■例題 1　餘弦的差角公式

(1) 試用餘弦的差角公式計算 cos15°。(提示：15°＝60°－45°)

(2) 試求 cos80° cos50°＋sin80° sin50°之值

解 (1) $\cos 15^\circ=\cos(60^\circ-45^\circ)=\cos 60^\circ\cos 45^\circ+\sin 60^\circ\sin 45^\circ$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\quad(\approx 0.9659)$$

(2) $\cos 80^\circ\cos 50^\circ+\sin 80^\circ\sin 50^\circ=\cos(80^\circ-50^\circ)$

$$=\cos 30^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad(\approx 0.8660)$$

■例題 2　餘弦的和角公式

(1) 試用餘弦的和角公式計算 cos105°。(提示：105°＝60°＋45°)

(2) 試求 cos23° cos22°－sin23° sin22°之值

解 (1) $\cos 105^\circ=\cos(60^\circ+45^\circ)$

$$=\cos 60^\circ\cos 45^\circ-\sin 60^\circ\sin 45^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\quad(\approx -0.2588)$$

(2) $\cos 23^\circ\cos 22^\circ-\sin 23^\circ\sin 22^\circ=\cos(23^\circ+22^\circ)$

$$=\cos 45^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad(\approx 0.7071)$$

■例題 3　正弦的和角公式

(1) 試用正弦的和角公式計算 sin105°。(提示：105°＝60°＋45°)

(2) 試求 sin48° cos12°＋cos48° sin12°之值

解 (1) $\sin 105° = \sin(60° + 45°)$

$= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ( ≈ 0.9659)

(2) $\sin 48° \cos 12° + \cos 48° \sin 12° = \sin(48° + 12°)$

$= \sin 60°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$ ( ≈ 0.8660)

■例題 4　正弦的差角公式

(1) 試用正弦的差角公式計算 sin15°。(提示：15°＝60°－45°)

(2) 試求 sin71°cos41°－cos71°sin41°之值

解 (1) $\sin 15° = \sin(60° - 45°)$

$= \sin 60° \cos 45° - \cos 60° \sin 45°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ( ≈ 0.2588)

(2) $\sin 71° \cos 41° - \cos 71° \sin 41° = \sin(71° - 41°)$

$= \sin 30°$

$= \frac{1}{2}$

■例題 5　正餘弦和差角公式的應用

已知 $\alpha$，$\beta$ 均為銳角，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\beta=\frac{5}{13}$，試求：

(1) $\sin(\alpha+\beta)$

(2) $\cos(\alpha-\beta)$

解 由右圖(一)可知 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，右圖(二)可知 $\sin\beta=\frac{12}{13}$

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

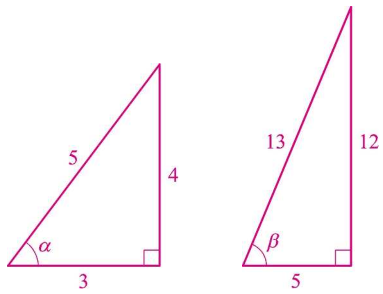
$=\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}+\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}$

$=\frac{20+36}{65}=\frac{56}{65}$

(2) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}+\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}$

$=\frac{15+48}{65}=\frac{63}{65}$




圖(一)　圖(二)

■例題 6　正切的和差角公式

已知 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，$\tan\beta=\frac{1}{3}$，試求：

(1) $\tan(\alpha+\beta)$

(2) $\tan(\alpha-\beta)$

解

(1) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1$

(2) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{6}}=\frac{1}{7}$

■例題 7　計算兩直線夾角（使用計算機）

試求兩直線 $L_1：3x+y-4=0$ 與 $L_2：5x-y+7=0$ 的夾角。（四捨五入至小數點後第二位）

解 設 $L_1$、$L_2$ 斜角分別為 $\alpha$、$\beta$，斜率分別為 $m_1$、$m_2$

得知 $m_1=-3$，$m_2=5$，即 $\tan\alpha=-3$，$\tan\beta=5$

∵ $L_1$，$L_2$ 有一夾角為 $\theta=\beta-\alpha$

$$\therefore\ \tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{5-(-3)}{1-15}=\frac{8}{-14}=-\frac{4}{7}$$

按計算機可得 $\theta\approx-29.7448813°\approx-29.74°$

∵ $0°\leq\theta\leq180°$　∴ $\theta\approx150.26°$

故 $L_1$ 與 $L_2$ 有一夾角約為 $150.26°$，

而另一角約為 $180°-150.26°=29.74°$

■例題 8　二倍角公式

(1) 已知 $\theta$ 為銳角，且 $\sin\theta=\dfrac{12}{13}$，試求 $\sin2\theta$，$\cos2\theta$，$\tan2\theta$

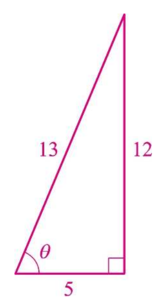
(2) 已知 $90°<\theta<180°$，且 $\sin\theta=\dfrac{12}{13}$，試求 $\sin2\theta$，$\cos2\theta$

解 (1) 由右圖可知 $\cos\theta=\dfrac{5}{13}$

$$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{12}{13}\times\frac{5}{13}=\frac{120}{169}$$

$$\cos2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\times\frac{144}{169}=1-\frac{288}{169}=-\frac{119}{169}$$

$$\tan2\theta=\frac{\sin2\theta}{\cos2\theta}=\frac{\frac{120}{169}}{-\frac{119}{169}}=-\frac{120}{119}$$




(2) ∵ $90°<\theta<180°$　∴ $\cos\theta=-\dfrac{5}{13}$

$$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{12}{13}\times\left(-\frac{5}{13}\right)=-\frac{120}{169}$$

$$\cos2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\times\frac{144}{169}=-\frac{119}{169}$$

■例題 9　半角公式

(1) 已知 $\theta$ 是銳角，$\cos\theta=\frac{1}{2}$，試用半角公式計算 $\sin\frac{\theta}{2}$，$\cos\frac{\theta}{2}$，$\tan\frac{\theta}{2}$

(2) 設 $180°<\theta<270°$，且 $\sin\theta=-\frac{3}{5}$，試求 $\sin\frac{\theta}{2}$ 及 $\cos\frac{\theta}{2}$

解 (1) $\because\ 0°<\theta<90°\quad\therefore\ 0°<\frac{\theta}{2}<45°$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}，\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

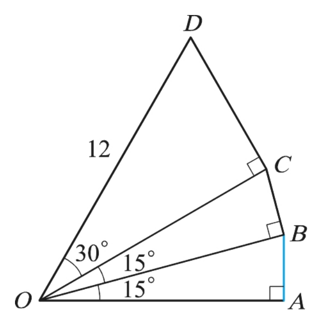
(2) $\because\ 180°<\theta<270°\quad\therefore\ \cos\theta=-\frac{4}{5}$，又 $90°<\frac{\theta}{2}<135°$

$$\therefore\ \sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=-\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}}=-\sqrt{\frac{1}{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$$

■例題 10　二倍角公式綜合應用

如右圖，$\triangle OAB$、$\triangle OBC$、$\triangle OCD$ 都是直角三角形，$\angle AOB=15°$，$\angle BOC=15°$，$\angle COD=30°$，$\overline{OD}=12$，試求 $\overline{AB}$ 長




解 依題意，$\overline{OC}=\overline{OD}\cos 30°=12\cos30°$ ……………… ①

$\overline{OB}=\overline{OC}\cos15°$ ……………… ②

而 $\overline{AB}=\overline{OB}\sin15°$（將②代入）

$=\overline{OC}\cos15°\sin15°$（將①代入）

$=12\cos30°\sin15°\cos15°$

$=6\cos30°\times(2\sin15°\cos15°)$

$=6\cos30°\sin30°=3\times(2\sin30°\cos30°)$

$=3\sin60°=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$