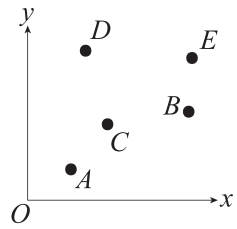
單元 9 二維數據分析

建議配分 每題 10 分。

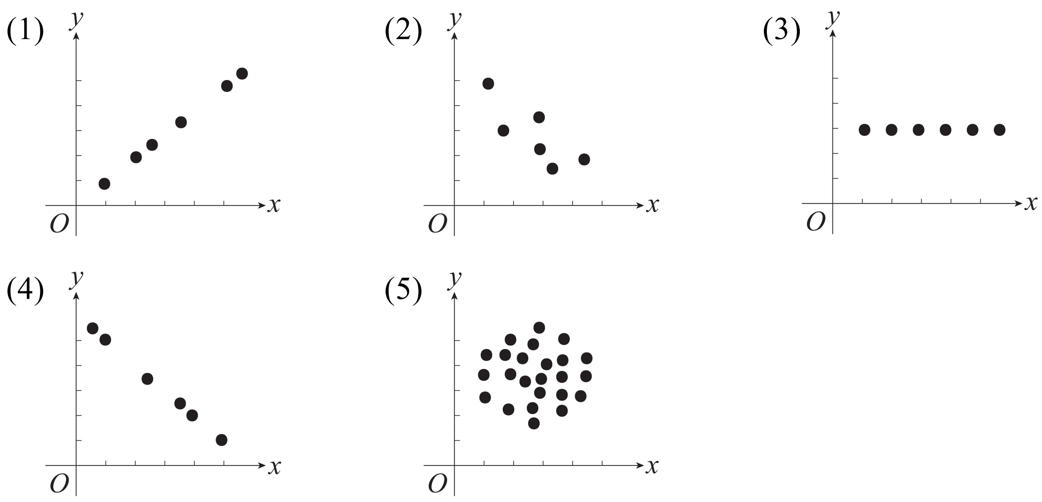
1. 右圖的散布圖中應去掉哪一點後，其相關係數會變大？

(1) A (2) B (3) C (4) D (5) E 。



解▶ 因為去掉 D 點後，其餘 4 點比較接近一直線，所以相關係數變大。
故選(4)。

2. 下列散布圖中，選出表示兩變量間為負相關的選項。



解▶ 散布點的分布集中在斜率為負的直線附近即為負相關。
故選(2)(4)。

3. 兩變量 x 與 y 的數據如下表：

x	1	3	5	2	4
y	9	1	9	3	3

求 x 與 y 的相關係數。

解▸ 兩變量 x 與 y 的平均數分別為

$\mu_x=\dfrac{1+3+5+2+4}{5}=3$，$\mu_y=\dfrac{9+1+9+3+3}{5}=5$。

依公式需要整理如下表：

$x-\mu_x$	$y-\mu_y$	$(x-\mu_x)^2$	$(y-\mu_y)^2$	$(x-\mu_x)(y-\mu_y)$
-2	4	4	16	-8
0	-4	0	16	0
2	4	4	16	8
-1	-2	1	4	2
1	-2	1	4	-2
總和		$S_{xx}=10$	$S_{yy}=56$	$S_{xy}=0$

代入相關係數的計算公式，得 $r=\dfrac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}}\times\sqrt{S_{yy}}}=\dfrac{0}{\sqrt{10}\times\sqrt{56}}=0$。

4. 有 20 筆數據 (x_i,y_i) 都滿足 $y_i=-3x_i+1$，其中 $i=1$，2，…，20，求 x 與 y 的相關係數。

解▸ 因為數據 (x_i,y_i) 都滿足 $y_i=-3x_i+1$，表示所有點都在一斜直線上，相關係數為 1 或 -1。又該直線斜率小於 0，x 與 y 為負相關，所以相關係數為 -1。

5. 關於散布圖的敘述，選出正確的選項。

(1)若各數據點全落在一直線上，表示兩變量呈現完全正相關或完全負相關

(2)若以(μ_x,μ_y)當作原點，各數據點多半集中在第一、三象限，表示兩變量呈現正相關

(3)若各數據點散布上、下、左、右均成對稱，表示兩變量為零相關

(4)若各數據點散布在一平行x軸的直線上，表示兩變量呈現完全正相關

(5)散布圖上各數據點的迴歸直線，其斜率恰等於相關係數。

解▸ (1) 錯誤：若為鉛直線或水平線，則為零相關。

(2) 錯誤：反例：

x	1	2	-1	-2	10	-10
y	2	1	-2	-1	-10	10

$\mu_x=\mu_y=0$，第一、三象限的數據點比第二、四象限的數據點多，

但是兩變量呈現負相關。

(3) 正確。

(4) 錯誤：若平行x軸，表示兩變量為零相關。

(5) 錯誤：當兩變量的標準差相等時方有此性質。

故選(3)。

6. 關於下列的敘述，選出正確的選項。

(1)相關係數r的變動範圍在-1與1之間

(2)當兩變量x與y的相關係數愈大時，代表x與y的相關程度愈強

(3)迴歸直線$y=mx+k$中的斜率m的變動範圍在-1與1之間

(4)由兩變量x與y的數據所求得的迴歸直線之斜率m與相關係數r正負號相同

(5)若兩變量x與y的數據皆滿足$y=ax+b$，則x與y的相關係數$r=1$。

解▸ (1) 正確。

(2) 錯誤：例如相關係數-1，表完全負相關。

(3) 錯誤：因為迴歸直線$y=mx+k$中的斜率m與相關係數r的關係為$m=r\times\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$，

所以m的變動範圍未必在-1與1之間。

(4) 正確。

(5) 錯誤：r可能為1、-1或0。

故選(1)(4)。

7. 兩變量 x 與 y 的數據如下表：

x	1	2	3	4	5
y	3	3	6	3	5

(1)已知 x 與 y 的相關係數為 $\frac{\sqrt{k}}{5}$，求 k 的值。

(2)求 y 對 x 的迴歸直線方程式。

解▸ (1) 兩變量 x 與 y 的平均數分別為

$$\mu_x=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3，\mu_y=\frac{3+3+6+3+5}{5}=4。$$

依公式需要整理如下表：

$x-\mu_x$	$y-\mu_y$	$(x-\mu_x)^2$	$(y-\mu_y)^2$	$(x-\mu_x)(y-\mu_y)$
-2	-1	4	1	2
-1	-1	1	1	1
0	2	0	4	0
1	-1	1	1	-1
2	1	4	1	2
總和		$S_{xx}=10$	$S_{yy}=8$	$S_{xy}=4$

代入相關係數的計算公式，得

$$r=\frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}}\times\sqrt{S_{yy}}}=\frac{4}{\sqrt{10}\times\sqrt{8}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}。故 k=5。$$

(2) 代入迴歸直線方程式 $y-\mu_y=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}(x-\mu_x)$，得 $y-4=\frac{4}{10}(x-3)$，

即 $y=\frac{2}{5}x+\frac{14}{5}$。

8. 設有 n 組數據 (x_i,y_i)，$i=1$，2，…，n，兩變量 x 與 y 的算術平均數分別為 $\mu_x=5$，$\mu_y=3$，標準差分別為 $\sigma_x=2$，$\sigma_y=6$。已知 y 對 x 的迴歸直線過點 $(2,6)$，求兩變量 x 與 y 的相關係數。

解▸ 迴歸直線方程式 $y-\mu_y=m(x-\mu_x)$，其中 $m=r\times\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$。

因為 y 對 x 的迴歸直線方程式為 $y-3=m(x-5)$，且通過點 $(2,6)$，

所以 $6-3=m(2-5)$，解得 $m=-1$。

又 $-1=r\times\frac{6}{2}$，得 $r=-\frac{1}{3}$。故兩變量 x 與 y 的相關係數為 $-\frac{1}{3}$。

9. 某班學生的身高 x 的平均數 $\mu_x=160$ 公分、標準差 $\sigma_x=10$ 公分；體重 y 平均數 $\mu_y=50$ 公斤、標準差 $\sigma_y=8$ 公斤。已知身高和體重的相關係數 $r=0.7$。

(1)求體重 y 對身高 x 的迴歸直線方程式。

(2)利用迴歸直線預測：某人的身高為 170 公分，其體重約為多少公斤？

(3)當將身高單位改為 x' 公吋時，求身高 x' 公吋與體重 y 公斤的相關係數。

解▸ (1) 迴歸直線方程式 $y-\mu_y=m\left(x-\mu_x\right)$，其中 $m=r\times\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=0.7\times\dfrac{8}{10}=0.56$，

故迴歸直線為 $y-50=0.56\left(x-160\right)$，即 $y=0.56x-39.6$。

(2) 將 $x=170$ 代入 $y-50=0.56\left(x-160\right)$，得 $y=50+5.6=55.6$（公斤）。

(3) 相關係數與單位無關。改變 x 的度量單位時，相關係數不會改變。

故 x' 與 y 的相關係數為 0.7。

10. 某飲料店根據過去的銷售紀錄，當每日最高氣溫在 22°C 到 39°C 時，該日飲料的銷售量與當天的最高氣溫之相關係數為 0.99，部分紀錄如下表：

最高氣溫 °C	25	27	29	31	33	35
銷售量（杯）	205	257	303	356	408	464

已知某日最高氣溫為 38°C，依據上述的資訊推測，試問該日飲料的銷售量應接近下列哪個選項？

(1) 490 杯　(2) 520 杯　(3) 542 杯　(4) 616 杯。

解▸ 若以最高氣溫當橫軸，銷售量當縱軸，作散布圖時，因為相關係數為 0.99，所以散布圖的所有點會相當靠近一條斜率為正的直線 L。觀察紀錄表中銷售量的變化：

最高氣溫 °C	25	27	29	31	33	35
銷售量（杯）	205	257	303	356	408	464

+52　+46　+53　+52　+56

得知：最高氣溫每增加 2°C，銷售量約增加 52 杯。

因此，直線 L 的斜率約為 $\dfrac{52}{2}=26$。

令 38°C 時的銷售量為 x 杯。由直線斜率的定義，得 $\dfrac{x-464}{38-35}\approx 26$，

解得 $x\approx 542$，故選(3)。