

2-2 對數與對數律

■例題 1 常用對數求值 (一)

試求下列各值：

(1) $\log 10000$

(2) $\log \sqrt[3]{100000}$

(3) $\log 10^{0.9425}$

解 (1) 因為 $10000 = 10^4$
所以 $\log 10000 = 4$

(2) 因為 $\sqrt[3]{100000} = 10^{\frac{5}{3}}$

所以 $\log \sqrt[3]{100000} = \frac{5}{3}$

(3) 顯然 $\log 10^{0.9425} = 0.9425$

■例題 2 常用對數求值 (二) 使用計算機

使用計算機求下列各值：(四捨五入至小數點後第四位)

(1) $\log 23$

(2) $\log 2631188$

(3) $\log 3.1415926$

(4) $\log 200000$

解 使用計算機，先按數值(真數)再按 $\boxed{\log}$ 鍵即可

(1) $\log 23 \approx 1.361727836 \approx 1.3617$

(2) $\log 2631188 \approx 6.42015188 \approx 6.4202$

(3) $\log 3.1415926 \approx 0.497149865 \approx 0.4971$

(4) $\log 200000 \approx 5.301029996 \approx 5.3010$

例題 3 對數基本性質

試求下列各式的值：

(1) $\log 2 + \log 50$

(2) $\log 35 - \log 14 + \log 40$

解 (1) $\log 2 + \log 50 = \log 100 = 2$

(2) $\log 35 - \log 14 + \log 40$

$$= \log \frac{35 \times 40}{14}$$

$$= \log 100$$

$$= 2$$

例題 4 一般對數 (一)

試求下列各對數的值：

(1) $\log_3 9$

(2) $\log_7 1$

(3) $\log_5 0.04$

解 (1) 因為 $3^2 = 9$ ，所以 $\log_3 9 = 2$

(2) 因為 $7^0 = 1$ ，所以 $\log_7 1 = 0$

(3) $0.04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 5^{-2}$

$$\therefore \log_5 0.04 = \log_5 5^{-2} = -2$$

■例題 5 一般對數 (二)

試求下列各對數的值：

(1) $\log_{\frac{1}{4}} 32$

(2) $\log_2 \frac{1}{16\sqrt{2}}$

(3) $\log_3 \sqrt[3]{\frac{1}{27}}$

解 (1) $\log_{\frac{1}{4}} 32 = \log_{2^{-2}} 2^5 = \frac{\log 2^5}{\log 2^{-2}} = \frac{5 \log 2}{-2 \log 2} = -\frac{5}{2}$

(2) $\log_2 \frac{1}{16\sqrt{2}} = \log_2 2^{-\frac{9}{2}} = -\frac{9}{2}$

(3) $\log_3 \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \log_3 3^{-\frac{3}{3}} = \log_3 3^{-1} = -1$

■例題 6 換底公式

(1) 利用換底公式以 \log_3 表示 $\log_3 3000$

(2) 令 $a = \log_2$, $b = \log_3$, 利用換底公式以 a, b 表示 $\log_2 72$

解 (1) $\log_3 3000 = \frac{\log 3000}{\log 3}$
 $= \frac{\log(3 \times 1000)}{\log 3} = \frac{\log 3 + \log 1000}{\log 3} = \frac{3 + \log 3}{\log 3}$

(2) $\log_2 72 = \frac{\log 72}{\log 2} = \frac{\log(2^3 \times 3^2)}{\log 2} = \frac{3 \log 2 + 2 \log 3}{\log 2} = \frac{3a + 2b}{a}$

■例題 7 用計算機求一般對數

試利用計算機及換底公式求下列各對數的值（四捨五入至小數點後第四位）：

(1) $\log_2 5$

(2) $\log_3 7$

解 (1) 按鍵如下

$$\boxed{5}, \boxed{\log}, \boxed{\div}, \boxed{2}, \boxed{\log}, \boxed{=}$$

得 $2.321928095 \approx 2.3219$

(2) 按鍵如下

$$\boxed{7}, \boxed{\log}, \boxed{\div}, \boxed{3}, \boxed{\log}, \boxed{=}$$

得 $1.771243749 \approx 1.7712$

■例題 8 對數的性質（一）

試求下列各式的值：

(1) $\log_9 243 + \log_9 81$

(2) $\log_4 32 + \log_8 16$

解 (1) $\log_9 243 + \log_9 81$
 $= \log_9 (243 \times 81)$
 $= \log_3^2 (3^5 \times 3^4)$
 $= \log_3 23^9 = \frac{9}{2}$

〈另解〉

$$\begin{aligned} \log_9 243 + \log_9 81 &= \log_3 23^5 + 2 \\ &= \frac{5}{2} \log_3 3 + 2 \\ &= \frac{5}{2} + 2 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

(2) $\log_4 32 + \log_8 16$
 $= \log_2^2 2^5 + \log_2^3 2^4$
 $= \frac{5}{2} + \frac{4}{3}$
 $= \frac{23}{6}$

■例題 9 對數的性質 (二)

試求下列各式的值：

(1) $\log_7 16 \times \log_{25} 49 \times \log_8 125$

(2) $\log_4 27 \times \log_9 5 \times \log_{125} 4$

解 (1) $\log_7 16 \times \log_{25} 49 \times \log_8 125$

$$\begin{aligned} &= \frac{\log 16 \times \log 49 \times \log 125}{\log 7 \times \log 25 \times \log 8} = \frac{4 \log 2 \times 2 \log 7 \times 3 \log 5}{\log 7 \times 2 \log 5 \times 3 \log 2} \\ &= \frac{4 \times 2 \times 3 \times \log 2 \times \log 7 \times \log 5}{2 \times 3 \times \log 7 \times \log 5 \times \log 2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

(2) $\log_4 27 \times \log_9 5 \times \log_{125} 4$

$$\begin{aligned} &= \frac{\log 27 \times \log 5 \times \log 4}{\log 4 \times \log 9 \times \log 125} = \frac{3 \log 3 \times \log 5 \times 2 \log 2}{2 \log 2 \times 2 \log 3 \times 3 \log 5} \\ &= \frac{3 \times 2 \times \log 3 \times \log 5 \times \log 2}{2 \times 2 \times 3 \times \log 2 \times \log 3 \times \log 5} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$