

第 1 章 機率與統計



1-2 期望值、變異數與標準差

1. 袋子裡有 3 個球，有兩個球上標 5 元，一個球上標 10 元。從袋中任取 2 個球，即可得到兩個球所標錢數的和。求此玩法所得錢數的期望值。

解 兩個球可能為 (5,5) 或 (5,10)，期望值為

$$\frac{1}{3} \times 10 + \frac{2}{3} \times 15 = \frac{40}{3} \text{ (元)}.$$

2. 袋中有編號 1 號至 10 號的卡片各一張。今任取一張，
 (1) 若取出 k 號，則可得 k 元，求所得金額的期望值。
 (2) 若取出 k 號，則可得 k^2 元，求所得金額的期望值。

解 (1) 期望值為

$$1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{10} + \cdots + 10 \times \frac{1}{10} = (1 + 2 + \cdots + 10) \times \frac{1}{10} = \frac{11}{2} \text{ (元)}.$$

(2) 期望值為

$$1^2 \times \frac{1}{10} + 2^2 \times \frac{1}{10} + \cdots + 10^2 \times \frac{1}{10} = (1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2) \times \frac{1}{10} = \frac{77}{2} \text{ (元)}.$$

3. 擲二個公正骰子，若出現點數和為 k 時，可得 $k \times 100$ 元，求所得金額的期望值。

解 擲二個公正骰子，出現點數和與機率如下表：

點數和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
機率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

期望值為

$$200 \times \frac{1}{36} + 300 \times \frac{2}{36} + \cdots + 1200 \times \frac{1}{36} = 700 \text{ (元)}.$$

7 第 1 章 機率與統計

4. 丟 3 個公正硬幣，若出現 k 個正面，則可獲 2^k 元 ($k=1,2,3$)，為使賭局公平，出現 3 個反面時應賠多少元？

解 丟 3 個公正硬幣，出現正面個數與其機率如下表：

正面個數	0	1	2	3
機率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

設出現 3 個反面時應賠 x 元，欲使期望值為 0，即

$$\frac{3}{8} \times 2^1 + \frac{3}{8} \times 2^2 + \frac{1}{8} \times 2^3 - \frac{1}{8} x = 0$$

得 $x=26$ (元)，故出現 3 個反面時應賠 26 元。

5. 人壽保險公司銷售一年期意外險給 25 歲的年輕人，保險額為一百萬元，保費 1200 元。依過去之統計資料顯示：25 歲年輕人可以活到 26 歲的機率為 0.999，試問保險公司的期望利潤為多少元？

解 25 歲年輕人一年內若平安度過，保險公司賺 1200 元，否則要賠 $(1000000-1200)$ 元，期望利潤為

$$\begin{aligned} & 1200 \times 0.999 + (-1000000 + 1200) \times 0.001 \\ &= 1200 \times (0.999 + 0.001) - 1000000 \times 0.001 \\ &= 1200 - 1000 \\ &= 200 \text{ (元)}. \end{aligned}$$

6. (1) 單一選擇題每題有 4 個選項，恰有一個選項是正確的。若每題答對可得 5 分，答錯應倒扣幾分？
 (2) 上述記分方式中，若確定選項 A 不正確，隨意猜答另三個選項的其中之一，則該題得分的期望值為何？

解 (1) 設答錯應倒扣 x 分，則 $5 \times \frac{1}{4} + (-x) \times \frac{3}{4} = 0$ ，得 $x = \frac{5}{3}$ 。

故每題答錯應倒扣 $\frac{5}{3}$ 分。

- (2) 確定選項 A 不正確，隨意猜答時，猜對的機率為 $\frac{1}{3}$ ，猜錯的機率為 $\frac{2}{3}$ ，

該題得分的期望值為 $5 \times \frac{1}{3} + \left(-\frac{5}{3}\right) \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$ (分)。

7. 某人擲一骰子一次，若擲出奇數點可得 15 元，如出現 6 點損失 9 元，出現 2 或 4 點損失 6 元，令隨機變數 X 為擲骰子一次所得的金額，求 X 的期望值、變異數與標準差。

解 隨機變數 X 為擲骰子一次所得的金額，則 X 的可能取值為 15, -9, -6 (元)，其機率分布如下：

X	15	-9	-6
P	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$

$$\text{故期望值 } E(X) = 15 \times \frac{3}{6} + (-9) \times \frac{1}{6} + (-6) \times \frac{2}{6} = 4 \text{ (元)}.$$

$$\begin{aligned} \text{變異數 } \text{Var}(X) &= (15-4)^2 \times \frac{3}{6} + (-9-4)^2 \times \frac{1}{6} + (-6-4)^2 \times \frac{2}{6} \\ &= 121 \times \frac{3}{6} + 169 \times \frac{1}{6} + 100 \times \frac{2}{6} = 122 \end{aligned}$$

$$\text{標準差 } \sigma = \sqrt{122} \text{ (元)}.$$

8. 投擲兩顆公正的骰子，點數和若為二位數可賺 10 元，若為一位數得賠 5 元，求其投擲一次所得金額的期望值與變異數。

解 隨機變數 X 為投擲一次所得金額，則 X 的可能取值與機率分布如下：

點數和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	10	10	10
機率 P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$\begin{aligned} \text{期望值 } E(X) &= \frac{1+2+3+4+5+6+5+4}{36} \times (-5) + \frac{3+2+1}{36} \times 10 \\ &= \frac{30}{36} \times (-5) + \frac{6}{36} \times 10 = -2.5 \text{ (元)}. \end{aligned}$$

$$\text{變異數 } \text{Var}(X) = (-5)^2 \times \frac{30}{36} + 10^2 \times \frac{6}{36} - (-2.5)^2 = 37.5 - 6.25 = 31.25.$$

9 第 1 章 機率與統計

9. 某公司年終尾牙舉辦摸彩活動，參加員工每人得摸彩券一張，摸彩券編號為 0000~9999。主持人抽出一組幸運號碼，與該號碼四位數字完全相同者可獲 10 萬元，末三位數字相同者可獲 5 萬元，末兩位數字相同者可獲 1 萬元，末位數字相同者可獲 5000 元，每張摸彩券不可重複領獎。求每張摸彩券的期望獎金。

解 可獲 10 萬元的機率為 $\frac{1}{10000}$ ，

可獲 5 萬元的機率為 $\frac{10-1}{10000} = \frac{9}{10000}$ ，

可獲 1 萬元的機率為 $\frac{100-1-9}{10000} = \frac{90}{10000}$ ，

可獲 5000 元的機率為 $\frac{1000-1-9-90}{10000} = \frac{900}{10000}$ ，

故期望值為

$$\begin{aligned} & 10000 \times \frac{1}{10000} + 50000 \times \frac{9}{10000} + 10000 \times \frac{90}{10000} + 5000 \times \frac{900}{10000} \\ & = 10 + 45 + 90 + 450 \\ & = 595 \text{ (元)}. \end{aligned}$$

10. 抽獎遊戲中，參加者自箱中抽出一球，確定顏色後放回。只有抽得藍色或紅色球者可得消費券，其金額分別為（抽得藍色球者）2000 元、（抽得紅色球者）1000 元。箱中已置有 2 顆藍色球及 5 顆紅色球。在抽出任一球之機率相等的條件下，主辦單位希望參加者所得消費券金額的期望值為 300 元，則主辦單位應於箱內再置入幾顆其他顏色的球？ **【98 學測】**

解 設再放入 n 顆其他顏色的球

$$P(\text{紅球}) = \frac{5}{n+7}, \quad P(\text{藍球}) = \frac{2}{n+7}$$

$$300 = \frac{2}{n+7} \times 2000 + \frac{5}{n+7} \times 1000$$

$$\Rightarrow 3n + 21 = 40 + 50 \Rightarrow n = 23.$$

故應再放入 23 顆其他顏色的球。