



單元

10

直角三角形的三角比

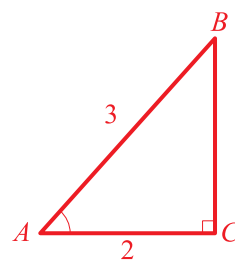


建議配分 每題 10 分。

1. 已知 $\angle A$ 為銳角且 $\cos A = \frac{2}{3}$ ，求 $\sin A$ 和 $\tan A$ 的值。

解 ▶ 作一直角 $\triangle ABC$ ，使 $\angle A$ 的鄰邊 $\overline{AC} = 2$ ，斜邊 $\overline{AB} = 3$ ，如右圖所示，可得 $\overline{BC} = \sqrt{5}$ 。

$$\text{故 } \sin A = \frac{\sqrt{5}}{3}, \tan A = \frac{\sqrt{5}}{2}。$$



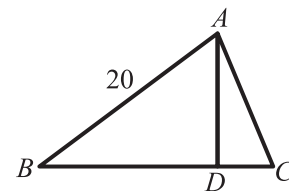
2. 求下列各式的值：

(1) $\sin^2 45^\circ + \tan 30^\circ \sin 60^\circ$ 。 (2) $\frac{\sin 60^\circ - \tan 45^\circ}{\tan 60^\circ - 2 \tan 45^\circ}$ 。

解 ▶ (1) $\sin^2 45^\circ + \tan 30^\circ \sin 60^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ 。

$$(2) \frac{\sin 60^\circ - \tan 45^\circ}{\tan 60^\circ - 2 \tan 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{\sqrt{3} - 2} = \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} - 2} = 1。$$

3. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 。已知 $\overline{AB} = 20$ ， $\sin B = \frac{3}{5}$ ， $\sin C = \frac{12}{13}$ ，求 \overline{BC} 的值。



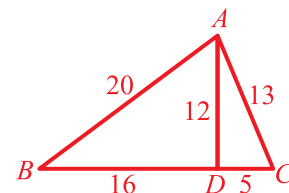
解 ▶ $\triangle ABD$ 中， $\overline{AD} = \overline{AB} \times \sin B = 20 \times \frac{3}{5} = 12$ ，

$$\overline{BD} = \overline{AB} \times \cos B = 20 \times \frac{4}{5} = 16，$$

$$\begin{aligned} \triangle ACD \text{ 中，} \overline{AC} \times \sin C &= \overline{AD} \\ \Rightarrow \overline{AC} \times \frac{12}{13} &= 12 \Rightarrow \overline{AC} = 13， \end{aligned}$$

$$\overline{DC} = \overline{AC} \cos C = 13 \times \frac{5}{13} = 5，$$

$$\text{所求} = \overline{BD} + \overline{DC} = 16 + 5 = 21。$$



4. 已知 θ 為銳角，且滿足方程式 $2\cos^2 \theta + 3\cos \theta = 2$ ，求 $\tan \theta$ 的值。

解 ▶ $2\cos^2 \theta + 3\cos \theta - 2 = 0$

$$\Rightarrow (2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 2) = 0$$

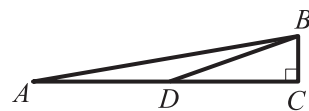
$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ 或 } -2 \text{ (} -2 \text{ 不合)}$$

$$\Rightarrow \theta = 60^\circ。$$

$$\text{故 } \tan \theta = \sqrt{3}。$$

5. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC} \perp \overline{AC}$ ， $\overline{AD} = \overline{BD}$ 。

已知 $\sin(\angle BDC) = \frac{1}{3}$ ，求 $\tan A$ 的值。



解 ▶ 由 $\sin(\angle BDC) = \frac{1}{3}$ ，令 $\overline{BC} = 1$ ， $\overline{BD} = 3$ ，則 $\overline{CD} = 2\sqrt{2}$ 。

又 $\overline{AD} = \overline{BD} = 3$ ，故 $\tan A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = 3-2\sqrt{2}$ 。

6. 求 $\sin^2 25^\circ + \sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 65^\circ$ 的值。

解 ▶ $\sin^2 25^\circ + \sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 65^\circ$
 $= \sin^2 25^\circ + \sin^2 35^\circ + \cos^2 35^\circ + \cos^2 25^\circ$
 $= (\sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ) + (\sin^2 35^\circ + \cos^2 35^\circ)$
 $= 1 + 1$
 $= 2$ 。

7. 已知 θ 為銳角，且 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ，求 $\sin \theta \cos \theta$ 的值。

解 $\rightarrow (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

$$\Rightarrow \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{8}。$$

8. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， P 為 \overline{BC} 上一點， $\overline{PD} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{PE} \perp \overline{AC}$ 。已知 $\overline{BC} = 10$ ， $\sin B = \frac{4}{5}$ ，求 $\overline{PD} + \overline{PE}$ 的值。

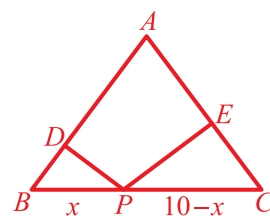
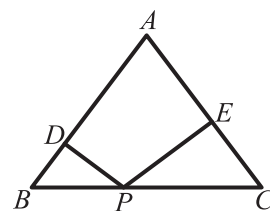
解 \rightarrow 設 $\overline{BP} = x$ ，則 $\overline{CP} = 10 - x$ 。

$$\triangle BPD \text{ 中，} \overline{PD} = \overline{BP} \sin B = x \sin B；$$

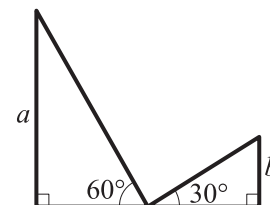
$$\triangle CPE \text{ 中，} \overline{PE} = \overline{CP} \sin C = (10 - x) \sin C，$$

$$\text{因為 } \overline{AB} = \overline{AC}，\text{所以 } \sin B = \sin C = \frac{4}{5}。$$

$$\text{故 } \overline{PD} + \overline{PE} = \frac{4}{5}x + \frac{4}{5}(10 - x) = \frac{4}{5} \times 10 = 8。$$



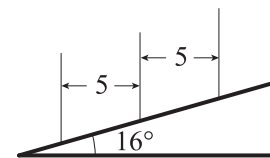
9. 兩旗桿立於地面上，其高分別為 a ， b 。今由兩旗桿底部連線的中點分別拉繩子至旗桿頂，已知繩子與水平線的夾角分別為 60° 與 30° ，如右圖所示，求 $a:b$ 之比值。



解▶ 設兩旗桿底部連線長為 $2x$ 。

$$\text{因為 } a = x \tan 60^\circ, b = x \tan 30^\circ, \text{ 所以 } \frac{a}{b} = \frac{\tan 60^\circ}{\tan 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 3。$$

10. 沿著山坡種樹時，為了使樹木有足夠的生長空間，每棵樹的水平距離需間隔 5 公尺，如右圖所示。已知斜坡坡度為 16° ，求相鄰兩樹在斜坡上的斜面距離。(參考數值 $\sin 16^\circ = 0.2756$ ， $\cos 16^\circ = 0.9613$ ， $\tan 16^\circ = 0.2867$ ，四捨五入至小數點後第二位)



解▶ 設相鄰兩樹在斜坡上的斜面距離為 x 公尺，

$$\text{則 } \frac{5}{x} = \cos 16^\circ \Rightarrow x = \frac{5}{\cos 16^\circ} = \frac{5}{0.9613} \approx 5.20。$$

故兩樹間的斜面距離為 5.20 公尺。

