單元 5 組合 (combination) (LBR) 一年____班 座號：____ 姓名：

1.以下各小題對的打「O」，錯的打「×」：

___(1)從 5 個人中選出 3 人的組合數為 C_3^5

___(2) $C_6^{10}\times 4! = P_6^{10}$

___(3) $C_{20}^{100} = C_{80}^{100}$

___(4)方程式 $x+y+z=5$ 的非負整數解有 C_3^7 組

___(5)在 $(x+y)^{10}$ 的展開式中，x^6y^4 項的係數與 x^4y^6 項的係數相等

解：(1) O：由 C_k^n 定義得知，(2) ×：$C_6^{10}\times 6! = P_6^{10}$，(3) O：20＋80＝100，(4) ×：$H_5^3 = C_5^{3+5-1} = C_5^7$

(5) x^6y^4 項的係數＝C_6^{10}，x^4y^6 項的係數＝C_4^{10}，$C_6^{10} = C_4^{10}$

2.電腦可以將二張不同的人臉合成為一張新面孔。電視節目「最強大腦」選了 60 位藝人的臉，任意將每二位不同的臉都用電腦合成並印出一張新面孔。問：總共印出幾張合成的新面孔？

解：合成的新面孔總共有 $C_2^{60}=1770$

3.從 7 人中選 3 人掃地，另選 2 人拖地，共有幾種選法？

解：先從 7 人中選出 3 人掃地，有 C_3^7 種，剩下的 4 人選出 2 人拖地，有 C_2^4 種，∴乘法原理 $C_3^7\times C_2^4=210$

4.從 7 位男生、5 位女生中選派 4 人參加社區服務，下列情形的選派方法各有多少種？

(1)恰為 2 男 2 女 (2)至少有 1 名女生 (3)男女生至少各 1 名

解：(1) 7 位男生中選出 2 人 C_2^7，5 名女生中選出 2 人 C_2^5，∴ $C_2^7\times C_2^5=210$

(2)全部可能情形」扣除「選出 4 人皆男生」，$C_4^{12}-C_4^7=495-35=460$

(3) 3 男 1 女有 $C_3^7\times C_1^5=175$，2 男 2 女有 $C_2^7\times C_2^5=210$，1 男 3 女有 $C_1^7\times C_3^5=70$，共有 $175+210+70=455$ 種

5.將 2 名教師、4 名學生分成 2 組，每組由 1 名教師和 2 名學生組成，分別安排到甲、乙兩地參加活動，共有多少種分配方法？

解：將 2 名教師，甲、乙各安排 1 人，選法有 $C_1^2\times C_1^1=2$ 種

將 4 名學生，甲、乙各安排 2 人，選法有 $C_2^4\times C_2^2=6$ 種，選法共有 $2\times 6=12$ 種

6.將 4 名大學生分配到 3 個村落服務，每個村落至少 1 名，共有多少種分配方法？

解：先將 4 名大學生分成 2 人、1 人、1 人三組，分法有 $\dfrac{C_2^4\times C_1^2\times C_1^1}{2!}=6$

再將這三組分配到 3 個村落(三組作直線排列)有 3!＝6，∴6×6＝36

7.求 $\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)^7$ 展開式中 x^5 項的係數

解：展開式中的每一項皆形如 $C_k^7(x^3)^{7-k}(\dfrac{1}{x})^k = C_k^7x^{21-4k}$，∴21－4k－5，k＝4，得 x^5 項的係數＝$C_4^7=35$

8.求滿足不等式 $1000 < C_1^n + C_2^n + C_3^n + \cdots + C_n^n < 1200$ 的正整數 n

解：$C_1^n + C_2^n + C_3^n + \cdots + C_n^n = 2^n - C_0^n = 2^n - 1$，$1000 < 2^n - 1 < 1200$，$n=10$

9.桌球比賽中，若規定參與的選手每人都必須和其他選手各比賽一場，賽程總計為 66 場，則選手共有多少人？

解：設選手共有 n 人。因為任兩個人都必須比賽一場，所以共有 C_2^n 種組合

$C_2^n=66$，$(n-12)(n+11)=0$，$\therefore n=12$

10.從 1，2，3，4，5，6，7，8，9 這九個數中，同時取出 4 個不同的數，且其和為偶數，共有多少種取法？

解：這九個數中，偶數有 2, 4, 6, 8 共四個，奇數有 1, 3, 5, 7, 9 共五個

四數皆偶：有 $C_4^4=1$ 種，二偶二奇：有 $C_2^4\times C_2^5=60$ 種，四數皆奇：有 $C_4^5=5$ 種，共有 $1+60+5=66$ 種

11.從「snoopy」一字共 6 個字母中，任選 3 個字母排成一列，共有多少種排法？

解：二同一異(oos 等)：選字 $C_1^1\times C_1^4=4$，排列 $\frac{3!}{2!}=3$，$\therefore 4\times3=12$

三異(sno 等)：選字 $C_3^5=10$，排列 $3!=6$，$\therefore 10\times6=60$，共 $12+60=72$

12.某高中免試就學區有 8 所高中，三兄弟恰好就讀其中 2 所高中。問：就讀的情形共有多少種？

解：先將三兄弟分 2 人、1 人兩組，分法有 $C_2^3\times C_1^1=3$ 種

再將 2 人組選 1 所高中，選法有 $C_1^8=8$，1 人組選另 1 所高中選法有 $C_1^7=7$，$\therefore 3\times8\times7=168$

13.已知 $(1+ax)(1+x)^5$ 的展開式中 x^2 項的係數為 5，求實數 a 的值

解：利用二項式定理，得 $(1+ax)(1+x)^5=(1+ax)(1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5)$，展開式中 x^2 項為 $10x^2+5ax^2=(10+5a)x^2$

得 $10+5a=5$，解得 $a=-1$