

第1章 極限與函數



1-3 函數的概念

1. 已知函數 $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ，求：

(1) $f(x)$ 的定義域

(2) $f(x)$ 的值域

解 (1) 因為分母不可為 0，所以 $f(x)$ 的定義域為 $\mathbb{R} - \{0\}$ 。

(2) 當 $x > 0$ 時， $f(x) = \frac{x}{x} = 1$ ；當 $x < 0$ 時， $f(x) = \frac{-x}{x} = -1$ 。

故 $f(x)$ 的值域為 $\{1, -1\}$ 。

2. 已知函數 $f(x) = \sqrt{8-2x-x^2}$ ，求：

(1) $f(x)$ 的定義域

(2) $f(x)$ 的值域

解 (1) 因為根號內不可為負數，所以

$$8-2x-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+2x-8 \leq 0 \Rightarrow (x+4)(x-2) \leq 0.$$

解得 $-4 \leq x \leq 2$ 。

故 $f(x)$ 的定義域為 $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 2\}$ 。

(2) 因為

$$f(x) = \sqrt{8-2x-x^2} = \sqrt{-(x+1)^2+9}$$

且 $-4 \leq x \leq 2$ ，所以 $0 \leq f(x) \leq 3$ 。

故 $f(x)$ 的值域為 $\{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 3\}$ 。

3. 已知函數 $f(x) = \log_3(9 - x^2)$, 求:

(1) $f(x)$ 的定義域

(2) $f(x)$ 的值域

解 (1) 因為真數 $9 - x^2 > 0$, 即 $-3 < x < 3$,

所以 $f(x)$ 的定義域為 $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$.

(2) 因為 $0 < 9 - x^2 \leq 9$, 所以

$$\log_3(9 - x^2) \leq \log_3 9 = 2.$$

故 $f(x)$ 的值域為 $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 2\}$.

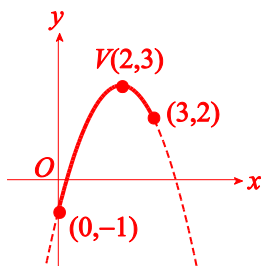
4. 已知函數 $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ 的定義域為 $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 3\}$, 求 $f(x)$ 的值域.

解 (1) 函數 $f(x) = -x^2 + 4x - 1 = -(x - 2)^2 + 3$ 的圖形是以 $V(2, 3)$ 為頂點,

直線 $x = 2$ 為對稱軸之開口向下的拋物線.

(2) 因為定義域為 $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 3\}$, 所以函數圖形為拋物線的一部分,

如下圖中的實線部分:



因為圖形的最高點為頂點 $V(2, 3)$, 最低點為 $(0, -1)$,

所以函數 $f(x)$ 的值域為 $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 3\}$.

5. 設 $f(x) = -2x + 3$ 的值域為 $\{y \in \mathbb{R} \mid -5 \leq y \leq 9\}$, 求 $f(x)$ 的定義域.

解 由

$$-5 \leq -2x + 3 \leq 9 \Rightarrow -8 \leq -2x \leq 6 \Rightarrow -3 \leq x \leq 4.$$

得 $f(x)$ 的定義域為 $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 4\}$.

6. 求 $\sum_{k=1}^{20} [\log_2 k]$ 的值，其中符號 $[\]$ 為高斯符號。

解 原式 $= [\log_2 1] + [\log_2 2] + [\log_2 3] + \cdots + [\log_2 20]$

$$= 0 + \underbrace{1}_{2\text{個}} + \underbrace{1}_{4\text{個}} + \underbrace{1}_{8\text{個}} + \underbrace{1}_{16\text{個}} + \underbrace{2}_{20-16=4\text{個}}$$

$$= 0 + 2 + 8 + 2 + 4 = 16.$$

7. 已知函數 $f(x) = \frac{x-1}{x}$ 與 $g(x) = \frac{x}{x-1}$ ，求下列各函數：

(1) $(f-g)(x)$ (2) $(f \cdot g)(x)$ (3) $(g \circ f)(x)$

解 (1) $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x-1}{x} - \frac{x}{x-1} = \frac{(x-1)^2 - x^2}{x(x-1)} = \frac{-2x+1}{x^2-x}.$

(2) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x}{x-1} = 1.$

(3) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x} - 1} = -x+1.$

8. 設 $f(x) = 2x+1$ ，求一次函數 $g(x)$ 使得 $(f \circ g)(x) = x$ 。

解 設 $g(x) = ax+b$ ，則

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(ax+b) = 2(ax+b)+1 = 2ax+(2b+1).$$

因為 $(f \circ g)(x) = x$ ，所以

$$2a=1 \text{ 且 } 2b+1=0,$$

解得 $a = \frac{1}{2}$ ， $b = -\frac{1}{2}$ ，即 $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 。