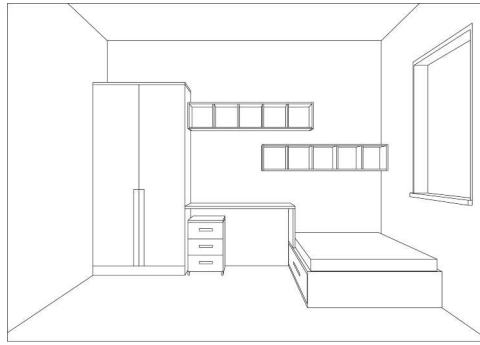


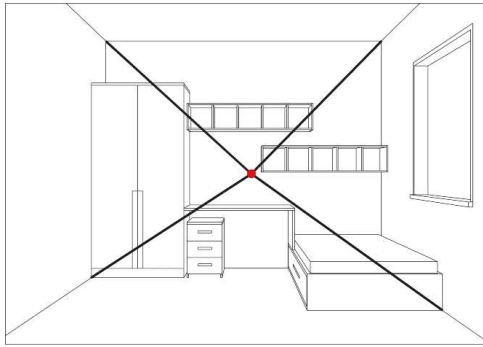
習題 3-3 解答

一、基本題

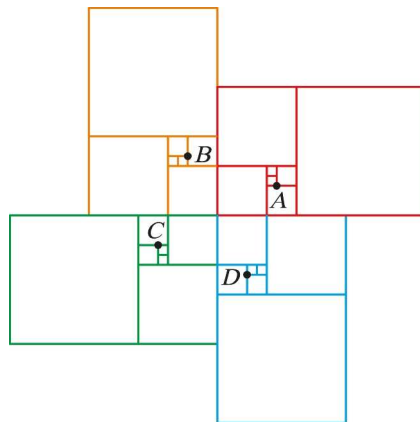
1. 下圖是利用單點透視法繪製的單點透視圖，請找出圖中的消失點。



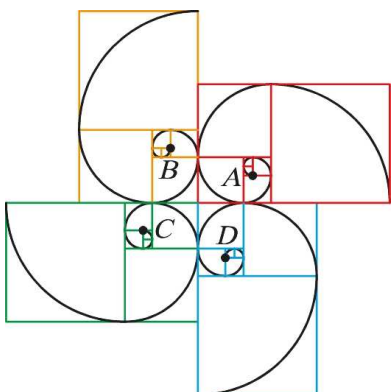
解



2. 分別在下圖中由 A 、 B 、 C 、 D 四點出發，利用圓規在其內部描繪以正方形邊長為半徑的四分之一圓弧，一直延續到每一個正方形的四條螺線。



解

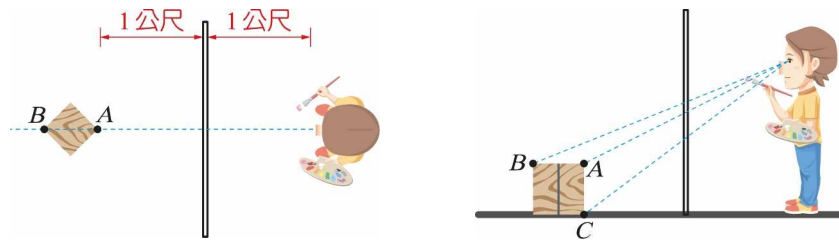


3. A 系列紙張的規格是將 A2 截一半得到 A3，再將 A3 截一半得到 A4。若已知 A3 紙張的長寬為 420×297 (單位：毫米)，試求 A2 紙張和 A4 紙張的長寬。

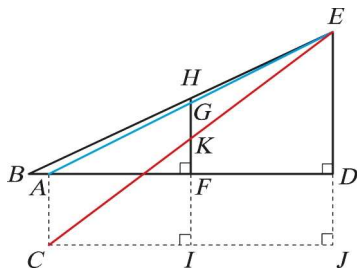
解 因為 $297 \times 2 = 594$ ，所以 A2 紙張的長寬為 594×420 (單位：毫米)

又 $\frac{420}{2} = 210$ ，所以 A4 紙張的長寬為 297×210 (單位：毫米)

例 4. 如下示意圖，某畫家的眼睛距離地面 1.5 公尺，長方體高 0.5 公尺，底部為正方形，邊長 0.1 公尺。此畫家在距離透明屏風 1 公尺的地方觀看正前方紅色箱子，且箱子也距離透明屏風 1 公尺處，試問箱子上 A、B、C 三點在屏風上對應的高度分別為多少公尺？(四捨五入至小數點後第二位)



解 設 E 點為畫家眼睛高度，G 點為 A 點在屏風上的位置，H 點為 B 點在屏風上的位置，K 點為 C 點在屏風上的位置



圖(一)

如圖(二)所示，

$$\frac{\overline{FG}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AD}}, \text{ 即 } \frac{\overline{FG}}{1} = \frac{1}{2},$$

得 $\overline{FG} = 0.5$ ， $0.5 + 0.5 = 1$ ，

故 A 點在屏風上對應的高度為 1 公尺。

如圖(三)所示， $\frac{\overline{FH}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BD}}$ ，

$$\text{即 } \frac{\overline{FH}}{1} = \frac{1 + 0.1 \times \sqrt{2}}{2 + 0.1 \times \sqrt{2}} \approx 0.533020441 \approx 0.53,$$

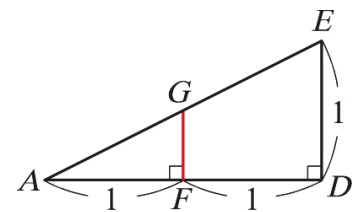
得 $\overline{FH} \approx 0.53$ ， $0.53 + 0.5 = 1.03$ ，

故 B 點在屏風上對應的高度約為 1.03 公尺。

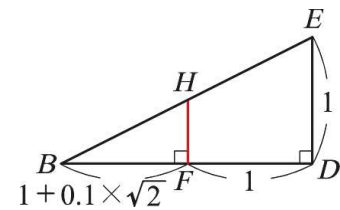
如圖(四)所示， $\frac{\overline{IK}}{\overline{JE}} = \frac{\overline{CI}}{\overline{CJ}}$ ，

$$\text{即 } \frac{\overline{IK}}{1.5} = \frac{1}{2}, \text{ 得 } \overline{IK} = 0.75,$$

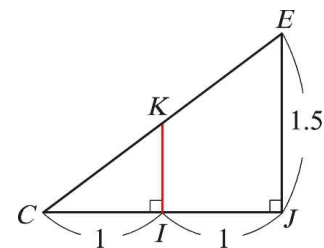
故 C 點在屏風上對應的高度為 0.75 公尺



圖(二)

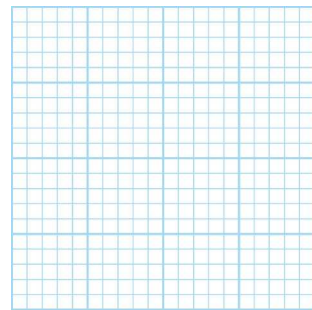
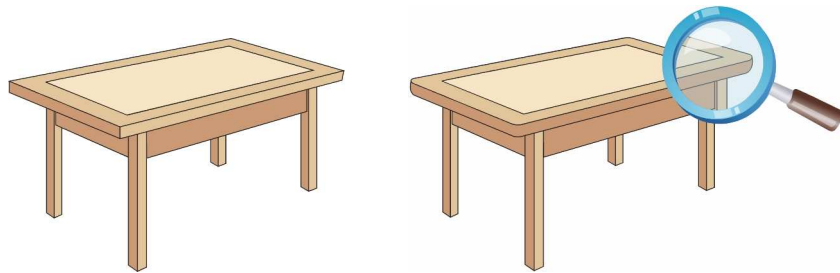


圖(三)



圖(四)

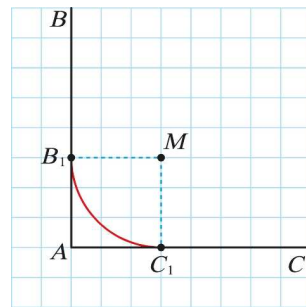
5. 木工師傅想要將圖中的垂直桌角改造成圓角的設計，他的想法是把角的頂點與兩邊之一部分置換成一段圓弧，使圓弧與角的兩射線“平滑”相接，也就是角的邊恰為圓的切線。他希望此圓弧的半徑為3公分，請你想想如何找出此圓弧的圓心？你可以幫木工師傅畫出設計圖嗎？



解 如右圖所示， $\angle BAC=90^\circ$ ，在 \overline{AB} 、 \overline{AC} 上分別取點 B_1 、 C_1 ，

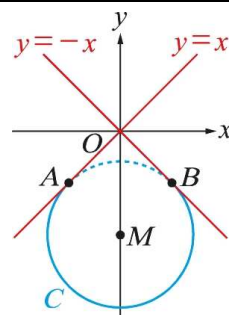
使得 $\overline{AB_1} = \overline{AC_1} = 3$ 公分，

接著分別過點 B_1 、 C_1 作直線 AB 、直線 AC 的垂線，其交點 M 即為此圓弧的圓心



二、進階題

6. 如右圖欲製作一個水滴設計圖，給定圓 C 的半徑為1，當圓 C 與兩直線 $y=\pm x$ 相切，設其圓心在 y 軸上，試求其圓心 M 與切點 A 、 B 的坐標。



解 如右圖所示，設 $\angle OMA = \theta$ ，

由直線 $y=x$ 的斜率為 1 得 $\tan \theta=1$ ，

可得 $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ， $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，

直角 $\triangle OAM$ 中， $\frac{\overline{AM}}{\overline{OM}} = \cos \theta$ ，即 $\frac{1}{\overline{OM}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，得 $\overline{OM} = \sqrt{2}$ 。

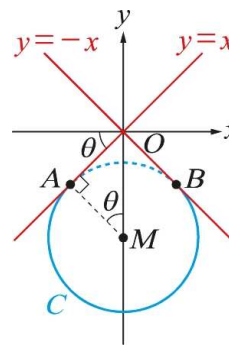
因此圓心 M 的坐標為 $(0, -\sqrt{2})$ 。

又直角 $\triangle OAM$ 中， $\frac{\overline{OA}}{\overline{AM}} = \tan \theta$ ，即 $\frac{\overline{OA}}{1} = 1$ ，得 $\overline{OA} = 1$ 。

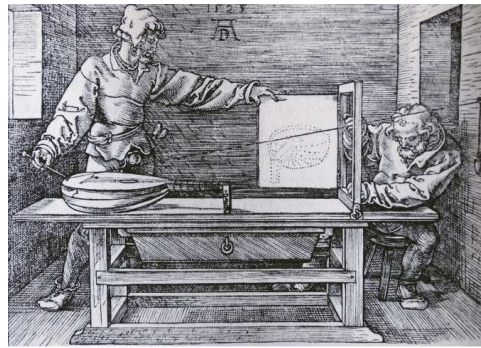
因此 A 點的坐標為

$$(1\cos(\pi + \theta), 1\sin(\pi + \theta)) = (-\cos\theta, -\sin\theta) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

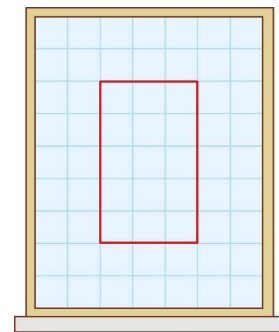
而 A 、 B 兩點對稱於 y 軸，故得 B 點坐標為 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



7. 透視法繪圖就像是透過無窮精細的紗帳看東西，這個面罩介於眼睛和物體之間，如此，物體的每一點都向我們的眼睛投射一束穿過紗帳或窗口的光線。如果我們在窗戶與畫之間畫上一個個交叉點，我們就能用極準確的透視法分析繪畫。以單點的透視方法，去觀察及計算景物在畫面出現的正確比例。

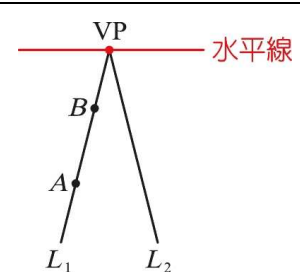


小甄透過書桌前窗戶觀察對面的大樓，發現正對面有一建築物描在窗戶上的圖形如右圖。她曾聽爸爸說建築物是 9 公尺寬，試求此建築物的高度為多少公尺？

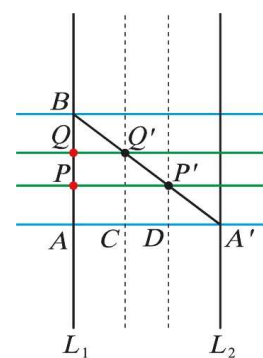


解 因為透視圖中建築物仍為長方形，所以透視圖中的長寬比即為建築物實際的長寬比，由透視圖中得建築物高與寬的比值為 $\frac{5}{3}$ ，因此建築物的高度為 $9 \times \frac{5}{3} = 15$ 公尺

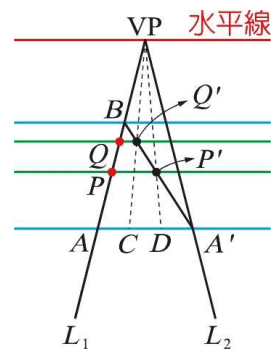
8. 如右圖所示， L_1, L_2 是單點透視圖中的兩平行線， A, B 是直線 L_1 上的兩個點，試作 \overline{AB} 的三等分點 P, Q 。



解 如圖(一)所示，在實物圖中 L_1, L_2 為鉛直線，
 過 A 點作水平線的平行線交 L_2 於 A' ，連接 $\overline{A'B}$ ，
 接著將 $\overline{AA'}$ 三等分，等分點為 C, D 。
 過 C, D 兩點分別作鉛垂線交 $\overline{A'B}$ 於 Q', P' ，
 過 P', Q' 分別作水平線的平行線交 \overline{AB} 於 P, Q 兩點，
 因為 $\overline{AB} \parallel \overline{CQ'} \parallel \overline{DP'}$ ，又 C, D 三等分 $\overline{AA'}$ ，
 由平行線截比例線段得 P', Q' 三等分 $\overline{A'B}$ ，
 因為 $\overline{AA'} \parallel \overline{PP'} \parallel \overline{QQ'}$ ，又 P', Q' 三等分 $\overline{A'B}$ ，
 由平行線截比例線段得 P, Q 三等分 \overline{AB} ，故點 P, Q 即為所求。
 如圖(二)所示，將上述步驟畫在透視圖中，設消失點為點 V ，
 過 A 點作水平線的平行線交 L_2 於 A' ，連接 $\overline{A'B}$ ，
 接著將 $\overline{AA'}$ 三等分，等分點為 C, D 。
 連接 $\overline{VC}, \overline{VD}$ 分別交 $\overline{A'B}$ 於 Q', P' ，
 過 P', Q' 分別作水平線的平行線交 \overline{AB} 於 P, Q 兩點，
 則點 P, Q 即為 \overline{AB} 的三等分點

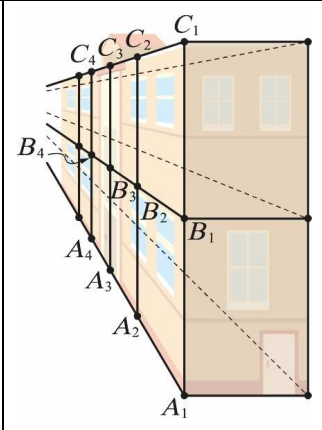


圖(一)



圖(二)

9. 右圖是一排兩層樓房的單點透視圖，已知 $\overline{A_2C_2} = 14.65$ ， $\overline{A_3C_3} = 11.48$ ，
 $\overline{B_1B_2} = 3.22$ ， $\overline{B_2B_3} = 1.91$ ，試問 $\overline{A_1C_1}$ 長為何？（四捨五入至小數點
 後第二位）



解

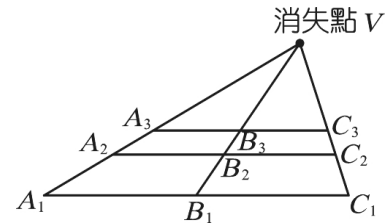
因為 $\overline{A_3C_3} \parallel \overline{A_2C_2}$ ，所以 $\frac{\overline{A_3C_3}}{\overline{A_2C_2}} = \frac{\overline{VA_3}}{\overline{VA_2}} = \frac{\overline{VB_3}}{\overline{VB_2}}$ ，

得 $\frac{11.48}{14.65} = \frac{\overline{VB_3}}{\overline{VB_3} + 1.91}$ ，則 $\overline{VB_3} \approx 6.916971609$ ，

因為 $\overline{A_3C_3} \parallel \overline{A_1C_1}$ ，所以 $\frac{\overline{A_3C_3}}{\overline{A_1C_1}} = \frac{\overline{VA_3}}{\overline{VA_1}} = \frac{\overline{VB_3}}{\overline{VB_1}}$ ，

得 $\frac{11.48}{\overline{A_1C_1}} \approx \frac{6.916971609}{6.916971609 + 1.91 + 3.22}$ ，

則 $\overline{A_1C_1} \approx 19.99418848 \approx 19.99$



10. 已知利用較高深的數學理論可以得到費氏數列的第 n 項公式是

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

- (1) 試驗證 $a_1 = 1$ ， $a_2 = 1$ ， $a_3 = 2$ ， $a_4 = 3$
- (2) 試利用計算機求出 a_{45} 的值

（提示： $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{45}$ 是非常小的數，同學們想想看是否可以略去）

解

$$(1) a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right) = 1,$$

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) = 1,$$

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^3 \right) = 2,$$

$$a_4 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^4 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^4 \right) = 3$$

$$(2) a_{45} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{45} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{45} \right) = 1134903170$$