【習題 1-2】

1. 設 $\langle a_n\rangle$ 為一首項 $a_1=1$，公比 $r=-\frac{1}{2}$ 的無窮等比數列．選出正確的選項： (1)$a_{100}>0$ (2)$\langle a_n\rangle$ 是收斂數列

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ (4) $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\frac{2}{3}$ (5) $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\cdots=\frac{3}{2}$ ．

解答 234

解析 (1) $a_{100}=1\times(-\frac{1}{2})^{99}<0$ ．

(2)因為公比 $r=-\frac{1}{2}$，所以 $\langle a_n\rangle$ 是收斂數列．

(3)因為 $a_n=1\times(-\frac{1}{2})^{n-1}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{1}{2})^{n-1}=0$ ．

(4) $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\dfrac{1}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{2}{3}$ ．

(5)因為 $\frac{1}{a_1}=\frac{1}{1}=1$， $\frac{1}{a_2}=\dfrac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$， $\cdots$， $\frac{1}{a_n}=\dfrac{1}{(-\frac{1}{2})^{n-1}}=(-2)^{n-1}$， $\langle\frac{1}{a_n}\rangle$ 為發散數列，

所以 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\cdots$ 不能求和．

故選項(2)(3)(4)正確．

2. 求無窮級數 $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}+\cdots$ 的和．

解答 $\frac{3}{4}$

解析 (1)利用 $\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2})$，得

$$S_n=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}((1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}))$$

$$=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})\ .$$

(2)根據無窮級數和的定義，因為 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-0-0)=\frac{3}{4}$，

所以 $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}+\cdots=\frac{3}{4}$ ．

3. 判斷下列各無窮等比級數為收斂或發散級數，若為收斂級數，求其和．

(1)$24+12+6+3+\cdots$

(2)$3\sqrt{3}-3+\sqrt{3}-1+\cdots$

(3)$3+4+\dfrac{16}{3}+\dfrac{64}{9}+\cdots$

(4)$\dfrac{2}{5}+\dfrac{8}{5^2}+\dfrac{26}{5^3}+\cdots+\dfrac{3^n-1}{5^n}+\cdots$

解答 (1)收斂級數，48;(2)收斂級數，$\dfrac{9\sqrt{3}-9}{2}$;(3)發散級數;(4)收斂級數，$\dfrac{5}{4}$

解析 (1)這是一個首項 $a=24$，公比 $r=\dfrac{1}{2}$ 的無窮等比級數，因為公比 r 介於 -1 與 1 之間，

所以此無窮級數為收斂級數且其和為 $S=\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{24}{1-\frac{1}{2}}=48$．

(2)這是一個首項 $a=3\sqrt{3}$，公比 $r=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 的無窮等比級數，因為公比 r 介於 -1 與 1 之間，

所以此無窮級數為收斂級數且其和為

$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{3\sqrt{3}}{1-(-\frac{1}{\sqrt{3}})}=\frac{9\sqrt{3}-9}{2}.$$

(3)這是一個首項為 3，公比為 $\dfrac{4}{3}$ 的無窮等比級數，因為公比 $\dfrac{4}{3}>1$，

所以此無窮等比級數不能求和．

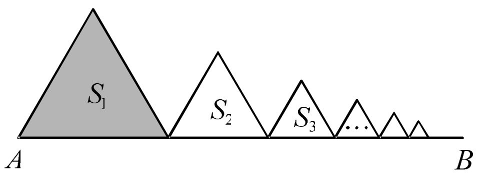
(4)$\dfrac{2}{5}+\dfrac{8}{5^2}+\dfrac{26}{5^3}+\cdots+\dfrac{3^n-1}{5^n}+\cdots$

$$=\frac{3-1}{5}+\frac{3^2-1}{5^2}+\frac{3^3-1}{5^3}+\cdots+\frac{3^n-1}{5^n}+\cdots$$

$$=(\frac{3}{5}+(\frac{3}{5})^2+(\frac{3}{5})^3+\cdots+(\frac{3}{5})^n+\cdots)-(\frac{1}{5}+(\frac{1}{5})^2+(\frac{1}{5})^3+\cdots+(\frac{1}{5})^n+\cdots)$$

$$=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}-\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}.$$

4. 已知 $\overline{AB}=9$，今以 $\overline{AB}$ 長的 $\dfrac{1}{3}$ 為邊長，作一正三角形 S_1，再以剩下線段長的 $\dfrac{1}{3}$ 為邊長作一正三角形 S_2，如此繼續下去，得到一序列的正三角形 S_1，S_2，S_3，$\cdots$，如下圖所示．求這些正三角形 S_1，S_2，S_3，$\cdots$的面積和．



解答 $\frac{81\sqrt{3}}{20}$

解析 由題意知：正三角形 S_1，S_2，S_3，…的邊長分別為 3，2，$\frac{4}{3}$，…，這些正三角形的面積和為 $\frac{9\sqrt{3}}{4}+\sqrt{3}+\frac{4\sqrt{3}}{9}+\cdots$，這是一個首項為 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$，公比為 $\frac{4}{9}$ 的無窮等比級數，因為公比介於 -1 與 1 之間，所以其和為 $S=\dfrac{\frac{9\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{81\sqrt{3}}{20}$.

因此，所有正三角形 S_1，S_2，S_3，…的面積和為 $\frac{81\sqrt{3}}{20}$.

5. .將下列各循環小數化成分數：(1) $0.\overline{520}$ (2) $5.4\overline{38}$

解答 (1) $\frac{520}{999}$;(2) $\frac{2692}{495}$

解析 (1)循環小數

$0.\overline{520}=0.520520\cdots=0.520+0.000520+0.000000520+\cdots$

這是首項為 0.520，公比為 0.001 的無窮等比級數，因為公比介於 -1 與 1 之間，所以其和為

$0.\overline{520}=\frac{0.520}{1-0.001}=\frac{0.520}{0.999}=\frac{520}{999}$.

(2) $5.4\overline{38}=5.4383838\cdots=5.4+(0.038+0.00038+0.0000038+\cdots)$

$=5.4+\frac{0.038}{1-0.01}=\frac{54}{10}+\frac{38}{990}=\frac{5384}{990}$.

6. 選出正確的選項： (1) $0.3\overline{43}$ 不是有理數 (2) $0.\overline{34}>\frac{1}{3}$ (3) $0.\overline{34}>0.343$ (4) $0.\overline{34}<0.35$ (5) $0.\overline{34}=0.3\overline{43}$.

解答 2345

解析 (1)因為 $0.3\overline{43}=\frac{34}{99}$，所以 $0.3\overline{43}$ 是有理數 .

(2)因為 $\frac{1}{3}=0.333\cdots$， $0.\overline{34}=0.3434\cdots$，所以 $0.\overline{34}>\frac{1}{3}$.

(3)因為 $0.\overline{34}=0.3434\cdots$， 所以 $0.\overline{34}>0.343$.

(4)因為 $0.\overline{34}=0.3434\cdots$， 所以 $0.\overline{34}<0.35$.

(5)因為 $0.3\overline{43}=0.3434343\cdots$， 所以 $0.\overline{34}=0.3\overline{43}$.

故選項(2)(3)(4)(5)正確 .

7. 在坐標平面上，x 與 y 坐標都是整數的點，稱為格子點．設 a_n 為落在以原點為圓心，正整數 n 為半徑的圓內或圓上的格子點數目，已知數列 $\langle a_n\rangle$ 會滿足不等式 $\pi(n^2-3n)\le a_n\le\pi(n^2+3n)$．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$ ．

解答　π

解析　將不等式 $\pi(n^2-3n)\le a_n\le\pi(n^2+3n)$中各式同除以 n^2，得 $\frac{\pi(n^2-3n)}{n^2}\le\frac{a_n}{n^2}\le\frac{\pi(n^2+3n)}{n^2}$,

因為 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi(n^2-3n)}{n^2}=\pi\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{n}}{1}=\pi$， $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi(n^2+3n)}{n^2}=\pi\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{1}=\pi$,

所以由夾擠定理可知： $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\pi$ ．

8. 求無窮級數 $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}+\cdots$ 的值．

解答　2

解析　將一般項變形： $\frac{1}{1+2+3+\cdots+k}=\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}=\frac{2}{k(k+1)}$,

利用 $\frac{2}{k(k+1)}=2(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})$，得

$$S_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$$

$$=2((1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}))$$

$$=2(1-\frac{1}{n+1})=\frac{2n}{n+1}\ ,$$

根據無窮級數和的定義，因為 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$,

所以 $S=\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}+\cdots=2$ ．

9. 已知無窮等比級數的和為 16，且前三項的和為 18，求此無窮等比級數偶數項的和．

解答　-16

解析　設無窮等比級數的首項為 a，公比為 r，依題意可列出聯立方程式 $\begin{cases}\frac{a}{1-r}=16\\ a+ar+ar^2=18\end{cases}$,

解得 $a=24$，$r=-\frac{1}{2}$．此無窮等比級數偶數項為 -12，-3，$-\frac{3}{4}$，…，是首項為 -12，公比為 $\frac{1}{4}$ 的無窮等比級數，因為公比介於 -1 與 1 之間，所以其和為 $S=\frac{a}{1-r}=\frac{-12}{1-\frac{1}{4}}=-16$ ．

10. 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}}{3^n}$.

$\boxed{解答}$ $\frac{3}{2}$

$\boxed{解析}$ 因為$\frac{1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}}{3^n}=\frac{2^n-1}{3^n}=(\frac{2}{3})^n-(\frac{1}{3})^n$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}[(\frac{2}{3})^n-(\frac{1}{3})^n]=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

11. .已知首項為 2 的無窮等比級數的和為 6，求 n 的最小值，使得其前 n 項的和 S_n 滿足$|6-S_n|<\frac{1}{1000}$.（已知 log2 ≈ 0.3010，log3 ≈ 0.4771）

$\boxed{解答}$ 22

$\boxed{解析}$ 設此無窮等比級數的公比為 r，因為首項為 2，所以無窮等比級數的和為$\frac{2}{1-r}=6$,

解得$r=\frac{2}{3}$.

此無窮等比級數前 n 項的和為$S_n=\frac{2(1-(\frac{2}{3})^n)}{1-\frac{2}{3}}=6-6\cdot(\frac{2}{3})^n$,

因為$|6-S_n|<\frac{1}{1000}$, 即$|6-(6-6\cdot(\frac{2}{3})^n)|<\frac{1}{1000}$,

所以$6\cdot(\frac{2}{3})^n<\frac{1}{1000}$

$\log(\frac{2}{3})^n<\log\frac{1}{6000}$

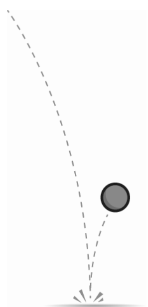
$n(\log2-\log3)<-(3+\log2+\log3)$

$-0.1761n<-3.7781$

$n>21.454\cdots$,

因此 n 取最小整數為 22 .

12. 一皮球自離地面 10 公尺高處落下，每次反跳高度為其落下時高度的$\frac{1}{3}$，求此球自落下到靜止時所經過的距離.



$\boxed{解答}$ 20 公尺

$\boxed{\text{解析}}$ 球每次彈跳的高度為一個等比數列：$\frac{10}{3}$，$\frac{10}{3^2}$，$\frac{10}{3^3}$，$\cdots$

其行經的路徑加起來為

$$10+\frac{10}{3}\times2+\frac{10}{3^2}\times2+\cdots+\frac{10}{3^{n-1}}\times2+\cdots=10+(\frac{10}{3}+\frac{10}{3^2}+\cdots+\frac{10}{3^{n-1}}+\cdots)\times2=10+10=20,$$

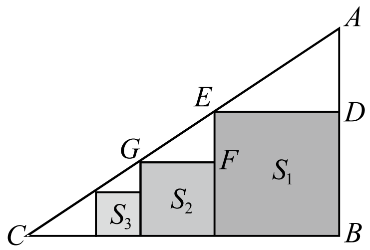
共行經 20 公尺．

13. 已知直角三角形$\triangle ABC$的兩股長為$\overline{AB}=20$, $\overline{BC}=30$，依次在三角形內作內接正方形S_1，S_2，S_3，$\cdots$，如下圖所示．

(1)求正方形S_1的面積．

(2)令$\overline{DE}=a$，$\overline{FG}=b$，利用$\triangle EFG\sim\triangle ABC$，求$\frac{b}{a}$．

(3)求所有內接正方形的面積總和．



$\boxed{\text{解答}}$ (1)144;(2)$\frac{3}{5}$;(3)225

$\boxed{\text{解析}}$ (1)設$\overline{BD}=x$，則$\overline{AD}=20-x$．

因為$\triangle ADE\sim\triangle ABC$，所以$\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$，即$\frac{20-x}{x}=\frac{20}{30}$，得$x=12$，

因此正方形S_1的面積為$12^2=144$．

(2)因為$\triangle EFG\sim\triangle ABC$，所以$\frac{\overline{FG}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$，即$\frac{b}{12-b}=\frac{3}{2}$，得$b=\frac{36}{5}$，

又$a=12$，因此$\frac{b}{a}=\frac{\frac{36}{5}}{12}=\frac{3}{5}$．

(3)因為兩正方形的面積比等於其邊長的平方比，所以$\frac{S_n}{S_{n-1}}=\frac{S_2}{S_1}=(\frac{3}{5})^2=\frac{9}{25}$，

所有內接正方形的面積形成首項為 144，公比為$\frac{9}{25}$的無窮等比數列，

因此所有內接正方形的面積總和為$\frac{144}{1-\frac{9}{25}}=225$．