大學入學考試中心九十九學年度學科能力測驗數學科試題

第壹部分：選擇題(佔 60 分)

一、單選題(佔 35 分)

說明：第 1 至 7 題，每題選出最適當的一個選項，劃記在答案卡之「解答欄」，每題答對得 5 分，答錯不倒扣。

1.若數列 a_1，a_2，⋯，a_k，⋯，a_{10} 中每一項皆為 1 或－1，則 $a_1+a_2+\cdots+a_k+\cdots+a_{10}$ 之值有多少種可能？

(1)10　(2)11　(3) P_2^{10}　(4) C_2^{10}　(5) 2^{10}

解：可能情形有：

10 個 1，0 個－1，則 $a_1+a_2+\ldots+a_k+\ldots+a_{10}=10\times1+0\times(-1)=10$

9 個 1，1 個－1，則 $a_1+a_2+\ldots+a_k+\ldots+a_{10}=9\times1+1\times(-1)=8$

8 個 1，2 個－1，則 $a_1+a_2+\ldots+a_k+\ldots+a_{10}=8\times1+2\times(-1)=6$

……

0 個 1，10 個－1，則 $a_1+a_2+\ldots+a_k+\ldots+a_{10}=0\times1+10\times(-1)=-10$

共 11 種可能

答：(2)

2.已知 a，b 為整數且行列式 $\begin{vmatrix} 5 & a \\ b & 7 \end{vmatrix}=4$，則絕對值 $|a+b|$ 為何？

(1) 16　(2) 31　(3) 32　(4) 39　(5)條件不足，無法確定

解：$\because \begin{vmatrix} 5 & a \\ b & 7 \end{vmatrix}=35-ab=4$，$\therefore ab=31$

又 a，b 為整數，得知 $\begin{cases} a=1 \\ b=31 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=31 \\ b=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-1 \\ b=-31 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-31 \\ b=-1 \end{cases}$，則 $|a+b|=32$

答：(3)

3.箱中有三顆紅球與三顆白球。一摸彩遊戲是從箱中隨機同時抽出兩顆球。如果抽出的兩球顏色不同，則得獎金 100 元；如果兩球顏色相同，則無獎金。請問此遊戲獎金的期望值為何？(1) 20 元　(2) 30 元　(3) 40 元　(4) 50 元　(5) 60 元

解：樣本空間 S(6 顆球抽出 2 顆球)$=C_2^6=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

事件	1 紅 1 白球	其他
樣本	$C_1^3\times C_1^3=9$	$15-9=6$
數值	100 元	0 元
機率	$\frac{9}{15}$	$\frac{6}{15}$

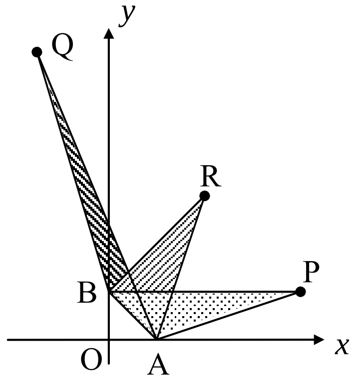
期望值 $E=100\times\frac{9}{15}+0\times\frac{6}{15}=60$(元)

答：(5)

4.坐標平面上給定兩點 A(1，0)與 B(0，1)，又考慮另外三點 P(π，1)、Q($-\sqrt{3}$，6)與 R(2，$\log_4 32$)。令ΔPAB 的面積為 p、ΔQAB 的面積為 q、ΔRAB 的面積為 r。請問下列哪一個選項是正確的？

(1) $p<q<r$　(2) $p<r<q$　(3) $q<p<r$　(4) $q<r<p$　(5) $r<q<p$

解 1：$\log_4 32=\log_{2^2} 2^5=\frac{5}{2}$，即 R(2，$\log_4 32$)＝R(2，$\frac{5}{2}$)



如右圖，直線 AB：$x+y-1=0$，且 $\overline{AB}=\sqrt{2}$

d(P，直線 AB)＝$\frac{|\pi+1-1|}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

d(Q，直線 AB)＝$\frac{|-\sqrt{3}+6-1|}{\sqrt{2}}=\frac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

d(R，直線 AB)＝$\frac{|2+2.5-1|}{\sqrt{2}}=\frac{3.5}{\sqrt{2}}$

⇒ΔPAB 的面積為 $p=\frac{1}{2}\overline{AB}\times d$(P，直線 AB)＝$\frac{1}{2}\sqrt{2}\times\frac{\pi}{\sqrt{2}}$　$\frac{3.14}{2}$

ΔQAB 的面積為 $q=\frac{1}{2}\overline{AB}\times d$(Q，直線 AB)＝$\frac{1}{2}\sqrt{2}\times\frac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$　$\frac{3.27}{2}$

ΔRAB 的面積為 $r=\frac{1}{2}\overline{AB}\times d$(R，直線 AB)＝$\frac{3.5}{2}$

$\therefore p<q<r$

解 2：利用凸多邊形面積求法，由解 1 得知 R(2，$\log_4 32$)＝R(2，$\frac{5}{2}$)

$$\Delta PAB\text{ 的面積為 } p=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1&0\\0&1\\\pi&1\\1&0\end{vmatrix}\right|=\frac{\pi}{2}\quad\frac{3.14}{2}$$

$$\Delta QAB\text{ 的面積為 } q=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1&0\\0&1\\-\sqrt{3}&6\\1&0\end{vmatrix}\right|=\frac{5-\sqrt{3}}{2}\quad\frac{3.27}{2}$$

$$\Delta RAB\text{ 的面積為 } r=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1&0\\0&1\\2&2.5\\1&0\end{vmatrix}\right|=\frac{3.5}{2}$$

解 3：$\log_4 32=\log_{2^2} 2^5=\frac{5}{2}$，即 R(2，$\log_4 32$)＝R(2，$\frac{5}{2}$)

$\overrightarrow{AB}=(-1,1)$，$\overrightarrow{AP}=(\pi-1,1)$，$\overrightarrow{AQ}=(-\sqrt{3},1)$，$\overrightarrow{AR}=(1,\frac{5}{2})$

$$\Rightarrow\Delta PAB\text{ 的面積為 } p=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-1&1\\\pi-1&1\end{vmatrix}\right|=\frac{\pi}{2}\quad\frac{3.14}{2}$$

ΔQAB 的面積為 $q=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -\sqrt{3}-1 & 6 \end{vmatrix}\right|=\frac{5-\sqrt{3}}{2}\quad \frac{3.27}{2}$

ΔRAB 的面積為 $r=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2.5 \end{vmatrix}\right|=\frac{3.5}{2}$

$\therefore p<q<r$

答： (1)

5.在密閉的實驗室中，開始時有某種細菌 1 千隻，並且以每小時增加 8%的速率繁殖。如果依此速率持續繁殖，則 100 小時後細菌的數量最接近下列哪一個選項？

(1) 9 千隻 (2) 108 千隻 (3) 2200 千隻 (4) 3200 千隻 (5) 32000 千隻

解：設 100 小時後細菌的數量為 x 千隻

$\therefore x=1\times(1+8\%)^{100}=(1+8\%)^{100}$，兩邊取 log

$\log x=\log(1+8\%)^{100}=100\times\log(\frac{108}{100})=100(\log 2^2\times3^3-\log100)$

$100\times(2\times0.3010+3\times0.4771-2)$

$=100\times0.0333=3+0.33$

$x=10^{3.33}=10^{3+0.33}=10^3\times10^{0.33}\quad 2200$，其中 $10^{0.33}=y$，$0.33=\log y\quad \log 2.2$

答：(3)

6.坐標空間中 O 為原點，點 A 的坐標為(1，2 ，1)。設 S 是以 O 為球心、4 為半徑的球面。請問在 S 上滿足內積$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=6$ 的所有點 P 所成的圖形為何？

(1)空集合 (2)一個點 (3)兩個點 (4)一個圓 (5)兩個圓

解：1.設 P(x，y，z)，$\therefore \overrightarrow{OA}=(1，2 ，1)$，$\overrightarrow{OP}=(x，y，z)$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=(1，2 ，1)\cdot(x，y，z)=x+2y+z=6$ ……為一平面 E 方程式

2.又 $d(\text{O}，\text{E})=\frac{|0+0+0-6|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$ ＜球半徑 4

表示球 S 與平面 E 相交於一圓，即點 P 所成的圖形為一圓

答：(4)

7.令橢圓Γ_1：$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$、$\Gamma_2$：$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=2$、$\Gamma_3$：$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=\frac{2x}{5}$的長軸長分別為$l_1$、$l_2$、$l_3$

。請問下列哪一個選項是正確的？

(1) $l_1=l_2=l_3$ (2) $l_1=l_2<l_3$ (3) $l_1<l_2<l_3$ (4) $l_1=l_3<l_2$ (5) $l_1<l_3<l_2$

解：1.由Γ_1：$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ 得知 $a^2=5^2$，$a=5$，長軸長 $l_1=2a=10$

2.將Γ_2：$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=2$ 等號兩邊除以 2 化為標準式，得 $\frac{x^2}{2\cdot5^2}+\frac{y^2}{2\cdot3^2}=1$

$\therefore$知 $a^2=2\cdot5^2$，$a=5\sqrt{2}$，長軸長 $l_2=2a=10\sqrt{2}$

3.將Γ_3：$\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=\dfrac{2x}{5}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{2x}{5}+\dfrac{y^2}{3^2}=0$，$\dfrac{x^2-10x}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=0$

配方$\dfrac{x^2-10x+5^2-5^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=0$，得標準式為$\dfrac{(x-5)^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$

∴知 $a^2=5^2$，$a=5$，長軸長$l_3=2a=10$

因此$l_1=l_3<l_2$

答：(4)

二、多選題(佔 25 分)

說明：第 8 至 12 題，每題的五個選項各自獨立，其中至少有一個選項是正確的，選出正確選項劃記在答案卡之「解答欄」。每題皆不倒扣，五個選項全部答對者得 5 分，只錯一個選項者可得 2.5 分，錯兩個或兩個以上選項者不給分。

8.設θ_1、θ_2、θ_3、θ_4分別為第一、第二、第三、第四象限角，且都介於 0 與 2π之間。已知 $|\cos\theta_1|=|\cos\theta_2|=|\cos\theta_3|=|\cos\theta_4|=\dfrac{1}{3}$，請問下列哪些選項是正確的？

(1) $\theta_1<\dfrac{\pi}{4}$　(2) $\theta_1+\theta_2=\pi$　(3) $\cos\theta_3=-\dfrac{1}{3}$　(4) $\sin\theta_4=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　(5) $\theta_4=\theta_3+\dfrac{\pi}{2}$

解 1：(1) θ_1為第一象限角，且$|\cos\theta_1|=\dfrac{1}{3}$，∴$\cos\theta_1=\dfrac{1}{3}$

$\cos\theta_1=\dfrac{1}{3}<\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，且 $\cos\theta$在第一象限是遞減函數，∴$\theta_1>\dfrac{\pi}{4}$，<u>故不正確</u>

(2) θ_2為第二象限角，且$|\cos\theta_2|=\dfrac{1}{3}$，∴$\cos\theta_2=-\dfrac{1}{3}$

若$\theta_1+\theta_2=\pi$，則 $\cos\theta_2=\cos(\pi-\theta_1)=-\cos\theta_1=-\dfrac{1}{3}$成立，∵$\theta_1+\theta_2=\pi$，<u>故正確</u>

(3)∵θ_3為第第三象限角，且$|\cos\theta_3|=\dfrac{1}{3}$，∴$\cos\theta_3=-\dfrac{1}{3}$，<u>故正確</u>

(4)∵θ_4為第四象限角，∴$\sin\theta_4<0$，<u>故不正確</u>

或∵θ_4為第四象限角，且$|\cos\theta_4|=\dfrac{1}{3}$，$\cos\theta_4=\dfrac{1}{3}$，∴$\sin\theta_4=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$亦得知<u>不正確</u>

(5)∵$\cos\theta_3=-\dfrac{1}{3}$，∴$\sin\theta_3=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

若$\theta_4=\theta_3+\dfrac{\pi}{2}$，則 $\cos\theta_4=\cos(\theta_3+\dfrac{\pi}{2})=-\sin\theta_3=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\neq\dfrac{1}{3}$(∵$\cos\theta_4=\dfrac{1}{3}$)<u>故不正確</u>

解 2：根據題意，右圖所示不失為假設

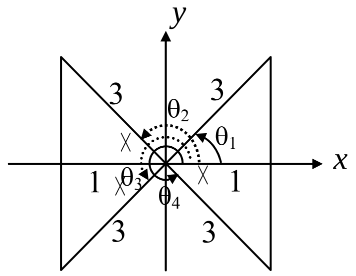
(1)同上

(2) $\theta_1 = \angle X$，$\therefore \theta_1 + \theta_2 = \pi$

(3)同上

(4)同上

(5) $\because \theta_1 = \angle X \neq \dfrac{\pi}{4}$，$\therefore \theta_4 \neq \theta_3 + \dfrac{\pi}{2}$



答：(2)(3)

9.下列哪些方程式有實數解？

(1) $x^3 + x - 1 = 0$　　(2) $2^x + 2^{-x} = 0$　　(3) $\log_2 x + \log_x 2 = 1$

(4) $\sin x + \cos 2x = 3$　　(5) $4\sin x + 3\cos x = \dfrac{9}{2}$

解：(1) $x^3 + x - 1 = 0$ 為實係數 3 次方程式，則至少有 1 個實數解

(2) $\because 2^x > 0$，且 $2^{-x} > 0$，$\therefore 2^x + 2^{-x} = 0$ 無實數解

(3)設 $A = \log_2 x$，則 $\log_x 2 = \dfrac{1}{A}$，且 $\log_2 x$，$\log_x 2$ 皆有意義，$\therefore \log_2 x = A \neq 0$

原方程式變為 $A + \dfrac{1}{A} - 1 = 0$，同乘上 A，得 $A^2 - A + 1 = 0$

$\because$判別式 $D = (-1)^2 - 4 = -3 < 0$，表示 A 無實數解，得知 x 無實數解

(4) $\because -1 \le \sin x \le 1$，且 $-1 \le \cos 2x \le 1$，得知 $-2 \le \sin x + \cos 2x \le 2$

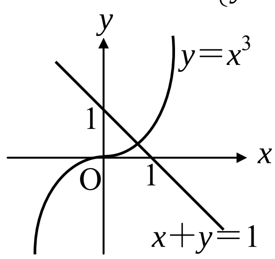
$\therefore \sin x + \cos 2x = 3$ 無實數解

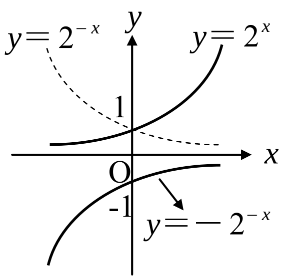
(5)根據疊合得知：$-\sqrt{4^2+3^2} \le 4\sin x + 3\cos x \le \sqrt{4^2+3^2} = 5$

$\therefore 4\sin x + 3\cos x = \dfrac{9}{2} < 5$ 有實數解

補充解：利用幾何求解

(1) $x^3 + x - 1 = 0$，$\Rightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ y = 1 - x \end{cases}$，圖形如下左圖，得知有 1 實數解





(2) $2^x + 2^{-x} = 0$，$\Rightarrow \begin{cases} y = 2^x \\ y = -2^{-x} = -\dfrac{1}{2^x} \end{cases}$，圖形如上右圖，得知無數解

答：(1)(5)

10.設 a_1，a_2，…，a_n，…為一實數數列，且對所有的正整數 n 滿足 $a_{n+1}=\dfrac{n(n+1)}{2}-a_n$。請問下列哪些選項是正確的？

(1)如果 $a_1=1$，則 $a_2=1$

(2)如果 a_1 是整數，則此數列的每一項都是整數

(3)如果 a_1 是無理數，則此數列的每一項都是無理數

(4) $a_2\le a_4\le \cdots \le a_{2n}\le \cdots$ （n 為正整數)

(5)如果 a_k 是奇數，則 a_{k+2}，a_{k+4}，…，a_{k+2n}，…都是奇數（n 為正整數)

解：(1)當 $n=1$ 時，$a_2=\dfrac{1(1+1)}{2}-a_1=1-1=0$

(2)∵對所有的正整數 n，使得 $\dfrac{n(n+1)}{2}\in\mathrm{N}$，∴$a_{n+1}$ 為(正整數)減(整數)為整數

(3)根據(2)，∴a_{n+1} 為(正整數)減(無理數)為無理數

(4)根據 $\forall n\in\mathrm{N}$，滿足 $a_{n+1}=\dfrac{n(n+1)}{2}-a_n$

∴當 $n=k\in\mathrm{N}$ 時，$a_{k+1}=\dfrac{k(k+1)}{2}-a_k$

當 $n=k+1\in\mathrm{N}$ 時，$a_{k+2}=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}-a_{k+1}$

兩式相減，得 $a_{k+2}-a_k=k+1>0$

故 $a_2\le a_4\le \cdots \le a_{2n}\le \cdots$ （n 為正整數)

(5)由(4)知 $a_{k+2}-a_k=k+1>0$，∴$a_{k+2}=a_k+(k+1)$可能為奇數、偶數

答：(2)(3)(4)

補充解 1：(4) $a_2\le a_4\le \cdots$

當 $n=1$，$a_2=1-a_1$

當 $n=3$，$a_4=4-a_1$

兩式相減，得知 $a_2-a_4=-3\le 0$，∴$a_2\le a_4$

補充解 2：(4) $a_2\le a_4\le \cdots$

由關係式 $a_{n+1}=\dfrac{n(n+1)}{2}-a_n$，得知

$a_2=1-a_1$

$a_3=3-a_2=3-(1-a_1)=2+a_1$

$a_4=6-a_3=6-(2+a_1)=4-a_1$

$a_5=10-a_4=10-(4-a_1)=6+a_1$

$a_6=15-a_5=15-(6+a_1)=9-a_1$

……

得知 $a_2\le a_4\le \cdots \le a_{2n}\le \cdots$ （n 為正整數)

(5)由(4)，若 $a_2=1-a_1$ 是奇數，則知 $k=2$ 且令 $a_1=0$(或偶數)

⇒當 $k+2=4$ 時，$a_4=4-a_1=4-0=4$ 不是奇數（不合)

11.坐標空間中，直線 L 上距離點 Q 最近的點稱為 Q 在 L 上的投影點。已知 L 為平面 $2x-y=2$ 上通過點(2，2，2)的一直線。請問下列哪選項中的點可能是原點 O 在 L 上的投影點？

(1) (2，2，2)　　(2)(2，0，2)　　(3)$(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 0)$

(4)$(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, -2)$　　(5)$(\frac{8}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{2}{9})$

解：根據題意，如右圖，設直線 L 為通過點 A(2，2，2)，且 $P(x, y, z)\in L$ 為原點 O 在 L 上的投影點，即 P 點滿足下列二條件：

(I)$P(x, y, z)\in L$

(II)$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AP}$，即$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}=(x, y, z)\cdot(x-2, y-2, z-2)=x(x-2)+y(y-2)+z(z-2)=0$

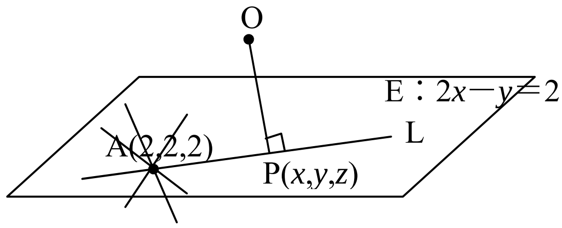
(1) (2，2，2)滿足(I)、(II)

(2)(2，0，2)不滿足(I)

(3) $(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 0)$滿足(I)、(II)

(4)$(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, -2)$滿足(I)、不滿足(II)

(5)$(\frac{8}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{2}{9})$滿足(I)、(II)



答：(1)(3)(5)

12.想要了解台灣的公民對某議題支持的程度所作的抽樣調查，依性別區分，所得結果如下表：

	女性公民	男性公民
贊成此議題的比例 $\hat{p}$	0.52	0.59
$\hat{p}$ 的標準差 $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$	0.02	0.04

請問從此次抽樣結果可以得到下列哪些推論？

(1)全台灣男性公民贊成此議題的比例大於女性公民贊成此議題的比例

(2)在95%的信心水準之下，全台灣女性公民贊成此議題之比例的信賴區間為[0.48，0.56]

(計算到小數點後第二位，以下四捨五入)

(3)此次抽樣的女性公民數少於男性公民數

(4)如果不區分性別，此次抽樣贊成此議題的比例 $\hat{p}$ 介於0.52與0.59之間

(5)如果不區分性別，此次抽樣 $\hat{p}$ 的標準差 $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ 介於0.02與0.04之間

解：(1)在 95%的信心水準之下

男性贊成此議題的比例 $\hat{p}$ 的標準差＝$2\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$＝2×0.04＝0.08

信賴區間為[0.59－0.08，0.59＋0.08]＝[0.51，0.67]

女性贊成此議題的比例 $\hat{p}$ 的標準差＝$2\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$＝2×0.02＝0.04

信賴區間為[0.52－0.04，0.52＋0.04]＝[0.48，0.56]

∵[0.51，0.67]並未含蓋[0.48，0.56]，∴(1)未必成立

(2)由(1)得知信賴區間為[0.48，0.56]

(3)抽樣的女性公民數，根據題意，由 $\sqrt{\dfrac{0.52(1-0.52)}{n}}$＝0.02 得知 n＝624

抽樣的男性公民數，根據題意，由 $\sqrt{\dfrac{0.59(1-0.59)}{n}}$＝0.04 得知 n＝151

故女性公民數<u>大於</u>男性公民數

(4)根據女性的 $\hat{p}$＝0.52，人數 n＝624；男性的 $\hat{p}$＝0.59，人數 n＝151

∴ $\hat{p}$ 的平均數＝$\dfrac{0.52\times624+0.59\times151}{624+151}=\dfrac{324.48+89.09}{775}$＝0.5336……　0.53

得知 0.53 介於 0.52 與 0.59 之間

(5)由(4)得 $\hat{p}$ 的平均數＝0.53，總人數 n＝624＋151＝775

∴抽樣 $\hat{p}$ 的標準差＝$\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=\sqrt{\dfrac{0.53(1-0.53)}{775}}$＝0.017928……　0.018

但是 0.018 不介於 0.02 與 0.04 之間

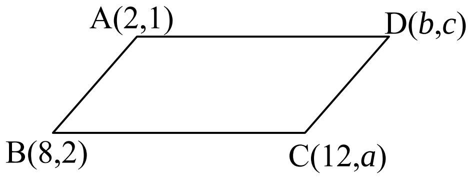
答：(2)(4)

第貳部分：選填題(佔 40 分)

說明：1.第 A 至 H 題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號(13－32)。 2.每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A.坐標平面上有一個平行四邊形ABCD，其中點A的坐標為(2，1)，點B的坐標為(8，2)，點C在第一象限且知其x坐標為12。若平行四邊形ABCD的面積等於38平方單位，則點D的坐標為________。

解：如右圖，設 C(12，a)，D(b，c)，且 $a>0$ (∵點 C 在第一象限)



(1)$\overrightarrow{BA}=(-6,\ -1)$，$\overrightarrow{BC}=(4,\ a-2)$

ABCD 的面積＝$\left|\begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 4 & a-2 \end{vmatrix}\right|=38$

$\Rightarrow |6a-16|=38$，得知 $a=9$ 或 $-\dfrac{11}{3}$(不合)

(2)根據平行四邊形性質(對角線互相平分)

x 分量：$2+12=8+b$，$b=6$

y 分量：$1+a=2+c$，$c=8$

∴D(6，8)

答：D(6，8)

B.設 $f(x)$為滿足下列條件的最低次實係數多項式：$f(x)$最高次項的係數為 1，且 $3-2i$、i、5 皆為方程式 $f(x)=0$ 的解(其中 $i^2=-1$)。則 $f(x)$之常數項為________。

解：(1)根據實係數多項式方程式虛根成雙定理(複數根成共軛出現)

∴實係數多項式 $f(x)=0$有$x=3-2i$、$x=i$ 的解，必有$x=3+2i$、$x=-i$ 的解

(2)最低次 $f(x)=[x-(3-2i)]\,[x-(3+2i)]\,[x-i]\,[x-(-i)]\,(x-5)$

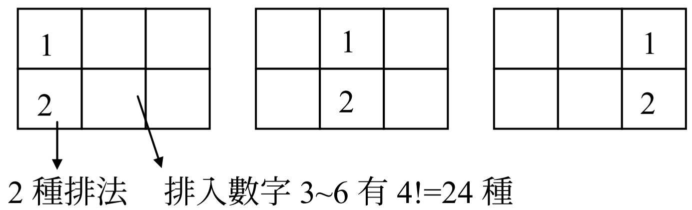
$=(x^2-6x+13)(x^2+1)(x-5)$

常數項為$13\times1\times(-5)=-65$

答：－65

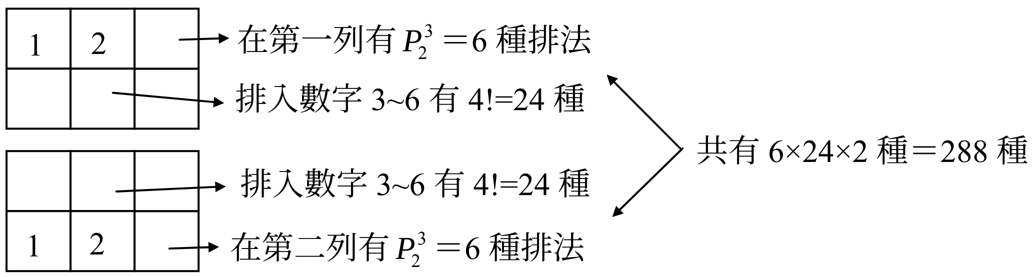
C.有一個兩列三行的表格如右下圖。在六個空格中分別填入數字1、2、3、4、5、6(不得重複)，則1、2這兩個數字在同一行或同一列的方法有_______種。

解：(1)若數字 1、2 在同一行



共有 2×24×3 種＝144 種

(2)若數字 1、2 在同一列



∴由(1)、(2)得知同一行或同一列共有 144＋288＝432 種方法

答：432 種

D.設實數 a＞0。若 x、y 的方程組$\begin{cases}2x-y=1\\x-2y=a\\x-ay=122\end{cases}$ 有解，則 a＝ ________。

解：$\begin{cases}2x-y=1\\x-2y=a\\x-ay=122\end{cases}$ 有解，即$\begin{cases}2x-y-1=0\\x-2y-a=0\\x-ay-122=0\end{cases}$ 有解，條件為行列式$\begin{vmatrix}2&-1&-1\\1&-2&-a\\1&-a&-122\end{vmatrix}=0$

$\begin{vmatrix}2&-1&-1\\1&-2&-a\\1&-a&-122\end{vmatrix}=-2a^2+2a+364=0$，除以 2 得 $a^2-a-182=0$

分解為$(a-14)(a+13)=0$，∴$a=14$ 或-13(不合)

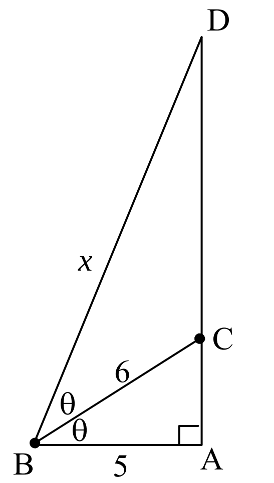
答：14

補充解：利用降階求三階行列式之方法

$$\begin{vmatrix}2&-1&-1\\1&-2&-a\\1&-a&-122\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}2&2&2\\1&4&2a\\1&2a&244\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}2&0&0\\1&3&2a-1\\1&2a-1&243\end{vmatrix}=3^6-(2a-1)^2=0$$

∴$2a-1=27$，得 $a=14$

E.如右圖，直角三角形 ABD 中∠A 為直角，C 為 $\overline{AD}$ 邊上的點。已知 $\overline{BC}=6$，$\overline{AB}=5$，∠ABD＝2∠ABC，則 $\overline{BD}$＝________。(化成最簡分數)



解 1：如圖，設∠ABC＝θ，∴∠ABD＝2θ，$\overline{BD}=x$

在ΔABC 中，$\cos\theta=\frac{5}{6}$

在ΔABD 中，$\cos 2\theta=\frac{5}{x}$

$2\cos^2\theta-1=\frac{5}{x}$

$\frac{5}{x}=2(\frac{5}{6})2-1=\frac{7}{18}$，得 $x=\overline{BD}=\frac{90}{7}$

解 2：利用分角線性質

(1)∵∠ABD＝2∠ABC，∴$\overline{BC}$ 為∠ABD 的分角線

⇒$\overline{AB}:\overline{BD}=\overline{AC}:\overline{CD}$，且 $\overline{AC}=\sqrt{6^2-5^2}=\sqrt{11}$

設 $\overline{CD}=\sqrt{11}k$，則 $5:\overline{BD}=\sqrt{11}:\sqrt{11}k$，故 $\overline{BD}=5k$

(2)根據畢氏定理 $\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2$

⇒ $(5k)^2=5^2+(\sqrt{11}k+\sqrt{11})^2$

⇒$25k^2=25+11(k+1)^2=11k^2+22k+36$

⇒$14k^2-22k-36=0$，$(7k-18)(k+1)=0$，∴$k=\frac{18}{7}$ 或-1(不合)

$\overline{BD}=5k=\frac{90}{7}$

答：$\dfrac{90}{7}$

F.設 a、b 為實數。已知坐標平面上拋物線 $y=x^2+ax+b$ 與 x 軸交於 P、Q 兩點，且 $\overline{PQ}=7$。若拋物線 $y=x^2+ax+(b+2)$與 x 軸的兩交點為 R、S，則 $\overline{RS}=$________。

解 1：1.如右圖，$y=x^2+ax+(b+2)$為 $y=x^2+ax+b$ 向上平移 2 單位

2.設 P(α，0)，Q(β，0)

即α，β為 $x^2+ax+b=0$ 的兩根

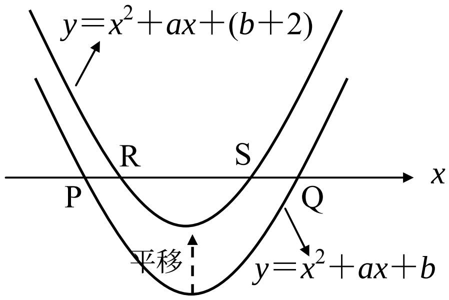
$\therefore \alpha+\beta=-a$，$\alpha\beta=b$，且 $\overline{PQ}=|\alpha-\beta|=7$

3.設 R(m，0)，S(n，0)

即 m，n 為 $x^2+ax+(b+2)=0$ 的兩根

$\therefore m+n=-a=\alpha+\beta$，$mn=b+2=\alpha\beta+2$

$$\Rightarrow \overline{RS}=|m-n|=\sqrt{(m-n)^2}$$
$$=\sqrt{(m+n)^2-4mn}$$
$$=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4(\alpha\beta+2)}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta-8}$$
$$=\sqrt{(\alpha-\beta)^2-8}=\sqrt{7^2-8}=\sqrt{41}$$



解 2：(1)當 $x^2+ax+b=0$，$x=\dfrac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$ 或 $\dfrac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$

令 P($\dfrac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$，0)，Q($\dfrac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$，0)，得知 $\overline{PQ}=\sqrt{a^2-4b}=7$

(2)同理當 $x^2+ax+(b+2)=0$，$\overline{RS}=\sqrt{a^2-4(b+2)}$

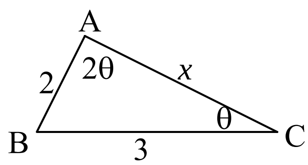
(3)$\because \overline{RS}^2=a^2-4b-8=\overline{PQ}^2-8=7^2-8=41$

$\therefore \overline{RS}=\sqrt{41}$

答：$\sqrt{41}$

G.已知ΔABC 中，$\overline{AB}=2$、$\overline{BC}=3$，且∠A＝2∠C，則 $\overline{AC}=$_______。(化成最簡分數)

解 1：(1)如右圖，設∠C＝θ，∠A＝2θ，$\overline{AC}=x$



根據正弦定理：$\dfrac{2}{\sin\theta}=\dfrac{3}{\sin 2\theta}$

$\Rightarrow \dfrac{2}{\sin\theta}=\dfrac{3}{2\sin\theta\cos\theta}$，得 $\cos\theta=\dfrac{3}{4}$

(2)求 $\overline{AC}=x$ 的方法

法 1：$\because \cos\theta=\dfrac{3^2+x^2-2^2}{2\cdot 3\cdot x}=\dfrac{3}{4}$，$\Rightarrow 2x^2-9x+10=0$，$x=\dfrac{5}{2}$ 或 2

但當 $\overline{AC}=x=2$ 時，$\theta=45^0$，$\angle A=90^0$，$\overline{BC}^2\neq\overline{AC}^2+\overline{AB}^2$，∴不合

法 2：$\because \cos 2\theta=\dfrac{2^2+x^2-3^2}{2\cdot 2\cdot x}=2(\dfrac{3}{4})^2-1$，$\Rightarrow 2x^2-x-10=0$，$x=\dfrac{5}{2}$ 或-2(不合)

法 3：$\because \angle B=\pi-3\theta$，$\therefore \cos(\angle B)=\cos(\pi-3\theta)=-\cos 3\theta=-(4\cos^3\theta-3\cos\theta)$

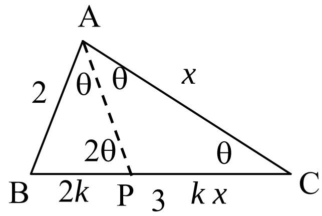
$\Rightarrow \dfrac{2^2+3^2-x^2}{2\cdot2\cdot3}=3\cos\theta-4\cos^3\theta=3(\dfrac{3}{4})-4(\dfrac{3}{4})^3=\dfrac{9}{16}$

$\Rightarrow x^2=\dfrac{25}{4}$，取 $x=\dfrac{5}{2}$

解 2：(1)作∠A 平分線 $\overline{AP}$ 交 $\overline{BC}$ 於 P 點，則

$\overline{BP}:\overline{PC}=\overline{AB}:\overline{AC}=2:x$

令 $\overline{BP}=2k$，$\overline{PC}=kx$，且 $2k+kx=3$，$k\neq 0$



(2)在ΔACP 中，∠CAP＝θ，∠APB＝2θ (外角)

則 $\overline{AP}=\overline{PC}=kx$

(3)在ΔABC 中，$\cos 2\theta=\dfrac{2^2+x^2-3^2}{2\cdot2\cdot x}=\dfrac{x^2-5}{4x}$

在ΔABP 中，$\cos 2\theta=\dfrac{(2k)^2+(kx)^2-2^2}{2\cdot2k\cdot kx}=\dfrac{k^2x^2+4k^2-4}{4k^2x}$

$\Rightarrow \dfrac{x^2-5}{4x}=\dfrac{k^2x^2+4k^2-4}{4k^2x}$，得知 $k^2=\dfrac{4}{9}$，取 $k=\dfrac{2}{3}$

(4) $k=\dfrac{2}{3}$ 代入 $\overline{BC}=2k+kx=3$，$\therefore x=\overline{AC}=\dfrac{5}{2}$

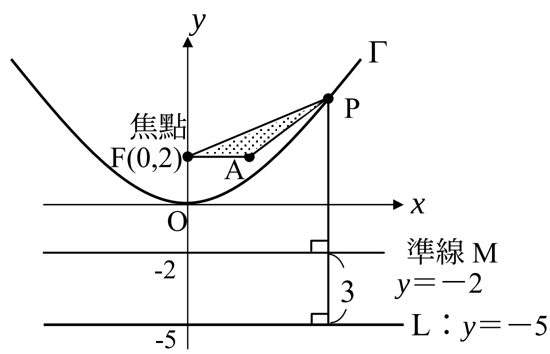
答：$\dfrac{5}{2}$

H.坐標平面上給定點 A($\dfrac{9}{4}$，2)、直線 L：$y=-5$ 與拋物線Γ：$x^2=8y$。以 d(P，L)表示點 P 到直線 L 的距離。若點 P 在 Γ 上變動，則 $|d(\text{P},\text{L})-\overline{AP}|$ 之最大值為________。(化成最簡分數)

解：(1)如右圖,

Γ：$x^2=8y=4cy$，$\therefore c=2$ (開口向上之拋物線)

⇒焦點 F(0，2)，準線 M：$y=-2$



(2)∵$d(\text{P},\text{L})=d(\text{P},\text{M})+3=d(\text{P},\text{F})+3$

$\therefore |d(\text{P},\text{L})-\overline{AP}|=|d(\text{P},\text{F})-\overline{AP}|+3$

$=|\overline{PF}-\overline{AP}|+3$

$>\overline{AF}+3=\dfrac{9}{4}+3=\dfrac{21}{4}$

∵在ΔAPF 中，$\overline{PF}-\overline{AP}>\overline{AF}=\dfrac{9}{4}-0=\dfrac{9}{4}$ (兩邊差小於第三邊)

答：$\dfrac{21}{4}$