

$$\begin{array}{r}
 \textcircled{2} \quad \frac{0.7142857\dots}{7)50} \\
 \underline{49} \\
 10 \\
 \underline{7} \\
 30 \\
 \underline{28} \\
 20 \\
 \underline{14} \\
 60 \\
 \underline{56} \\
 40 \\
 \underline{35} \\
 50 \\
 \underline{49} \\
 1\dots
 \end{array}$$

所以， $\frac{5}{7} = 0.\overline{714285}$ 。

(2) ① 設 $x = 0.\overline{7}$ ，則 $10x = 7.\overline{7}$ ，
兩式相減得

$$\begin{array}{r}
 10x = 7.\overline{7} \\
 -) \quad x = 0.\overline{7} \\
 \hline
 9x = 7
 \end{array}$$

因此， $x = \frac{7}{9}$ 。

② 設 $x = 2.3\overline{4}$ ，則 $100x = 234.\overline{4}$ ， $10x = 23.\overline{4}$ ，
兩式相減得

$$\begin{array}{r}
 100x = 234.\overline{4} \\
 -) \quad 10x = 23.\overline{4} \\
 \hline
 90x = 211
 \end{array}$$

因此， $x = \frac{211}{90}$ 。

③ 設 $x = -1.42\overline{6}$ ，則 $1000x = -1426.\overline{6}$ ， $100x = -142.\overline{6}$ ，
兩式相減得

$$\begin{aligned}
 1000x - 100x &= -1426.\overline{6} - (-142.\overline{6}) \\
 &= -(1426.\overline{6} - 142.\overline{6}) \\
 &= -1284
 \end{aligned}$$

即 $900x = -1284$ ，

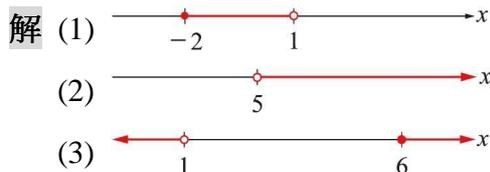
因此， $x = -\frac{1284}{900} = -\frac{107}{75}$ 。

3. 在數線上畫出下列的範圍：

(1) $-2 \leq x < 1$

(2) $(5, \infty)$

(3) $x < 1$ 或 $x \geq 6$



4. 分別用觀察數線及分情況討論兩種方法，解下列問題：

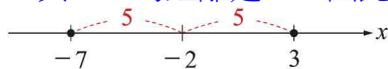
(1) $|x+2|=5$

(2) $|x+1|=|x+3|$

(3) $|x-1| \leq 4$

解 (1) [幾何意義]

x 與 -2 的距離是 5 ，因此觀察數線可得 $x=3$ 或 $x=-7$ 。



[代數意義]

$x+2$ 取絕對值之後是 5 ，因此 $x+2=5$ 或 $x+2=-5$ 。

移項後得 $x=3$ 或 $x=-7$ 。

(2) [幾何意義]

$|x+1|=|x+3|$ 表示 x 與 -1 的距離等於 x 與 -3 的距離，所以在數線上 x 是 -1 和 -3 的中點，

即 $\frac{-1+(-3)}{2} = -2$ ，故 $x=-2$

[代數意義]

$x+1=x+3$ (無解) 或 $x+1=-(x+3)$ ，

移項得 $2x=-4$ ，故 $x=-2$

(3) [幾何意義]

x 與 1 的距離小於或等於 4 ，

因此觀察數線可得 $-3 \leq x \leq 5$ ，亦可記為 $[-3, 5]$



[代數意義]

由 $|x-1| \leq 4$ ，可得 $-4 \leq x-1 \leq 4$ ，因此 $-3 \leq x \leq 5$



5. 試求下列各數的近似值，四捨五入至小數點後第四位：

(1) $\frac{22}{7}$

(2) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

解 (1) 按計算機得 $\frac{22}{7} \approx 3.142857143$ ，得 $\frac{22}{7} \approx 3.1429$

(2) 按計算機得 $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618033988$ ，得 $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.6180$

6. (1) 數線上有 A, B 兩點。 A 點坐標為 3 且 $\overline{AB}=7$ ，試求 B 點的坐標。
 (2) 數線上有 P, Q 兩點的坐標分別為 2、12。 R 點在 P, Q 之間且 $\overline{PR}:\overline{QR}=5:3$ ，試求 R 點的坐標。
 (3) 數線上由左至右依序有 A, B, C 三點，已知 A, B 兩點的坐標分別為 $-3, 7$ 且 $\overline{AC}:\overline{BC}=9:4$ ，試求 C 點的坐標。

解 (1) 設 B 點的坐標為 x ，由 $\overline{AB}=7$ ，得 $|x-3|=7$ ，

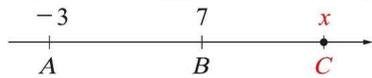
因此 $x-3=7$ 或 $x-3=-7$ ，移項後得 $x=10$ 或 $x=-4$ ，
 即 B 點的坐標為 10 或 -4 。

(2) 由題目條件可得下圖， $\overline{PR}:\overline{QR}=5:3$ ，



由分點公式得 R 點的坐標為 $\frac{3 \cdot 2 + 5 \cdot 12}{5 + 3} = \frac{66}{8} = \frac{33}{4}$

(3) 設 C 點的坐標為 x ，由題目條件可得下圖， $\overline{AB}:\overline{BC}=5:4$ ，



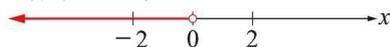
由分點公式得 B 點的坐標為 $\frac{4 \cdot (-3) + 5 \cdot x}{5 + 4} = 7$ ，故 $5x - 12 = 63$ ，即 $x = 15$

二、進階題

7. 解下列各不等式：

- (1) $|x-2| > |x+2|$ 。 (2) $2 \leq |x-1| < 9$ 。 (3) $|2x-1| \leq 3$ 。

解 (1) [解法一]



$|x-2| > |x+2|$ 表示 x 與 2 的距離大於 x 與 -2 的距離，
 所以在數線上 x 是位於 2 與 -2 的中點 0 的左側，
 即 $x < 0$ ，亦可記為 $(-\infty, 0)$ ，如右圖所示

[解法二]

將實數分成三個範圍：

$x < -2$ ， $-2 \leq x < 2$ ， $x \geq 2$ 分開討論

- ① 當 $x < -2$ 時，原式變成 $-(x-2) > -(x+2)$ ，
 即 $2 > -2$ 恆成立，因此，在此範圍的解為 $x < -2$
 ② 當 $-2 \leq x < 2$ 時，原式變成 $-(x-2) > x+2$ ，
 即 $2x < 0$ ，得 $x < 0$ 。因此，在此範圍的解為 $-2 \leq x < 0$ 。
 ③ 當 $x \geq 2$ 時，原式變成 $x-2 > x+2$ ，
 即 $-2 > 2$ ，任何實數 x 都不能滿足此式。因此，在此範圍無解。
 綜合①、②、③的討論，可知原不等式的解為 $x < 0$ ，亦可記為 $(-\infty, 0)$ 。

(2) [解法一]

題目即 $|x-1| \geq 2$ 且 $|x-1| < 9$ 。

① $|x-1| \geq 2$ ，即 $x-1 \geq 2$ 或 $x-1 \leq -2$ ，移項得 $x \geq 3$ 或 $x \leq -1$ ，如下圖



② $|x-1| < 9$ ，即 $-9 < x-1 < 9$ ，移項得 $-8 < x < 10$ ，如下圖



因此，由①、②得範圍如下圖



故本題的解為 $-8 < x \leq -1$ 或 $3 \leq x < 10$ ，亦可記為 $(-8, -1] \cup [3, 10)$ 。

[解法二]

將 $x-1$ 視為一個整體，由 $2 \leq |x-1| < 9$ 可得 $-9 < x-1 \leq -2$ 或 $2 \leq x-1 < 9$ ，
即 $-8 < x \leq -1$ 或 $3 \leq x < 10$ ，亦可記為 $(-8, -1] \cup [3, 10)$ 。

(3) 由 $|2x-1| \leq 3$ 得 $-3 \leq 2x-1 \leq 3$ ，移項得 $-2 \leq 2x \leq 4$ ，
即 $-1 \leq x \leq 2$ ，亦可記為 $[-1, 2]$

8. 小菡某日執行一計算，因精神不濟，將一正數“乘以 $0.\bar{5}$ ”，誤計算為“乘以 0.55 ”，導致所得結果相差 3，則此正數應為多少？

解 設此正數為 x ，依題意列式可得 $0.\bar{5}x - 0.55x = 3$ ，

$$\text{即 } \left(\frac{5}{9} - \frac{55}{100}\right)x = 3, \text{ 得 } \frac{5}{900}x = 3, \text{ 解得 } x = 540, \text{ 故此正數為 } 540$$

9. 阿亨手工水餃包裝上標示，每顆重量是 $32 \pm 5\%$ 公克，假設每顆水餃的實際重量為 x 公克，試求出 x 滿足的絕對值不等式 $|x-a| \leq b$ 。

解 由題意可知， $32 - 32 \times 5\% \leq x \leq 32 + 32 \times 5\%$ ，
得 $-1.6 \leq x - 32 \leq 1.6$ ，故 $|x - 32| \leq 1.6$

三、挑戰題

10. 如下圖，古希臘認為最美的身材比例要滿足 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{BC}} = \varphi$ (A 為頭頂， B 為肚臍， C 為地面站立處； φ 讀作“phi”)，這個比值 φ 稱為黃金比例。

(1) 試求出黃金比例 φ



(2) 李小姐的身高為 150 公分，她的肚臍到腳底的距離為 90 公分。為了達成黃金比例，請問李小姐要穿高多少公分的高跟鞋？(四捨五入至整數位)

解 (1) 設 $\overline{AB} = 1$ ， $\overline{BC} = \varphi$ ，則 $\overline{CA} = \varphi + 1$ 。

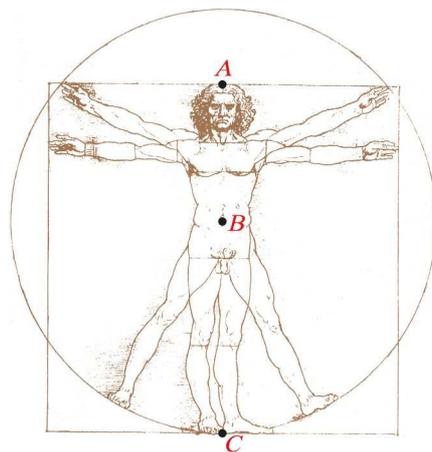
$$\text{由 } \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{BC}} = \varphi, \text{ 得 } \frac{\varphi}{1} = \frac{\varphi+1}{\varphi},$$

$$\text{則 } \varphi^2 = \varphi + 1,$$

$$\text{移項得 } \varphi^2 - \varphi - 1 = 0,$$

$$\text{故 } \varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ (負不合).}$$

$$\text{所以黃金比例為 } \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$



(2) 設高跟鞋的高為 x 公分，

$$\text{則 } \frac{90+x}{60} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\text{可得 } 2(90+x) = 60(1+\sqrt{5}), \text{ 展開得 } 180+2x = 60+60\sqrt{5},$$

$$\text{則 } 2x = 60\sqrt{5} - 120, \text{ 得 } x = 30\sqrt{5} - 60 \approx 7.08 \approx 7$$

故李小姐要穿高 7 公分的高跟鞋