3-3 面積與二階行列式

■例題 1　兩個向量所張的平行四邊形、三角形面積（一）

(1) 設 $\vec{u}$，$\vec{v}$ 為平面上兩個向量且 $|\vec{u}|=6$，$|\vec{v}|=8$，$\vec{u}\cdot\vec{v}=24$，試求由 $\vec{u}$，$\vec{v}$ 所張成的平行四邊形面積。

(2) $\triangle ABC$ 中，已知 $|\overrightarrow{AB}|=4$，$|\overrightarrow{AC}|=3$，且$\triangle ABC$ 面積為 $2\sqrt{5}$，試求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 之值。

解 (1) 由 $\vec{u}$，$\vec{v}$ 所張成的平行四邊形面積為

$$\sqrt{|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}=\sqrt{36\times64-576}=\sqrt{1728}=24\sqrt{3}$$

(2) 由三角形面積公式得 $\frac{1}{2}\sqrt{16\times9-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=2\sqrt{5}$

移項得 $\sqrt{144-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=4\sqrt{5}$

兩邊平方得 $144-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2=80$

移項可得 $(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2=64$

故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\pm8$

■例題 2　兩個向量所張的平行四邊形、三角形面積（二）

(1) 試求由 $\vec{a}=(7,2)$，$\vec{b}=(3,4)$ 所張成的平行四邊形面積。

(2) 設$\triangle ABC$ 中三頂點坐標為 $A(3，0)$，$B(4，3)$，$C(6，1)$，試求$\triangle ABC$ 的面積。

解 (1) 由 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 所張成的平行四邊形面積為

$$\left|\begin{vmatrix}7&3\\2&4\end{vmatrix}\right|=|28-6|=22$$

(2) 因為 $\overrightarrow{AB}=(1,3)$，$\overrightarrow{AC}=(3,1)$

所以$\triangle ABC$ 面積為 $\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1&3\\3&1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|1\times1-3\times3|=4$

■例題 3　兩平行向量的行列式值為 0

(1) 已知平面上兩向量 $\overset{\vee}{a}=(2,3)$，$\overset{\vee}{b}=(4,6)$，判斷此二向量是否平行。

(2) 設兩向量 $\overset{\vee}{a}=(k-2,2)$，$\overset{\vee}{b}=(k+3,4)$，若 $\overset{\vee}{a}//\overset{\vee}{b}$，試求 k 值。

解 (1) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=12-12=0$，故 $\overset{\vee}{a}$ 與 $\overset{\vee}{b}$ 平行

(2) 因為 $\overset{\vee}{a}//\overset{\vee}{b}$，故 $\begin{vmatrix} k-2 & k+3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=0$

展開得 $4(k-2)-2(k+3)=0$ ⇨ $4k-8-2k-6=0$ ⇨ $2k=14$ ⇨ $k=7$

■例題 4　計算行列式值（一）

試求下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 11 & 9 \\ 9 & 8 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 400 & 600 \\ 2000 & 2400 \end{vmatrix}$

解 (1) $\begin{vmatrix} 11 & 9 \\ 9 & 8 \end{vmatrix}=88-81=7$ $=88-81=7$

(2) $\begin{vmatrix} 400 & 600 \\ 2000 & 2400 \end{vmatrix}=400\times600\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=240000\times(-1)=-240000$

■例題 5　計算行列式值（二）

試求下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 2018 & 2023 \\ 2020 & 2026 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 300 & 202 \\ 600 & 403 \end{vmatrix}$

解 (1) $\begin{vmatrix} 2018 & 2023 \\ 2020 & 2026 \end{vmatrix}$ ×（－1）

$=\begin{vmatrix} 2018 & 2023 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

$=6054-4046=2008$

(2) $\begin{vmatrix} 300 & 202 \\ 600 & 403 \end{vmatrix}$ ×（－2）

$=\begin{vmatrix} 300 & 202 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

$=-300$

■例題 6　行列式的性質

已知行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=8$，$\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}=5$，試求行列式 $\begin{vmatrix} a+3e & 2b \\ c+3f & 2d \end{vmatrix}$ 的值

解 $\begin{vmatrix} a+3e & 2b \\ c+3f & 2d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3e & 2b \\ 3f & 2d \end{vmatrix}$（依第一行將行列式拆成兩個）

$=2\times\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+3\times2\times\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$（各行提出公因數）

$=2\times8+3\times2\times5$

$=16+30$

$=46$

■例題 7 用向量的線性組合解二元一次方程組

解二元一次方程組 $\begin{cases} 2x+\ \ y=8 \\ \ \ x+3y=9 \end{cases}$

(1) 將此方程組表示為向量的線性組合形式

(2) 解此方程組

解 (1) 令 $\vec{a}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，$\vec{b}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$，$\vec{c}=\begin{bmatrix}8\\9\end{bmatrix}$

得 $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{c}$

(2) $\begin{cases} 2x+\ \ y=8\cdots\cdots ① \\ \ \ x+3y=9\cdots\cdots ② \end{cases}$

由①×3－②得 $5x=15$

⇨ $x=3$ 代入①得 $6+y=8$

解得 $y=2$

∴ $x=3$，$y=2$

■例題 8 用克拉瑪公式解二元一次方程組

利用克拉瑪公式，解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x+5y=9 \\ 4x-3y=5 \end{cases}$

解 $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 5\\4 & -3\end{vmatrix}=-6-20=-26$

$\Delta_x=\begin{vmatrix}9 & 5\\5 & -3\end{vmatrix}=-27-25=-52$

$\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 9\\4 & 5\end{vmatrix}=10-36=-26$

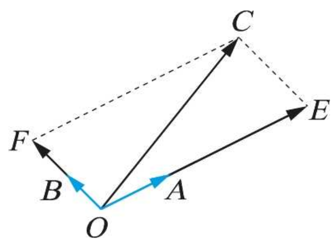
由克拉瑪公式得 $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{-52}{-26}=2$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{-26}{-26}=1$ ∴ $x=2$，$y=1$

■例題 9　克拉瑪公式的幾何意義

如右圖，已知 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$。設 $\overrightarrow{OE}=x\vec{a}$，$\overrightarrow{OF}=y\vec{b}$，且 $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{c}$。$\vec{a}$，$\vec{b}$ 所張的平行四邊形面積為 3，$\vec{a}$，$\vec{c}$ 所張成的平行四邊形面積為 6，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 所張的平行四邊形面積為 9，試求：

(1) x 值

(2) y 值



解　由克拉瑪公式的幾何意義可知

(1) $x=\dfrac{\vec{c}\,,\,\vec{b}\text{ 所張成的平行四邊形面積}}{\vec{a}\,,\,\vec{b}\text{ 所張成的平行四邊形面積}}=\dfrac{9}{3}=3$

(2) $y=\dfrac{\vec{a}\,,\,\vec{c}\text{ 所張成的平行四邊形面積}}{\vec{a}\,,\,\vec{b}\text{ 所張成的平行四邊形面積}}=\dfrac{6}{3}=2$

例題 10　二元一次方程組的解與平面上兩直線的關係

試就 a 之值，討論兩直線 L_1：$ax+y=1$ 與 L_2：$4x+ay=2$ 的幾何關係

解　$\Delta=\begin{vmatrix} a & 1 \\ 4 & a \end{vmatrix}=a^2-4=(a+2)(a-2)$

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix}=a-2$

$\Delta_y=\begin{vmatrix} a & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=2a-4=2(a-2)$

(1) $a\neq 2$ 且 $a\neq -2$ 時，

L_1 與 L_2 交於一點，坐標為 $\left(\dfrac{a-2}{(a+2)(a-2)},\dfrac{2(a-2)}{(a+2)(a-2)}\right)$

即 $(x,y)=\left(\dfrac{1}{a+2},\dfrac{2}{a+2}\right)$

(2) $a=2$ 時，

$\Delta=0$ 且$\Delta_x=0$，$\Delta_y=0$　∴兩線重合，方程式為 $2x+y=1$

(3) $a=-2$ 時，

$\Delta=0$ 但 $\Delta_x\neq 0$，$\Delta_y\neq 0$

L_1 與 L_2 平行