已知 $\cos A = \frac{5}{13}$ ，試求 $\sin A$ ， $\sin B$ ， $\cos B$

解 由平方關係得 $\sin^2 A + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1$

$$\Rightarrow \sin^2 A = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}, \Rightarrow \sin A = \pm \frac{12}{13}, \text{ 但負號不合, } \therefore \sin A = \frac{12}{13}$$

由餘角關係得 $\sin B = \sin(90^\circ - A) = \cos A = \frac{5}{13}$

$$\cos B = \cos(90^\circ - A) = \sin A = \frac{12}{13}$$

例題 6 平方關係

已知 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ，若 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{5}$ ，試求：

- (1) $\sin \theta \cos \theta$ (2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$

解 (1) $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{49}{25}$

$$\Rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{49}{25}$$

$$\Rightarrow 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{49}{25} \Rightarrow 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{24}{25}, \therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{12}{25}$$

$$(2) \sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) = \frac{7}{5} \times \left(1 - \frac{12}{25}\right) = \frac{91}{125}$$

例題 7 簡易恆等式

已知 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ，試證明： $\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = 2 \tan \theta$

證 $\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{\cos \theta(1 + \sin \theta) - \cos \theta(1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)}$

$$= \frac{\cos \theta + \sin \theta \cos \theta - \cos \theta + \sin \theta \cos \theta}{1 - \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{2 \sin \theta}{\cos \theta} = 2 \tan \theta$$

例題 8 使用計算機求三角比、角度

使用計算機求解下列各題：

(1) $\sin 23^\circ$ ， $\tan 71^\circ 30'$ 。(四捨五入取到小數點後第四位)

(2) 已知 $\sin \theta = 0.4$ ， $\cos \phi = 0.7$ ，試求 θ 與 ϕ 。(四捨五入取到小數點後第一位)

解 (1) 按計算機得 $\sin 23^\circ \approx 0.390731128$ ，取近似值 0.3907

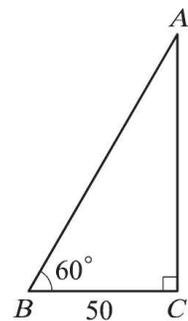
按計算機得 $\tan 71^\circ 30' \approx 2.988684963$ ，取近似值 2.9887

(2) 按計算機得 $\theta \approx 23.57817848$ ，取近似值 23.6°

按計算機得 $\phi \approx 45.572996$ ，取近似值 45.6°

例題 9 三角測量(一) (直角三角形的邊角關係)

如右圖，直角三角形 ABC 為一座三角公園的示意圖，已知其中一邊 \overline{BC} 長 50 公尺， $\angle ABC = 60^\circ$ ，試求此公園的周長為多少公尺？



解 $\cos 60^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{50}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$ ， $\therefore \overline{AB} = 100$

$\tan 60^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC}}{50} = \sqrt{3}$ ， $\therefore \overline{AC} = 50\sqrt{3}$

故 $\triangle ABC$ 周長 (即公園周長) 為 $100 + 50 + 50\sqrt{3} = 150 + 50\sqrt{3}$ (公尺) (約 236.6 公尺)

例題 10 三角測量(二) (直角三角形的邊角關係，使用計算機)

如右圖，將長度為 180 公分的竹竿的一端靠在右方牆上，測得另一端與地面夾角為 53° ，試求牆的高度約為多少公分？

(四捨五入取到小數點後第一位)

解 設牆高為 h 公分，則 $\sin 53^\circ = \frac{h}{180}$

$\Rightarrow h = 180 \sin 53^\circ \approx 180 \times 0.79863551 = 143.7543918$

取 $h \approx 143.8$

故牆的高度約為 143.8 公分

