教材新視界．活力♥全華
全華TopLine
全球華人的知識薪傳
www.chwa.com.tw
2017 第12期 獨家發行
【數學 MATHEMATICS 專刊】
誠摯邀請您，加入全華新鮮數粉絲團
facebook http://www.facebook.com/chwamath
按 一同加入全華【數學科】粉絲團
電子檔索取QR
https://goo.gl/6JS7Dx

106 年學科能力測驗 數學考科趨勢分析

程昱揚　老師

前言

106 年學測在 1 月 20、21 日登場，2 月 16 日公布學生成績、五標等資訊。筆者認為 106 年的考生是高中免試入學的先驅，是高中生涯告別重讀規定的第一年，也是教育部首開機制斥資輔導入學國文、英文、數學成績得 C 之學生的第一年。

筆者發現 99 課綱微調與 99 課綱的主要差異為原置於第五冊的「弧度，弧度量與度度量的互相轉換」移至第三冊，而 106 試題的第 6 題正是此內容的命題。又整份試題幾近無基礎題，導致均標 6 級分，前標也才 11 級分，意即對於中等或中下程度的學生完全盲然。以上這些狀況是否意味著：

- 第四冊「三向量所張出的平行六面體體積」改為 B 版內容後，會出現在指定科目考試？
- 轉移矩陣限定為「二階」後，會出現在指定科目考試的數學甲或數學乙？
- 教育部是否片面認為輔導 C 成績的學生後，已有效地將全國學生成績提高了？……

因此，筆者希望由下列各面向之指標，提出建言，提供正在輔導學生準備大考的老師們參考。

一、歷屆(100~106)年五標成績

年度＼五標	頂標	前標	均標	後標	底標	級距
100	13	11	7	4	3	6.67
101	13	11	7	4	3	6.57
102	12	10	7	4	3	6.42
103	13	11	8	5	3	6.67
104	12	10	7	4	3	6.53
105	12	10	7	4	3	6.48
106	11	9	6	3	2	6.29

由上表數據可明顯看出 106 年的五標都是歷年最低，或許這是因為沒有基本題目所造成，考生可說是猜數學而不是考數學能力。此恐會造成學生對數學產生畏懼，也可能造成繁星、申請入學招生選才困擾。因級距也是歷年最低，是什麼原因致使對資優學生也產生挫敗，恐值得大考中心作一番研究探討！

而筆者也發現耐心而沉穩，不慌忙、不貪求的學生反而能發揮實力，考得高分！因此建議考生面對試題時，先行瀏覽全部試題，勾選有感覺的題目，再就這些題目詳細利用已學過的相關定義、性質等，冷靜尋求解題方法，以今年為例：單選 2、3、4，多選 10，選填 A、B、C、D 等題，對中等程度的學生是可以解出的，得 6 級分以上並非困難。

二、106 年試題分布分析

冊別	章節	106 試題題目	占分	冊別占分
第一冊	Ch1 數與式			25
	Ch2 多項式函數	4，8，A，C	15	
	Ch3 指數與對數函數	2，E	10	
第二冊	Ch1 數列與級數	A，D	5	30
	Ch2 排列、組合	7，12	10	
	Ch3 機率	F	5	
	Ch4 數據分析	1，5	10	
第三冊	Ch1 三角	6，11	10	25
	Ch2 直線與圓	9	5	
	Ch3 平面向量	B，G	10	
第四冊	Ch1 空間向量	4，13	7.5	20
	Ch2 空間中的平面與直線	10	5	
	Ch3 矩陣	D	2.5	
	Ch4 二次曲線	3	5	

由上表得知106年試題各冊分布均勻，第1冊【Ch2 多項式函數】依然是命題重點，而歷年來第1冊【Ch1 數與式】均有試題出現，或以生活數學、時事等命題，但今年卻意外的沒有，教師可留意明年是否再重拾被命題！

再者，【排列、組合】、【機率】、【數據分析】占106年試題的比重較歷屆為高，顯示命題老師具統計專長背景居多，筆者認為這不是常態，同學宜以熟悉定義、運算性質等為重點準備。

又【空間向量】、【空間中的平面與直線】是考生較弱的主題，往年出現在指考居多，106年卻以單一重點性質方式命題，也是少見！凸顯同學在準備上，應注重條列式重點複習（如空間中直線表示法、三角形面積的求法、三角形鈍角 / 直角 / 銳角判斷方法等），注意章節之間相關性質的整合。

而【二次曲線】泛指拋物線、橢圓、雙曲線這三項，106年勉強在第3題出現，利用動點結合漸近線出現，根據筆者的觀察，大膽預測二次曲線的試題僅會以基本定義出現，其餘不會列入考試重點，建議請同學調整準備方向。

三、106年試題測驗能力指標分析

題型	題目	測驗能力指標	註
單選題	1	一維數據分析，平均數（加權平均數）原理	時事題活用
	2	指數律，指數之值的計算	傳統重點
	3	動點與參數式觀念，拋物線、雙曲線與漸近線之作圖	
	4	空間坐標觀念，二次函數最大值之求法	跨單元題目
	5	二維數據之散佈圖、相關係數與最適直線的判讀	
	6	度與弧度關係，廣義三角函數之計算	課綱微調內容
	7	直線排列，加法與乘法原理	傳統重點
多選題	8	二、三、四次單項函數之作圖，方程式（圖形）解的概念	跨單元題目
	9	點與圓的關係，平面上兩點間距離之計算	只有1個答案
	10	空間中直線三種表示法，兩直線間的四種關係，形成平面的四個條件	單元性質
	11	正弦、餘弦定理，三角形邊角關係，三角形面積之計算	傳統重點
	12	集合的運算，文氏圖，取捨（排容）原理	仿歷屆試題
	13	空間向量之內積計算，三角形邊角關係（角度之判斷性質）	
選填題	A	遞迴數列概念，二次函數求法（一般式假設或牛頓、拉格朗日插值法等）	跨單元題目
	B	平面向量之線性組合觀念，三點共線性質	
	C	整係數多項式一次因式檢驗法（牛頓法），方程式根的求法	傳統重點
	D	等差數列、等差級數與等差中項概念，高斯消去法，矩陣運算解的觀念	跨單元題目
	E	對數的運算，內差法的原理與計算	原理計算
	F	排列方法，不盡相異物排列方法數之計算，古典機率之定義	疑抄襲仿間書籍
	G	三角形相似原理，斜邊上高之求法，等速運動原理，或測量之應用	結合物理

根據上表的測驗能力指標分析中，可見每一題至少包含兩個性質、概念以上，考生在準備時，應該著重解題所利用到的定義、定理、性質等，加以熟練應用，強化對各種解題方法的連結。

其中【指數與對數函數】、【二次函數最大值】、【多項式函數】、【排列組合之加法與乘法原理】、【點與圓的關係】、【平面上兩點間距離】、【取捨（排容）原理】、【正弦、餘弦定理】、【牛頓法】等，仍然是測驗能力的重要指標。

茲將 106 年試題特色分析如下：

第 1 題的「寶可夢」、第 2 題手機螢幕、第 7 題以「午餐計畫」等選用自生活情境的題材；

第 4 題空間立體題目，為歷屆試題，解題時一律先坐標化的概念不變；

第 8 題結合二、三、四次單項函數作圖之幾何判斷，尤其三、四次式更是中等程度學生的困難單元；

第 10 題著實完美的測驗考生對於「空間中二直線的四種關係」、「形成平面的四種條件」二大性質的了解；

第 11 題將最近發現的數學鋪滿性質，逐步利用小題引導（測驗）考生利用「三角性質」、「廣義三角性質」等；

選填 D，將等差數列、等差中項結合，用在矩陣之高斯消去法；

選填 G，結合物理，測驗考生對平面向量或三角測量的應用；

上述等試題都可見到命題老師的用心設計，但是也由於結合大量數學性質作為試題，使得缺乏基本題，致使試題鑑別度略顯失真（無法斷定考生程度差異）。

四、結論

1. 106 年的考題雖然保有歷年試題的重點，但是敘述略長、加深解題的廣度與難度，只會單純利用公式、性質等解題的學生無法獲取高分。
2. 筆者也希望命題教師兼顧全體學生學習之差異，設計出可以分辨學生數學能力高低的試題，也兼具提升學生對學習數學的喜愛與信心。也由衷懇求真正回歸單選題單一答案，多選題不再出現單一答案的現象（106 年多選第 9 題，100 年學測多選第 13 題，102 年指考乙多選第 6 題都只有一個答案），造成考生困擾。
3. 建議準備七月指考的同學，秉持熟練指考傳統的重點外，留意時事議題，如一例一休、年金改革等，可能會結合【排列組合】、【數據分析】、【相關係數】、【期望值】、【線性規劃】、【極限收斂、發散性質】等單元命題。
4. 面對即將改變課程修習與大學入學考試方式的未來，建議同學準備重心放在著重與大學銜接課程之單元，如【多項式函數（特別是最大值、最小值）】、【基本三角函數的計算】、【數據分析的平均數、標準差等】、【數列與級數】、【指數與對數】、【向量基本運算】、【機率基本運算】、【直線與圓】等，屆時可能再區分為文科、商業科系、理工科系等不同的重點準備。

106 學年度學科能力測驗試題～數學考科～

第壹部分：選擇題（占65分）

一、單選題（占35分）

1. 已知某校老師玩過「寶可夢」的比率為 r_1，而學生玩過的比率為 r_2，其中 $r_1 \neq r_2$．由下列選項中的資訊，請選出可以判定全校師生玩過「寶可夢」的比率之選項．
(1)全校老師與學生比率　(2)全校老師人數　(3)全校學生人數
(4)全校師生人數　(5)全校師生玩過「寶可夢」人數．

答：(1)　【出處】第二冊 ch4 數據分析

解：設全校老師有 n_1 人，全校學生有 n_2 人，

則全校師生玩過「寶可夢」的比率 $= \dfrac{n_1r_1 + n_2r_2}{n_1 + n_2} = \left(\dfrac{n_1}{n_1+n_2}\right) r_1 + \left(\dfrac{n_2}{n_1+n_2}\right) r_2$，

其中 $\dfrac{n_1}{n_1+n_2}$，$\dfrac{n_2}{n_1+n_2}$ 為比率．

2. 某個手機程式，每次點擊螢幕上的數 a 後，螢幕上的數會變成 a^2．當一開始時螢幕上的數 b 為正且連續點擊螢幕三次後，螢幕上的數接近 81^3．試問實數 b 最接近下列哪一個選項？
(1) 1.7　(2) 3　(3) 5.2　(4) 9　(5) 81．

答：(3)　【出處】第一冊 ch3 指數與對數函數

解：開始 $b \xrightarrow{\text{點擊 1 次}} b^2 \xrightarrow{\text{點擊 2 次}} (b^2)^2 = b^4 \xrightarrow{\text{點擊 3 次}} (b^4)^2 = b^8$，

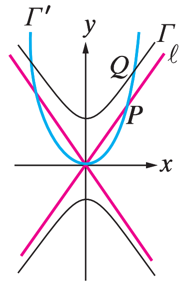
則得知 $b^8 = 81^3 = 3^{12} \Rightarrow b = 3^{\frac{12}{8}} = 3^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3} \approx 3 \times 1.732 = 5.196 \approx 5.2$．

3. 設 $\Gamma: \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ 為坐標平面上一雙曲線，且其通過第一象限的漸近線為 ℓ．考慮動點 (t, t^2)，從時間 $t = 0$ 時出發．當 $t > 0$ 時，請選出正確的選項．
(1)此動點不會碰到 Γ，也不會碰到 ℓ　(2)此動點會碰到 Γ，但不會碰到 ℓ
(3)此動點會碰到 ℓ，但不會碰到 Γ　(4)此動點會先碰到 Γ，再碰到 ℓ
(5)此動點會先碰到 ℓ，再碰到 Γ．

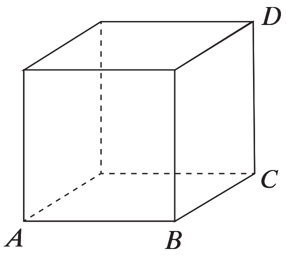
答：(5)　【出處】第四冊 ch4 二次曲線

解：(i) $\Gamma: \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ 的中心為 $(0, 0)$，且圖形為鉛直貫軸的雙曲線．

(ii) 動點 $(t, t^2) \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$，消去參數 t 之後，得方程式為 $\Gamma': y = x^2$，
其圖形為開口向上，頂點 $(0, 0)$ 的拋物線，
如右圖，Γ' 上的動點會先碰到 ℓ（P 點），再碰到 Γ（Q 點）．



4. 在右圖的正立方體上有兩質點分別自頂點 A, C 同時出發，各自以等速直線運動分別向頂點 B, D 前進，且在 1 秒後分別同時到達 B, D. 請選出這段時間兩質點距離關係的正確選項.



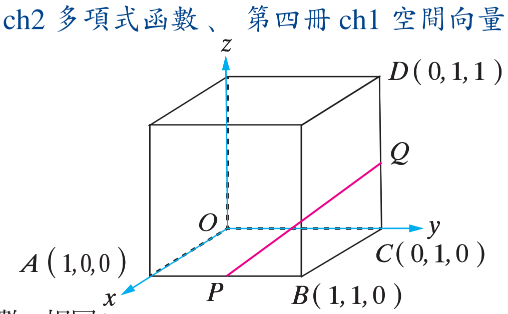
(1)兩質點的距離固定不變 (2)兩質點的距離越來越小

(3)兩質點的距離越來越大 (4)在 $\frac{1}{2}$ 秒時兩質點的距離最小

(5)在 $\frac{1}{2}$ 秒時兩質點的距離最大.

答：(4) 【出處】第一冊 ch2 多項式函數、第四冊 ch1 空間向量

解：1.坐標化，定邊長為 1, 如右圖，



$\therefore A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(0, 1, 0), D(0, 1, 1)$.

2.直線 $AB \begin{cases} x = 1 + 0 \cdot t = 1 \\ y = 0 + 1 \cdot t = t \\ z = 0 + 0 \cdot t = 0 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, 設 $P(1, t, 0)$,

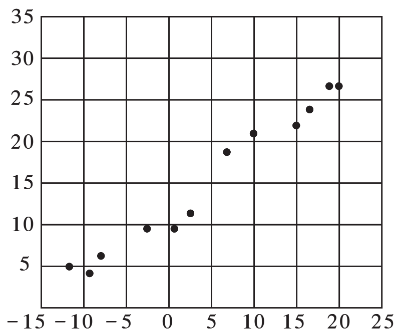
直線 $CD \begin{cases} x = 0 + 0 \cdot t = 0 \\ y = 1 + 0 \cdot t = 1 \\ z = 0 + 1 \cdot t = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ (等速直線運動，參數 t 相同),

設 $Q(0, 1, t)$, $\therefore \overrightarrow{PQ} = (-1, 1-t, t)$,

3. $\overline{PQ} = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-1)^2 + (1-t)^2 + t^2} = \sqrt{2t^2 - 2t + 2} = \sqrt{2(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{2}}$,

即當 $t = \frac{1}{2}$ 時，$\overline{PQ}$ 有最小值 $= \sqrt{\frac{3}{2}}$.

5. 右圖是某城市在 2016 年的各月最低溫 (橫軸 x) 與最高溫 (縱軸 y) 的散佈圖. 今以溫差 (最高溫減最低溫) 為橫軸且最高溫為縱軸重新繪製一散佈圖. 試依此選出正確的選項.



(1)最高溫與溫差為正相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性強

(2)最高溫與溫差為正相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性弱

(3)最高溫與溫差為負相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性強

(4)最高溫與溫差為負相關，且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性弱

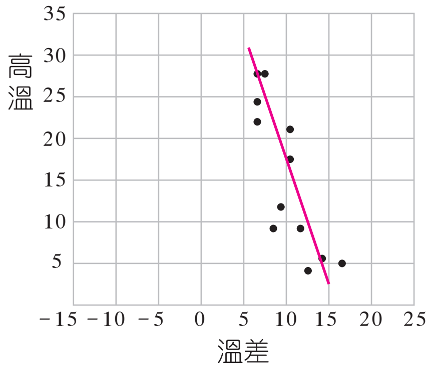
(5)最高溫與溫差為零相關.

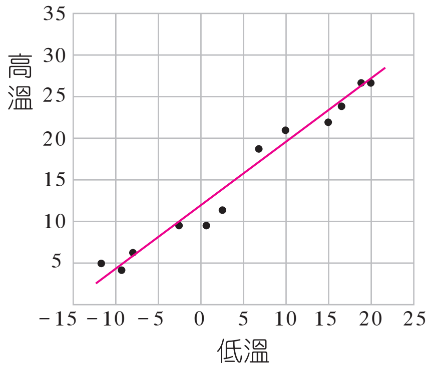
答：(4) 【出處】第二冊 ch4 數據分析

解： 1.根據題意，數據如下表：

低溫	－12	－9	－8	－3	1	3	7	10	15	17	19	20
高溫	5	4	6	9	9	12	18	21	22	24	27	27
溫差	17	13	14	12	8	9	11	11	7	7	8	7

2.①最高溫與溫差為負相關　　②最高溫與最低溫為正相關





散佈圖中（最高溫與溫差）比（最高溫與最低溫）分散，即（最高溫與溫差）比（最高溫與最低溫）之相關性弱．

6. 試問有多少個實數 x 滿足 $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ 且 $\cos x^\circ \le \cos x$？
(1) 0 個　(2) 1 個　(3) 2 個　(4) 4 個　(5)無窮多個．

答：(1)　　【出處】第三冊 ch1 三角

解：在 $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$，以 $\pi \approx 3.14$ 代入，得 $1.57 \le x \le 4.71$，則 $\cos x^\circ > 0$（x°為第一象限角），
在 $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ 中，$\cos x < 0$（x 為第二、三象限角），
則 $\cos x^\circ$（正數）$\le \cos x$（負數）為無解，∴ 0 個．

7. 小明想要安排從星期一到星期五共五天的午餐計畫．他的餐點共有四種選擇：
牛肉麵、大滷麵、咖哩飯及排骨飯．小明想要依據下列兩原則來安排他的午餐：
(甲) 每天只選一種餐點但這五天中每一種餐點至少各點一次
(乙) 連續兩天的餐點不能重複且不連續兩天吃麵食
根據上述原則，小明這五天共有幾種不同的午餐計畫？
(1) 52　(2) 60　(3) 68　(4) 76　(5) 84.

答：(2)　　【出處】第二冊 ch2 排列、組合

解：根據題意，五天的選擇有① 3 天麵 + 2 天飯、② 2 天麵 + 3 天飯　兩種情形，

① 3 天麵 + 2 天飯，其五天排列情形如下：

星期	一	二	三	四	五	方法數
午餐	麵	飯	麵	飯	麵	$\underbrace{C^2_1}_{\text{選擇麵}} \times \underbrace{\frac{3!}{2!}}_{\text{麵排入 3 天方法}} \times \underbrace{2\times 1}_{\text{飯排入 2 天方法}} = 2\times 3\times 2 = 12$

② 2 天麵 + 3 天飯，其五天排列情形如下：

星期	一	二	三	四	五	方法數
午餐	飯	麵	飯	麵	飯	$\underbrace{\frac{3!}{2!}}_{\text{飯排入 3 天方法}} \times \underbrace{C^2_1}_{\text{選擇麵}} \times \underbrace{2}_{\text{麵互換}} = 3\times 2\times 2 = 12$
午餐	麵	飯	飯	飯	麵	$\underbrace{2}_{\text{選擇麵}} \times \underbrace{C^2_1}_{\text{選周三飯}} \times \underbrace{1}_{\text{周二四飯}} = 2\times 2\times 1 = 4$
午餐	麵	飯	飯	麵	飯	$\underbrace{2}_{\text{選擇麵}} \times \underbrace{2}_{\text{周二三飯}} \times \underbrace{2}_{\text{周五飯}} = 8$
午餐	麵	飯	麵	飯	飯	$\underbrace{2}_{\text{選擇麵}} \times \underbrace{2}_{\text{周四五飯}} \times \underbrace{2}_{\text{周二飯}} = 8$
午餐	飯	麵	飯	飯	麵	$\underbrace{2}_{\text{選擇麵}} \times \underbrace{2}_{\text{周三四飯}} \times \underbrace{2}_{\text{周一飯}} = 8$
午餐	飯	飯	麵	飯	麵	$\underbrace{2}_{\text{選擇麵}} \times \underbrace{2}_{\text{周一二飯}} \times \underbrace{2}_{\text{周四飯}} = 8$

共有 $12 + (12 + 4 + 8 + 8 + 8 + 8) = 60$（種）.

二、多選題（占30分）

8. 設 m, n 為小於或等於 4 的相異正整數且 a, b 為非零實數 . 已知函數 $f(x) = ax^m$ 與函數 $g(x) = bx^n$ 的圖形恰有 3 個相異交點，請選出可能的選項 .
(1) m, n 皆為偶數且 a, b 同號　(2) m, n 皆為偶數且 a, b 異號
(3) m, n 皆為奇數且 a, b 同號　(4) m, n 皆為奇數且 a, b 異號
(5) m, n 為一奇一偶 .

答：(1)(3)　　【出處】第一冊 ch2 多項式函數

解：1.當 m, n 皆為偶數時：

$\begin{cases} m=0 \\ n=0 \end{cases}$，則 $f(x)=a,\ g(x)=b$，不可能有 3 個相異交點，

$\begin{cases} m=0 \\ n=2 \end{cases}$，則 $f(x)=a,\ g(x)=bx^2$，即 $a=bx^2$，不可能有 3 個相異交點；同理 $\begin{cases} m=2 \\ n=0 \end{cases}$ 時，

$\begin{cases} m=0 \\ n=4 \end{cases}$，則 $f(x)=a,\ g(x)=bx^4$，即 $a=bx^4$，不可能有 3 個相異交點；同理 $\begin{cases} m=4 \\ n=0 \end{cases}$ 時，

$\begin{cases} m=2 \\ n=2 \end{cases}$，則 $f(x)=ax^2,\ g(x)=bx^2$，即 $ax^2=bx^2$，不可能有 3 個相異交點，

$\begin{cases} m=2 \\ n=4 \end{cases}$（或 $\begin{cases} m=4 \\ n=2 \end{cases}$ 亦同），則 $f(x)=ax^2,\ g(x)=bx^4$，即 $ax^2=bx^4 \Rightarrow x^2(bx^2-a)=0$，

則 $x=0$（重根），而 $bx^2-a=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$，當 a, b 同號時，$\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$ 有實數解，

即共有 $x=0, \pm\sqrt{\frac{a}{b}}$ 三根 .

2. 當 m, n 皆為奇數時：

$\begin{cases} m=1 \\ n=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=3 \\ n=3 \end{cases}$ 時，不可能有 3 個相異交點，

$\begin{cases} m=1 \\ n=3 \end{cases}$（或 $\begin{cases} m=3 \\ n=1 \end{cases}$ 亦同），則 $f(x)=ax^1$，$g(x)=bx^3$，即 $ax=bx^3 \Rightarrow x(bx^2-a)=0$，

$\therefore x=0$，而 $bx^2-a=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{a}{b}}$，當 a, b 同號時，$\pm\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 有實數解，

即共有 $x=0, \pm\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 三根 .

3. 當 m, n 為一奇一偶數時：

仿照上式分析，如 $\begin{cases} m=0 \\ n=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=1 \\ n=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=1 \\ n=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=2 \\ n=3 \end{cases}$ 等等，不可能有 3 個相異交點 .

9. 設 Γ 為坐標平面上的圓，點 $(0, 0)$ 在 Γ 的外部且點 $(2, 6)$ 在 Γ 的內部 . 請選出正確的選項 .

(1) Γ 的圓心不可能在第二象限

(2) Γ 的圓心可能在第三象限且此時 Γ 的半徑必定大於 10

(3) Γ 的圓心可能在第一象限且此時 Γ 的半徑必定小於 10

(4) Γ 的圓心可能在 x 軸上且此時 Γ 圓心的 x 坐標必定小於 10

(5) Γ 的圓心可能在第四象限且此時 Γ 的半徑必定大於 10.

答：(5)　　【出處】第三冊 ch2 直線與圓

解：1. 根據題意，作一示意圖 Γ 如右圖，不失一般性

$\because$ 點 $(0, 0)$ 在 Γ 的外部且點 $P(2, 6)$ 在 Γ 的內部，

$\therefore$ 得知若圓 Γ 的圓心為 C，則滿足 $d(C, P) < d(C, O)$.

2. 承上述 1，當 $d(C, P) = d(C, O)$ 時，圓心 C 在直線 L 上，

其中直線 L 為 $\overline{OP}$ 的中垂線（通過點 $(1, 3)$ 且垂直 $\overline{OP}$），

得 $L：x+3y=10$.

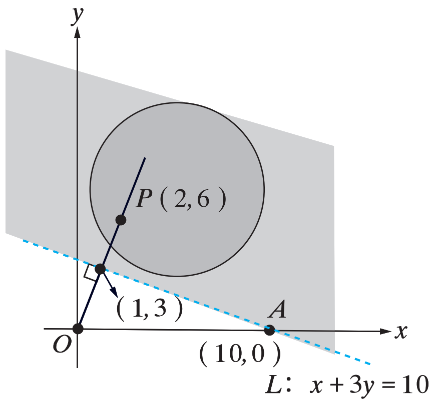
3. 得圓心所在區域為不包含直線 L 的斜線區域，如右圖 .

(1) Γ 的圓心可能在第二象限，錯誤 .

(2) Γ 的圓心不可能在第三象限，錯誤 .

(3) Γ 的半徑可能大於 10，錯誤 .

(4) x 坐標必定大於 10（大於 A 點之 x 分量），錯誤 .



10. 坐標空間中有三直線 $L_1：\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$，$L_2：\begin{cases} x-2y+2z=-4 \\ x+y-4z=5 \end{cases}$，$L_3：\begin{cases} x=-t \\ y=-2-t \\ z=4+4t \end{cases}$，$t$ 為實數 . 請選出正確的選項 .

(1) L_1 與 L_2 的方向向量互相垂直　(2) L_1 與 L_3 的方向向量互相垂直

(3) 有一個平面同時包含 L_1 與 L_2　(4) 有一個平面同時包含 L_1 與 L_3

(5) 有一個平面同時包含 L_2 與 L_3 .

答：(2)(3)(4)　　【出處】第四冊 ch2 空間中的平面與直線

解：直線 L_1：$\begin{cases} x=1+2k \\ y=-1+2k \\ z=k \end{cases}$，$k$ 為實數，設方向向量為 $\overrightarrow{d_1}=(2, 2, 1)$，

直線 L_2 中，$\because (1, -2, 2)\times(1, 1, -4)=(6, 6, 3)=3(2, 2, 1)$，取方向向量為 $\overrightarrow{d_2}=(2, 2, 1)$，

且令 $z=0$，$\begin{cases} x-2y=-4 \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$，$\therefore L_2$：$\begin{cases} x=2+2m \\ y=3+2m \\ z=m \end{cases}$，$m$ 為實數，

直線 L_3：$\begin{cases} x=-t \\ y=-2-t \\ z=4+4t \end{cases}$，$t$ 為實數，取方向向量為 $\overrightarrow{d_3}=(1, 1, -4)$，

(1) $\overrightarrow{d_1}=(2, 2, 1) \,//\, \overrightarrow{d_2}=(2, 2, 1)$，錯誤.

(2) $\because \overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_3}=(2, 2, 1)\cdot(1, 1, -4)=2+2-4=0$，$\therefore \overrightarrow{d_1}\perp\overrightarrow{d_3}$.

(3) $\because \overrightarrow{d_1} \,//\, \overrightarrow{d_2}$，且 L_1 上一點 $(1, -1, 0)$ 不在 L_2 上，$\therefore L_1 \,//\, L_2$，則二平行直線可形成一平面.

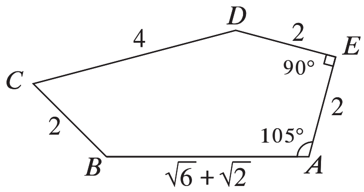
(4) $\because \overrightarrow{d_1}\perp\overrightarrow{d_3}$，且 L_3：$\begin{cases} x=-t \\ y=-2-t \\ z=4+4t \end{cases}$ 代入 L_1，得 $\dfrac{-t-1}{2}=\dfrac{-t-1}{2}=\dfrac{4+4t}{1}$，得知 $t=-1$，

$\therefore$ 交點為 $(1, -1, 0) \Rightarrow L_1$ 與 L_3 為相交一點的二直線，必可形成一平面.

(5) $\because \overrightarrow{d_2}$ 不平行於 $\overrightarrow{d_3}$，且 $\begin{cases} x=2+2m=-t \\ y=3+2m=-2-t \\ z=m=4+4t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t+2m=-2 \\ t+2m=-5 \\ 4t-m=-4 \end{cases} \Rightarrow$ 無解.

$\therefore L_2$ 與 L_3 為歪斜關係，不存在一個平面同時包含 L_2 與 L_3.

11. 最近數學家發現一種新的可以無縫密鋪平面的凸五邊形 $ABCDE$，其示意圖如下.
關於這五邊形，請選出正確的選項.



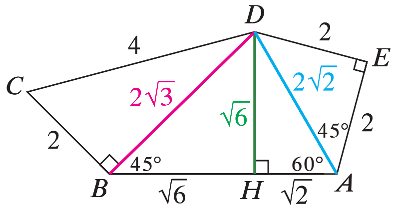
(1) $\overline{AD}=2\sqrt{2}$　(2) $\angle DAB=45°$

(3) $\overline{BD}=2\sqrt{6}$　(4) $\angle ABD=45°$

(5) $\triangle BCD$ 的面積為 $2\sqrt{2}$.

答：(1)(4)　　【出處】第三冊 ch1 三角

解：(1) 連接 $\overline{AD}$，在直角 $\triangle ADE$ 中，$\overline{AD}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$



(2) 在直角 $\triangle ADE$ 中，$\angle DAE=45°$，$\therefore \angle DAB=60°$.

(3)(4) 連接 $\overline{BD}$，在 $\triangle ABD$ 中，作 $\overline{DH}\perp\overline{AB}$ 於 H，

在 $\triangle ADH$ 中，$\because \angle ADH=30°$，

$\therefore \overline{AH}=\dfrac{1}{2}\overline{AD}=\sqrt{2}$，則 $\overline{BH}=\sqrt{6}$.

得 $\overline{DH}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-\sqrt{2}^{\,2}}=\sqrt{6}$，所以 $\triangle BDH$ 為等腰直角三角形，

故 $\overline{BD}=\sqrt{\sqrt{6}^{\,2}+\sqrt{6}^{\,2}}=2\sqrt{3}$，$\angle ABD=45°$.

(5) $\because \overline{CD}:\overline{BC}:\overline{BD}=4:2:2\sqrt{3}$，$\therefore \triangle BCD$ 為直角三角形

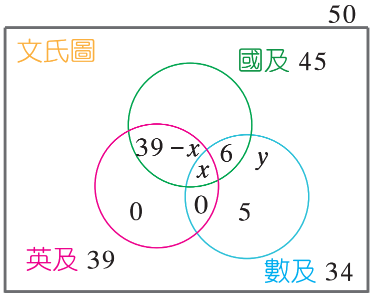
則 $\triangle BCD$ 的面積 $=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

12. 某班級 50 位學生，段考國文、英文、數學及格的人數分別為 45、39、34 人，且英文及格的學生國文也都及格．現假設數學和英文皆及格的有 x 人，數學及格但英文不及格的有 y 人．請選出正確的選項．
(1) $x+y=39$　(2) $y\le 11$　(3)三科中至少有一科不及格的學生有 $39-x+y$ 人
(4)三科中至少有一科不及格的學生最少有 11 人
(5)三科中至少有一科不及格的學生最多有 27 人．

答：(2)(5)　【出處】第二冊 ch2 排列、組合

解：根據題意，列表如下：

	英及	英不及		合計
	國及	國及	國不及	
數及	x	y		34 人
數不及	$39-x$			16 人
合計	39 人	$45-39=6$	5	50 人

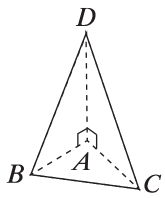


(1) $x+y=34$, 錯誤．
(2) $\because\ y\le 6+5=11$, 正確．
(3)三科中至少有一科不及格的學生 = 全部 − (三科都及格) $=50-x$，錯誤．
(4) $\because$ 三科都及格 $=x$, 又 $x\le 34$ 且 $x\le 39$, $\therefore\ x\le 34$．
則 三科中至少有一科不及格的學生 $=50-x\ge 50-34=16$, 故最少有 16 人，錯誤．
(5) $\because\ y\le 11$, $\therefore\ y$ 最多 11 人，由(1) $x+y=x+11=34$, 即 x 最少有 $34-11=23$ 人，
則三科中至少有一科不及格的學生最多 $=50-x\le 50-23=27$ 人，正確．

13. 空間中有一四面體 $ABCD$. 假設 $\overrightarrow{AD}$ 分別與 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 垂直，請選出正確的選項．
(1) $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{DA}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　(2)若 $\angle BAC$ 是直角，則 $\angle BDC$ 是直角
(3)若 $\angle BAC$ 是銳角，則 $\angle BDC$ 是銳角　(4)若 $\angle BAC$ 是鈍角，則 $\angle BDC$ 是鈍角
(5)若 $\overline{AB}<\overline{DA}$ 且 $\overline{AC}<\overline{DA}$，則 $\angle BDC$ 是銳角．

答：(3)(5)　【出處】第四冊 ch1 空間向量

解：作示意圖如右，由題意知 $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AC}$,



(1) $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC})$
$=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
$=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
$=|\overrightarrow{DA}|^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{DA}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, 錯誤．
(2)若 $\angle BAC$ 是直角 $\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, $\therefore\ \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{DA}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{DA}^2+0>0$,
則 $\angle BDC$ 是銳角，錯誤．
(3)若 $\angle BAC$ 是銳角 $\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$, $\therefore\ \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{DA}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$, 則 $\angle BDC$ 是銳角，正確．

(4)若 $\angle BAC$ 是鈍角 $\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<0$, $\therefore \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{DA}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, 無法確定正負或 0,

則無法判斷 , 錯誤 .

(5)若 $\overline{AB}<\overline{DA}$ 且 $\overline{AC}<\overline{DA}$ $\Rightarrow \overline{AB}\times\overline{AC}<\overline{DA}\times\overline{DA}=\overline{DA}^2$,

$\therefore \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{DA}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>\overline{AB}\times\overline{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AC}+\overline{AB}\times\overline{AC}\cos(\angle BAC)\geq 0$,

（$\because -1\leq\cos(\angle BAC)\leq 1$）

$\therefore \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}>0$, 即 $\angle BDC$ 是銳角 .

第貳部分：選填題（占35分）

A. 遞迴數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_n=a_{n-1}+f(n-2)$, 其中 $n\geq 2$ 且 $f(x)$ 為二次多項式 .
若 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=5$, $a_4=12$, 則 $a_5=$ __________.

答：25 【出處】第一冊 ch2 多項式函數 、 第二冊 ch1 數列與級數

解： 1.根據題意 , 得知如下：

當 $n=2$ 時 , $a_2=a_1+f(0)\Rightarrow 2=1+f(0)$, $\therefore f(0)=1$.

當 $n=3$ 時 , $a_3=a_2+f(1)\Rightarrow 5=2+f(1)$, $\therefore f(1)=3$.

當 $n=4$ 時 , $a_4=a_3+f(2)\Rightarrow 12=5+f(2)$, $\therefore f(2)=7$.

2.$\because f(x)$ 為二次多項式 , 設 $f(x)=ax^2+bx+c$,

$\therefore f(0)=1=c$, $f(1)=3=a+b+c$, $f(2)=7=4a+2b+c$.

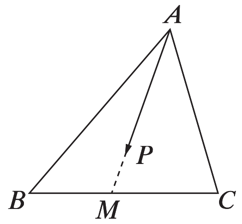
$\Rightarrow$ 解得 $a=b=c=1$, 即 $f(x)=x^2+x+1$,

3.當 $n=5$ 時 , $a_5=a_4+f(3)=12+9+3+1=25$.

B. 在坐標平面上 , $\triangle ABC$ 內有一點 P 滿足 $\overrightarrow{AP}=(\frac{4}{3},\frac{5}{6})$ 及 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$. 若 A, P 連線交 $\overline{BC}$ 於 M, 則 $\overrightarrow{AM}=($__________, __________$)$.（化成最簡分數）

答：$(\frac{40}{21},\frac{25}{21})$ 【出處】第三冊 ch3 平面向量

解：根據題意 , 作示意圖如右 ,



$\because \overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$, 得知 $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\neq 1$, 表示 B, P, C 不共線 ,

設 $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AP}=k(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC})=\frac{k}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{5}\overrightarrow{AC}$,

$\because B$, M, C 三點共線 , $\therefore \frac{k}{2}+\frac{k}{5}=1$, 解得 $k=\frac{10}{7}$.

故 $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AP}=\frac{10}{7}\overrightarrow{AP}=\frac{10}{7}(\frac{4}{3},\frac{5}{6})=(\frac{40}{21},\frac{25}{21})$.

C. 若 a 為正整數且方程式 $5x^3+(a+4)x^2+ax+1=0$ 的根都是有理根，則 $a=$ ＿＿＿＿＿.

答：7　　【出處】第一冊 ch2 多項式函數

解：設多項式 $f(x)=5x^3+(a+4)x^2+ax+1$,

根據牛頓定理，得知 $f(x)$ 可能之一次因式有 $x-1, x+1, 5x+1, 5x-1$,

$\because$ a 為正整數，即 $f(x)=5x^3+(a+4)x^2+ax+1$ 的係數皆為正數，$\therefore f(x)=0$ 不可能有正數根，

故 $f(x)$ 可能之一次因式只有 $x+1, 5x+1$,

則 $f(x)=5x^3+(a+4)x^2+ax+1=(5x+1)(x+1)(x+1)=5x^3+11x^2+7x+1$, $\therefore a=7$.

D. 設 $a_1, a_2, \cdots, a_9$ 為等差數列且 k 為實數．若方程式 $\begin{cases} a_1x-a_2y+2a_3z=k+1 \\ a_4x-a_5y+2a_6z=-k-5 \\ a_7x-a_8y+2a_9z=k+9 \end{cases}$ 有解，

則 $k=$ ＿＿＿＿＿.

答：-5　　【出處】第二冊 ch1 數列與級數、第四冊 ch3 矩陣

解：$\because$ $a_1, a_2, \cdots, a_9$ 為等差數列，設為 $a, a+d, a+2d, \cdots, a+8d$, d 為其公差，

代入方程式，得知 $\begin{cases} ax-(a+d)y+2(a+2d)z=k+1 \\ (a+3d)x-(a+4d)y+2(a+5d)z=-k-5 \\ (a+6d)x-(a+7d)y+2(a+8d)z=k+9 \end{cases}$,

其增廣矩陣為 $\left[\begin{array}{ccc:c} a & -(a+d) & 2(a+2d) & k+1 \\ (a+3d) & -(a+4d) & 2(a+5d) & -k-5 \\ (a+6d) & -(a+7d) & 2(a+8d) & k+9 \end{array}\right]$ $\times(-1)$ $\times(-1)$

$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} a & -(a+d) & 2(a+2d) & k+1 \\ 3d & -3d & 6d & -2k-6 \\ 6d & -6d & 12d & 8 \end{array}\right]$ $\times(-2)$

$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} a & -(a+d) & 2(a+2d) & k+1 \\ 3d & -3d & 6d & -2k-6 \\ 0 & 0 & 0 & 4k+20 \end{array}\right]$,

$\because$ 有解，$\therefore 4k+20=0$, 得 $k=-5$

另解：

$\because$ $a_1, a_2, \cdots, a_9$ 為等差數列，由等差中項性質得 $a_1+a_7=2a_4$, $a_2+a_8=2a_5$, $a_3+a_9=2a_6$,

$\therefore$ 設方程式 $\begin{cases} a_1x-a_2y+2a_3z=k+1 \cdots\cdots ① \\ a_4x-a_5y+2a_6z=-k-5 \cdots\cdots ② \\ a_7x-a_8y+2a_9z=k+9 \cdots\cdots ③ \end{cases}$，則

①＋③：$(a_1+a_7)x-(a_2+a_8)y+2(a_3+a_9)z=2k+10$

$\Rightarrow 2a_4x-2a_5y+4a_6z=2k+10 \cdots\cdots$ ④

④－②×2：$0=4k+20$, 得 $k=-5$.

E. 設 a, b, x 皆為正整數且滿足 $a \le x \le b$ 及 $b - a = 3$. 若用內插法從 $\log a$, $\log b$ 求得 $\log x$ 的近似值為 $\log x \approx \frac{1}{3}\log a + \frac{2}{3}\log b = \frac{1}{3}(1 + 2\log 3 - \log 2) + \frac{2}{3}(4\log 2 + \log 3)$, 則 x 的值為 __________.

答：47　　　　【出處】第一冊 ch3 指數與對數函數

解：1.由 $1 + 2\log 3 - \log 2 = \log 10 + \log 3^2 - \log 2 = \log\frac{10 \times 9}{2} = \log 45$,

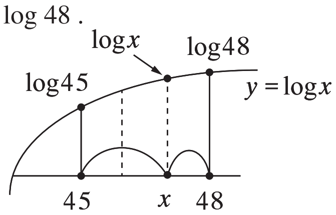
$4\log 2 + \log 3 = \log 2^4 + \log 3 = \log 16 \times 3 = \log 48$,

則 $\frac{1}{3}\log a + \frac{2}{3}\log b = \frac{1}{3}\log 45 + \frac{2}{3}\log 48 \Rightarrow \log a = \log 45$, $\log b = \log 48$.

2.根據內插法如右圖，

$\because \log x = \frac{1}{3}\log 45 + \frac{2}{3}\log 48$, 即 45 ～ 48 之間三等分，

即 $(x - 45):(48 - x) = 2:1$, $\therefore x = 47$.



F. 一隻青蛙位於坐標平面的原點，每步隨機朝上、下、左、右跳一單位長，總共跳了四步．青蛙跳了四步後恰回到原點的機率為__________.（化成最簡分數）

答：$\frac{9}{64}$　　　　【出處】第二冊 ch3 機率

解：樣本空間（跳四步，每步有 4 種跳法）$= 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$,

事件：跳法原則為有上，必有下；有左，必有右．可能情形如下：

可能情形	上	下	左	右	方法數
①	1 次	1 次	1 次	1 次	$4! = 24$
②	2 次	2 次	0 次	0 次	$\frac{4!}{2!2!} = 6$
③	0 次	0 次	2 次	2 次	$\frac{4!}{2!2!} = 6$

事件方法數 $= 24 + 6 + 6 = 36$,

故所求機率 $= \frac{\text{事件方法數}}{\text{樣本空間}} = \frac{36}{256} = \frac{9}{64}$.

G. 地面上甲、乙兩人從同一地點同時開始移動．甲以每秒 4 公尺向東等速移動，乙以每秒 3 公尺向北等速移動．在移動不久之後，他們互望的視線被一圓柱體建築物阻擋了 6 秒後才又相見．此圓柱體建築物底圓的直徑為________公尺．

答：14.4　　　　【出處】第三冊 ch3 平面向量

解：1.根據題意，設甲、乙兩人從原點開始移動，作示意圖如右，不失一般性

在$\triangle OAB$中，$\overline{OP}\perp\overline{AB}$（$\overline{OP}$為斜邊$\overline{AB}$上的高），

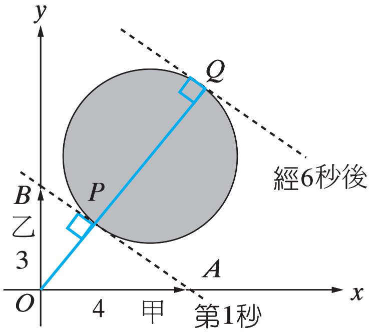
$\therefore\triangle OAB$ 面積 $=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OP}$

$\Rightarrow\frac{1}{2}\times 3\times 4=\frac{1}{2}\times 5\times\overline{OP}$，得 $\overline{OP}=\frac{12}{5}$（1 秒的距離）．

2.圓柱體建築物底圓的直徑

$=$ 經過 6 秒之距離 $=\overline{PQ}=6\ \overline{OP}=6\times\frac{12}{5}=\frac{72}{5}=14.4$（公尺）．

註：本題亦可利用兩平行間之距離求得答案．



努力～努力

加油！

加油！

加油！

好習慣的養成，讓您一生受用無窮的推薦！

訂購專線

① 請洽學校駐區代表

② TEL:(02)2262-5666 #221古小姐
FAX:(02)2262-0565

③ 訂購網址
https://goo.gl/wJeO0g

購書訂單QR

全華圖書邀請您，一同改變我們的孩子！

誠摯邀請老師分享您精闢的見解及投稿，投稿請寄：we04@chwa.com.tw

- 您的稿件企劃部將視情況刪修，修改後會寄給您過目，您同意後才會刊登。
- 投稿作品，視同授權本刊書面及電子版刊載。作品一經刊登將依字數致贈稿酬。
- 來稿請勿侵害他人著作權，如有引文，請註明參考資料來源。
- 來稿請附作者資料：姓名、任教學校、聯絡電話／地址、電子郵件信箱。

如有任何疑問，歡迎您 E-mail 或來電詢問：02-2262-5666＃213 廖先生。

本公司已盡力處理刊物中圖文的著作權事宜，倘有疏漏，惠請著作權人能與本公司聯繫，謹此致謝。

教育無他 愛與榜樣

全華圖書 全球華人的知識新傳 www.chwa.com.tw

總公司／北區高中營業處
地址：新北市土城區忠義路 21 號
電話：(02) 2262-5666
傳真：(02) 2262-0565

中區高中營業處
地址：臺中市南區樹義一巷 26 號 2 樓
電話：(04) 2261-8485
傳真：(04) 3601-8600

南區高中營業處
地址：高雄市三民區應安街 12 號
電話：(07) 381-1377
傳真：(07) 960-2868