習題 2-2 解答

一、基本題

1. 試求下列的值：

(1) $\log_7 49$　(2) $\log_3 \frac{1}{81}$　(3) $\log_5 \sqrt{5}$　(4) $2^{\log_2 3}$

解

(1) $\log_7 49 = \log_7 7^2 = 2$

(2) $\log_3 \frac{1}{81} = \log_3 3^{-4} = -4$

(3) $\log_5 \sqrt{5} = \log_5 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

(4) 若 $3 = 2^b$，則 $b = \log_2 3$

因此，$2^{\log_2 3} = 2^b = 3$

2. 試求下列的 x 值：

(1) $\log_2 x = 2$　(2) $\log_3 x = -2$　(3) $3^x = 2$

解

(1) 若 $x = 2^b$，則 $\log_2 x = b$

因此 $b = 2$，故 $x = 2^2 = 4$

(2) 若 $x = 3^b$，則 $\log_3 x = b$

因此 $b = -2$，故 $x = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

(3) 兩邊取常用對數得

$\log 3^x = \log 2$，則 $x\log 3 = \log 2$，

即 $x = \frac{\log 2}{\log 3}$　（$= \log_3 2$）

3. 試計算下列各式的值：

(1) $\log\left(1+\frac{1}{1}\right)+\log\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{1}{999}\right)$

(2) $\log_2 48 - \log_8 27 + \log_3 18 + \log_{\frac{1}{9}} 36$

(3) $\log\frac{4}{7} - \frac{4}{3}\log\sqrt{8} + \frac{2}{3}\log\sqrt{343}$

解

(1) $\log\left(1+\frac{1}{1}\right)+\log\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{1}{999}\right)$

$= \log\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{1000}{999}\right) = \log 1000 = 3$

(2) $\log_2 48 - \log_8 27 + \log_3 18 + \log_{\frac{1}{9}} 36 = \log_2 48 - \log_{2^3} 3^3 + \log_3 18 + \log_{3^{-2}} 6^2$

$= \log_2 48 - \log_2 3 + \log_3 18 - \log_3 6$

$= \frac{\log 48 - \log 3}{\log 2} + \frac{\log 18 - \log 6}{\log 3}$

$= \frac{\log 16}{\log 2} + \frac{\log 3}{\log 3} = 4 + 1 = 5$

(3) $\log\frac{4}{7}-\frac{4}{3}\log\sqrt{8}+\frac{2}{3}\log\sqrt{343}=\log\frac{4}{7}-\frac{4}{3}\log 2^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\log 7^{\frac{3}{2}}$

$=\log\frac{4}{7}-\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}\log 2+\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\log 7$

$=\log\frac{4}{7}-\log 2^2+\log 7=\log\frac{\frac{4}{7}\times 7}{2^2}=\log 1=0$

4. 試求下列各值：
(1) 設 $\log x=0.7782$，試求最接近 x 的整數
(2) 若 $\log_{0.25}x=-1.5$，試求 x 的值
(3) 已知 $a=\log 2$，$b=\log 6$，試以 a，b 表示 $\log\frac{1}{3}$

解
(1) $\log x=0.7782$ ⇨ $x=10^{0.7782}\approx 6.000673539$，故最接近 x 的整數為 6

(2) $\log_{0.25}x=-1.5$，即 $x=(0.25)^{-1.5}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$，得 $x=(2^{-2})^{-\frac{3}{2}}=8$

(3) $\log\frac{1}{3}=\log\frac{2}{6}=\log 2-\log 6=a-b$

5. 試問下列哪些選項正確？
(A) $\log_{(-2)}(-8)=3$
(B) $(\log_3 8)(\log_8 3)=1$
(C) $\log 11-\log 7=\frac{\log 11}{\log 7}$
(D) $\log 700-\log 600>\log 70-\log 60>\log 7-\log 6$
(E) $\frac{\log 32}{\log 16}=\frac{\log 16}{\log 8}$

解
(A) ×：底數須為正且不為 1，真數須為正

(B) ○：$(\log_3 8)(\log_8 3)=\frac{\log 8}{\log 3}\times\frac{\log 3}{\log 8}=1$

(C) ×：$\log 11-\log 7=\log\frac{11}{7}$

(D) ×：$\log 700-\log 600=\log\frac{700}{600}=\log\frac{7}{6}$，

$\log 70-\log 60=\log\frac{70}{60}=\log\frac{7}{6}$，

$\log 7-\log 6=\log\frac{7}{6}$，

故 $\log 700-\log 600=\log 70-\log 60=\log 7-\log 6$。

(E) ×：$\frac{\log 32}{\log 16}=\frac{5\log 2}{4\log 2}=\frac{5}{4}$，

$\frac{\log 16}{\log 8}=\frac{4\log 2}{3\log 2}=\frac{4}{3}$

故 $\frac{\log 32}{\log 16}\neq\frac{\log 16}{\log 8}$，故選(B)

二、進階題

6. 若 $\log_a 729$ 為正整數，則正整數 a 共有多少個？

解

$\log_a 729=n$，n 為正整數，即 $729=a^n$

又 $729=3^6$，故 $3^6=a^n$，

$(3)^6=(3^2)^3=(3^3)^2=(3^6)^1$，

故 $a=3$ 或 3^2 或 3^3 或 3^6，共 4 個

7. 若將 $\log_2 3x$ 表示成 $a\log x+b$ 的形式，試求實數 a，b

解

$$\log_2 3x=\frac{\log 3x}{\log 2}=\frac{\log 3+\log x}{\log 2}$$

$$=\left(\frac{1}{\log 2}\right)\log x+\left(\frac{\log 3}{\log 2}\right),$$

故 $a=\dfrac{1}{\log 2}$，$b=\dfrac{\log 3}{\log 2}$

8. 若 $x\log 5=1$，試求 5^x+5^{-x} 之值

解

由 $x\log 5=1$ 得 $\log 5^x=1$，

即 $5^x=10^1=10$，

所以 $5^x+5^{-x}=10+10^{-1}=\dfrac{101}{10}$

9. 設 x，y 為實數，且知 $\log x=5.6$，$\log y=2.4$。所求 $\log(x^2+y)$ 的值最接近哪個整數？

解

由 $\log x=5.6$ 得 $x=10^{5.6}$，

　$\log y=2.4$ 得 $y=10^{2.4}$，

$x^2+y=(10^{5.6})^2+10^{2.4}=10^{11.2}+10^{2.4}$

　$=10^{0.2}\times10^{11}+10^{0.4}\times10^2$，

因此 $10^{11.2}<x^2+y<10^{0.2}\times10^{11}+10^{0.1}\times10^{11}<10^{11.3}$，

即 $11.2<\log(x^2+y)<11.3$，

故最接近的整數為 11

三、挑戰題

10. 已知聲音的強度是每平方公尺多少能量（單位：W／m^2，W 為瓦特），若某一發聲體的強度為 I（W／m^2），將它換算成分貝 d 表示時，其公式為 $d(I)=10\log\frac{I}{I_0}$ $I_0=10^{-12}$（W／m^2）且噴射機起飛的聲音為 140 分貝，大聲喊叫的聲音為 90 分貝，試求多少人一起大喊時，可以和噴射機起飛時一樣大聲？

解

令 I_y 為一個人大聲喊叫的聲音強度，
則 n 個人一起大喊時的聲音強度為 nI_y。

由 $90=10\log\frac{I_y}{I_0}$，

$$140=10\log\frac{nI_y}{I_0}=10\left(\log n+\log\frac{I_y}{I_0}\right),$$

得 $140=10\log n+90$，
故 $\log n=5$，
即 $n=10^5$，
因此要有 10 萬人一起大喊才能與噴射機起飛一樣大聲