大學入學考試中心 102 學年度學科能力測驗試題 數學考科

第壹部分：選擇題(占 60 分)

一、單選題(占 30 分)

說明：第 1 至 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1.學校規定上學期成績需同時滿足以下兩項要求，才有資格參選模範生。

一、國文成績或英文成績 70 分(含)以上；

二、數學成績及格。

已知小文上學期國文 65 分而且他不符合參選模範生資格。請問下列哪一個選項的推論是正確的？

(1)小文的英文成績未達 70 分

(2)小文的數學成績不及格

(3)小文的英文成績 70 分以上但數學成績不及格

(4)小文的英文成績未達 70 分且數學成績不及格

(5)小文的英文成績未達 70 分或數學成績不及格

解：~(一且二) ≡ ~一或~二，其中

~一 ≡ ~(國文成績或英文成績 70 分(含)以上) ≡ 國文成績未達 70 分且英文成績未達 70 分

~二 ≡ ~(數學成績及格) ≡ 數學成績不及格

∴(5)滿足

答：(5)

2.令 $a=2.6^{10}-2.6^{9}$，$b=2.6^{11}-2.6^{10}$，$c=\dfrac{2.6^{11}-2.6^{9}}{2}$。請選出正確的大小關係。

(1) $a>b>c$ (2) $a>c>b$ (3) $b>a>c$ (4) $b>c>a$ (5) $c>b>a$

解：$a=2.6^{10}-2.6^{9}=2.6^{9}(2.6-1)=2.6^{9}\times\underline{1.6}$

$b=2.6^{11}-2.6^{10}=2.6^{10}(2.6-1)=2.6^{10}\times 1.6=2.6^{9}\times\underline{4.16}$

$c=\dfrac{2.6^{11}-2.6^{9}}{2}=\dfrac{2.6^{9}\times(2.6^{2}-1)}{2}=\dfrac{2.6^{9}\times 5.76}{2}=2.6^{9}\times\underline{2.88}$

∴得知 $b>c>a$

答：(4)

3.袋子裡有 3 顆白球，2 顆黑球，由甲、乙、丙三人依序各抽取 1 顆球，抽取後不放回。若每顆球被取出的機會相等，請問在甲和乙抽到相同顏色球的條件下，丙抽到白球之條件機率為何？

(1) $\dfrac{1}{3}$ (2) $\dfrac{5}{12}$ (3) $\dfrac{1}{2}$ (4) $\dfrac{3}{5}$ (5) $\dfrac{2}{3}$

解：(1)甲和乙抽到相同顏色球：甲乙(白)＋甲乙(黑)$=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{2}{5}$

(2)甲(白)→乙(白)→丙(白)：$\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{10}$，甲(黑)→乙(黑)→丙(白)：$\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{3}=\dfrac{1}{10}$

$\therefore$P(丙(白)|甲和乙抽到相同顏色)$=\dfrac{P(\text{甲乙同色且丙白色})}{P(\text{甲乙同色})}=\dfrac{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}}=\dfrac{1}{2}$

答：(3)

4.已知以下各項選項資料的迴歸直線(最適合直線)皆相同且皆為負相關，請選出相關係數最小的選項。

(1)

x	2	3	5
y	1	13	1

(2)

x	2	3	5
y	3	10	2

(3)

x	2	3	5
y	5	7	3

(4)

x	2	3	5
y	9	1	5

(5)

x	2	3	5
y	7	4	4

解 1：$\because$迴歸直線(最適合直線)皆相同，$\therefore$相關係數 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{3}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(y_i-\overline{y})^2}}$中，

$\dfrac{\sum_{i=1}^{3}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i-\overline{x})^2}}$相同，$\Rightarrow$僅比較$\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(y_i-\overline{y})^2}$ 大小即可

即(1)$\sqrt{96}$，(2)$\sqrt{38}$，(3)$\sqrt{8}$，(4)$\sqrt{32}$，(5)$\sqrt{5}$，且皆負相關，故(5)的相關係數最小

解 2：實際計算

X_i	$X_i-\overline{x}$	$(X_i-\overline{x})^2$	(1)			(2)			(3)			(4)			(5)		
2	-4/3	16/9	1	-4	16	3	-2	4	5	0	0	9	4	16	7	2	4
3	-1/3	1/9	13	8	64	10	5	25	7	2	4	1	-4	16	4	-1	1
5	5/3	25/9	1	-4	16	2	-3	9	3	-2	4	5	0	0	4	-1	1
$\overline{x}$ =10/3	0	42/9	5	0	96	5	0	38	5	0	8	5	0	32	5	0	5

$\because$相關係數 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{3}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(y_i-\overline{y})^2}}$，計算如下

(1) $r=\dfrac{-4}{\sqrt{\frac{42}{9}}\sqrt{96}}$，(2) $r=\dfrac{-4}{\sqrt{\frac{42}{9}}\sqrt{38}}$，(3) $r=\dfrac{-4}{\sqrt{\frac{42}{9}}\sqrt{8}}$，(4) $r=\dfrac{-4}{\sqrt{\frac{42}{9}}\sqrt{32}}$，(5) $r=\dfrac{-4}{\sqrt{\frac{42}{9}}\sqrt{5}}$

故(5)的相關係數最小

答：(5)

5.將 24 顆雞蛋分裝到紅、黃、綠的三個籃子。每個籃子都要有雞蛋，且黃、綠兩個籃子裡都裝奇數顆。請選出分裝的方法數。

(1) 55　(2) 66　(3) 132　(4) 198　(5) 253

解：設紅、黃、綠各裝 r，y，g 個，且 $r=a+1$，$y=2b+1$，$g=2c+1$，a，b，c 為非負整數

$\because r+y+g=24$，$\Rightarrow (a+1)+(2b+1)+(2c+1)=24$，得知 $a+2(b+c)=21$ 且 a 為奇數

a	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1
b	0	1~0	2~0	3~0	4~0	5~0	6~0	7~0	8~0	9~0	10~0
c	0	0~1	0~2	0~3	0~4	0~5	0~6	0~7	0~8	0~9	0~10
方法數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

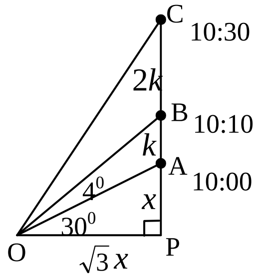
方法數共有 $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11=66$

答：(2)

6.莎韻觀測遠方等速率垂直上升的熱氣球。在上午 10：00 熱氣球的仰角為 30^0，到上午 10：10 仰角變為 34^0。請利用下表判斷到上午 10：30 時，熱氣球的仰角最接近下列哪一個度數？

θ	30^0	34^0	39^0	40^0	41^0	42^0	43^0
$\sin\theta$	0.500	0.559	0.629	0.643	0.656	0.669	0.682
$\cos\theta$	0.866	0.829	0.777	0.766	0.755	0.743	0.731
$\tan\theta$	0.577	0.675	0.810	0.839	0.869	0.900	0.933

(1) 39^0　(2) 40^0　(3) 41^0　(4) 42^0　(5) 43^0



解：(1)根據題意，∵等速率垂直上升，∴距離與時間成正比

$\Rightarrow$設 $\overline{AB}=k$，則 $\overline{BC}=2k$，且 $\overline{OP}=\sqrt{3}x$，$\overline{PA}=x$，如右圖

(2) $\tan 34^0=\dfrac{k+x}{\sqrt{3}x}=0.675$，得知 $\dfrac{k}{\sqrt{3}x}=0.675-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan(\angle COP)=\dfrac{3k+x}{\sqrt{3}x}=3(\dfrac{k}{\sqrt{3}x})+\dfrac{1}{\sqrt{3}}=3(0.675-\dfrac{1}{\sqrt{3}})+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\approx 0.87$

$\Rightarrow \angle COP=41^0$

答：(3)

二、多選題(占 30 分)

說明：第 7 至 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7.設 n 為正整數，符號$\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}^n$代表矩陣$\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}$自乘 n 次。令$\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}a_n&b_n\\c_n&d_n\end{bmatrix}$，請選出正確的選項。

(1) $a_2=1$ (2) a_1，a_2，a_3為等比數列 (3) d_1，d_2，d_3為等比數列

(4) b_1，b_2，b_3為等差數列 (5) c_1，c_2，c_3為等差數列

解：當 $n=1$ 時，$\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}^1=\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{bmatrix}$

當 $n=2$ 時，$\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{bmatrix}$

當 $n=3$ 時，$\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&7\\0&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_3&b_3\\c_3&d_3\end{bmatrix}$

(1) $a_2=1$，正確

(2) $a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=1$ 是公比為 1 的等比數列，正確

(3) $d_1=2$，$d_2=4$，$d_3=8$ 是公比為 2 的等比數列，正確

(4) $b_1=1$，$b_2=3$，$b_3=7$ 不為等差數列

(5) $c_1=0$，$c_2=0$，$c_3=0$ 是公差為 0 的等差數列

答：(1)(2)(3)(5)

8.設 $a>1>b>0$，關於下列不等式，請選出正確的選項。

(1) $(-a)^7>(-a)^9$ (2) $b^{-9}>b^{-7}$ (3) $\log_{10}\frac{1}{a}>\log_{10}\frac{1}{b}$

(4) $\log_a 1>\log_b 1$ (5) $\log_a b\geq\log_b a$

解：(1) $(-a)^7=-a^7$，$(-a)^9=-a^9$

$\Rightarrow\because a>1$，$\therefore a^7>a^9$，$\Rightarrow -a^7<-a^9$，即 $(-a)^7>(-a)^9$

(2) $b^{-9}=\frac{1}{b^9}$，$b^{-7}=\frac{1}{b^7}$

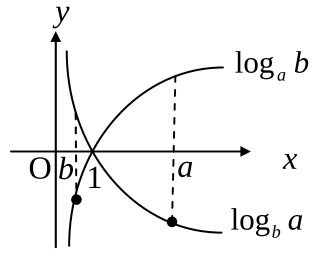
$\Rightarrow\because 1>b>0$，$b^7<b^9$，$\therefore\frac{1}{b^7}>\frac{1}{b^9}$，即 $b^{-9}>b^{-7}$

(3) $\log_{10}\frac{1}{a}=-\log_{10}a$，$\log_{10}\frac{1}{b}=-\log_{10}b$，$\Rightarrow\because a>b$，$\log_{10}a>\log_{10}b$，即 $\log_{10}\frac{1}{a}<\log_{10}\frac{1}{b}$

(4) $\log_a 1=0$，$\log_b 1=0$，$\therefore\log_a 1=\log_b 1$

(5)如右圖，當 a，b 與 1 距離不等時，不等式不成立

例：取 $a=2$，$b=\frac{1}{4}$，則 $\log_2\frac{1}{4}=-2<\log_{\frac{1}{4}}2=-\frac{1}{2}$



答：(1)(2)

9.設 $a<b<c$。已知實數系多項式函數 $y=f(x)$的圖形為一開口向上的拋物線，且與 x 軸交於 $(a, 0)$、$(b, 0)$兩點；實係數多項式函數 $y=g(x)$的圖形亦為一開口向上的拋物線，且與 x 軸交於$(b, 0)$、$(c, 0)$兩點。請選出 $y=f(x)+g(x)$的圖形可能的選項。

(1)水平直線　　(2)和 x 軸僅交於一點的直線

(3)和 x 軸僅無交點的拋物線　　(4)和 x 軸僅交於一點的拋物線

(5)和 x 軸僅交於兩點的拋物線

解：設 $y=f(x)=h(x-a)(x-b)$，$y=g(x)=k(x-b)(x-c)$，h，k 皆為正數

$\Rightarrow y=f(x)+g(x)=h(x-a)(x-b)+k(x-b)(x-c)$

$=(x-b)[h(x-a)+k(x-c)]=(x-b)[(h+k)x-(a+c)]$

令 $f(x)+g(x)=(x-b)[(h+k)x-(a+c)]=0$，得 $x=b$ 或 $x=\dfrac{a+c}{h+k}$

(1) $f(x)+g(x)$為二次函數，圖形為拋物線

(2) $f(x)+g(x)$為二次函數，圖形為拋物線

(3)(4)(5)：若 $b=\dfrac{a+c}{h+k}$ 時，和 x 軸交於一點的拋物線

若 $b\neq\dfrac{a+c}{h+k}$ 時，和 x 軸交於兩點的拋物線

答：(4)(5)

10.坐標平面上考慮兩點 $Q_1(1, 0)$，$Q_2(-1, 0)$。在下列各方程式的圖形中，請選出其上至少有一點 P 滿足內積$\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{PQ_2}<0$ 的選項。

(1) $y=\dfrac{1}{2}$　　(2) $y=x^2+1$　　(3) $-x^2+2y^2=1$　　(4) $4x^2+y^2=1$　　(5) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$

解 1：代數解法

設 $P(x, y)$，$\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{PQ_2}=(1-x, -y)\cdot(-1-x, -y)=x^2+y^2-1<0$，即

(1) $y=\dfrac{1}{2}$時，代入 $x^2+y^2-1=x^2-\dfrac{3}{4}<0$，此種 x 值存在

(2) $y=x^2+1$ 時，代入 $x^2+y^2-1=x^2+(x^2+1)^2-1=x^4+3x^2<0$，此種 x 值不存在

(3) $-x^2+2y^2=1$ 時，即 $x^2=2y^2-1$ 代入 $x^2+y^2-1=3y^2-2<0$，此種 y 值存在

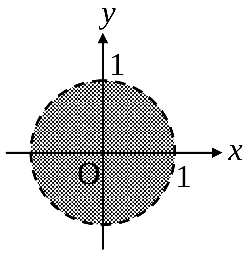
(4) $4x^2+y^2=1$ 時，即 $y^2=1-4x^2$ 代入 $x^2+y^2-1=-3x^2<0$，此種 x 值存在

(5) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 時，即 $x^2=y^2+2$ 代入 $x^2+y^2-1=2y^2+1<0$，此種 y 值不存在

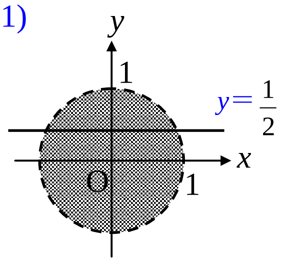
解 2：幾何解法

設 P(x, y), $\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{PQ_2}=(1-x,\ -y)\cdot(-1-x,\ -y)=x^2+y^2-1<0$,

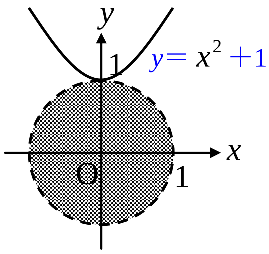
即 $x^2+y^2<1$, 其幾何意義為圓心為(0, 0), 半徑為 1 內部, 如右圖



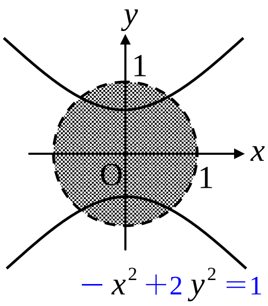
(1)



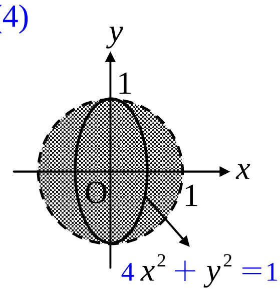
(2)



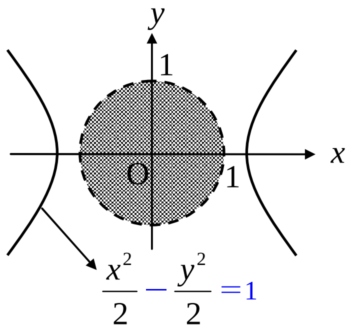
(3)



(4)



(5)

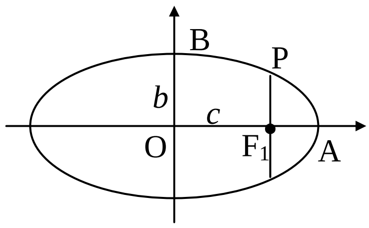


答：(1)(3)(4)

11.設 F_1, F_2 為橢圓Γ的兩個焦點。S 為以 F_1 為中心的正方形(S 的各邊可不與Γ的對稱軸平行)。試問 S 可能有幾個頂點落在Γ上？

(1) 1　(2) 2　(3) 3　(4) 4　(5) 0

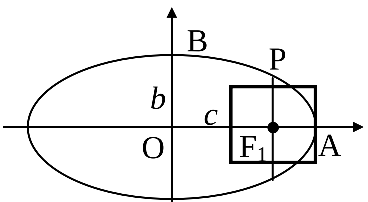
解：(1)設(不失一般性)橢圓Γ：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 且 $a^2=b^2+c^2$, $F_1(c,\ 0)$, $A(a,\ 0)$, $B(0,\ b)$



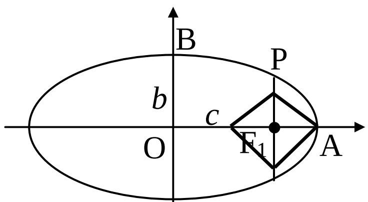
如圖, P(c, $\frac{b^2}{a}$), 且 $\overline{F_1P}=\frac{b^2}{a}$, $\overline{F_1A}=a-c$

(2)$\because \frac{b^2}{a}-(a-c)=\frac{c(a-c)}{a}>0$, $\therefore \overline{F_1P}>\overline{F_1A}$

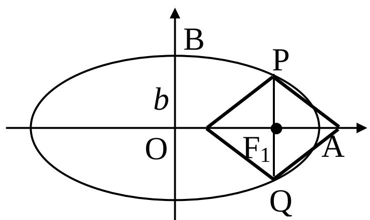
∴可能情形有



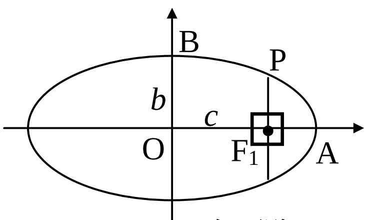
1 個頂點



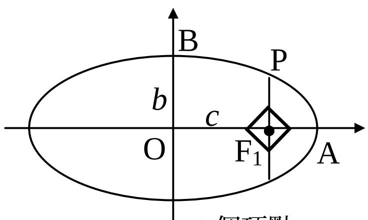
1 個頂點



2 個頂點



0 個頂點



0 個頂點

答：(1)(2)(5)

12.設實數組成的數列$\langle a_n\rangle$是公比為－0.8 的等比數列，實數組成的數列$\langle b_n\rangle$是首項為 10 的等差數列。已知$a_9>b_9$且$a_{10}>b_{10}$。請選出正確的選項。

(1) $a_9\times a_{10}<0$　(2) $b_{10}>0$　(3) $b_9>b_{10}$　(4) $a_9>a_{10}$　(5) $a_8>b_8$

解：$\langle a_n\rangle$：a_1，$a_1(-0.8)$，…，$a_9=a_1(-0.8)^8$，$a_{10}=a_1(-0.8)^9$

$\langle b_n\rangle$：10，$10+d$，…，$b_9=10+8d$，$b_{10}=10+9d$

$\because a_9>b_9$且$a_{10}>b_{10}$，$\Rightarrow a_1(-0.8)^8>10+8d$且$a_1(-0.8)^9>10+9d$

$\Rightarrow 10+9d<a_1\underline{(-0.8)^9}=a_1\underline{(-0.8)^8(-0.8)}<(10+8d)(-0.8)$，$\Rightarrow d<\dfrac{-18}{15.4}\approx-1.169<0$

(1) $a_9\times a_{10}=a_1(-0.8)^8\times a_1(-0.8)^9=a_1^{\,2}(-0.8)^{17}<0$

(2) $\because d<0$，$\therefore b_{10}=10+9d\approx10+9(-1.169)<0$

(3) $\because b_9-b_{10}=(10+8d)-(10+9d)=-d>0$，$\therefore b_9>b_{10}$

(4) $\because a_9=a_1(-0.8)^8$，$a_{10}=a_1(-0.8)^9$，其中a_1正負未知，∴無法比較

(5) $a_8=a_1(-0.8)^7<\dfrac{10+8d}{-0.8}=-\dfrac{25}{2}-10d<-34.19$，又$b_8=10+7d<1.8$，∴無法比較

答：(1)(3)

第貳部分：選填題(占 40 分)

說明：1.第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(13－35)。 2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A.設 k 為一整數。已知$\dfrac{k}{3}<\sqrt{31}<\dfrac{k+1}{3}$，則 $k=$_⑬⑭_

解 1：$\because 3\sqrt{31}=\sqrt{279}$，$k<\sqrt{279}<k+1$，且 k 為一整數，$k+1$ 也為整數

$\therefore \sqrt{256}<\sqrt{279}<\sqrt{289}$，即 $16<\sqrt{279}<17$，得知 $k=16$

解 2：$\because 3\sqrt{31}\approx3\times5.56=16.68$，$\therefore k<16.68<k+1$，且 k 為一整數，得知 $k=16$

答：16

B.設 a，b 為實數且$(a+bi)(2+6i)=-80$，其中$i^2=-1$。則$(a,\ b)=($_⑮⑯_，_⑰⑱_$)$

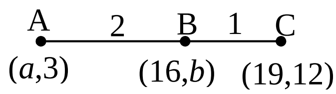
解 1：$a+bi=\dfrac{-80}{2+6i}=\dfrac{-80(2-6i)}{(2+6i)(2-6i)}=\dfrac{-80(2-6i)}{40}=-4+12i$

解 2：$(a+bi)(2+6i)=(2a-6b)+(6a+2b)i=-80$

$\Rightarrow\begin{cases}2a-6b=-80\\6a+2b=0\end{cases}$，得 $a=-4$，$b=12$

答：$(a,\ b)=(-4,\ 12)$

C.坐標平面中 A(a，3)，B(16，b)，C(19，12)三點共線。已知 C 不在 A，B 之間，
且$\overline{AC}$：$\overline{BC}$＝3：1，則 $a+b$＝⑲⑳



解：根據題意，相關位置如右：

由分點公式：(16，b)＝$\dfrac{1\cdot(a,3)+2\cdot(19,12)}{1+2}$＝($\dfrac{a+38}{3}$，$\dfrac{3+24}{3}$)

x 分量：16＝$\dfrac{a+38}{3}$，$\Rightarrow a=10$

y 分量：$b=\dfrac{3+24}{3}$，$\Rightarrow b=9$

$\Rightarrow a+b=10+9=19$

答：$a+b=19$

D.阿德賣 100 公斤的香蕉，第一天每公斤賣 40 元；沒賣完的部分，第二天降價為每公斤 36 元；第三天再降價為每公斤 32 元，到第三天全部賣完，三天所得共為 3720 元。假設阿德在第三天所賣香蕉的公斤數為 t，可算得第二天賣出香蕉的公斤數為 $at+b$，其中 a＝㉑㉒，b＝㉓㉔

解 1：根據題意，第一天賣出[$100-(at+b)-t$]公斤

$\Rightarrow 40[100-(at+b)-t]+36(at+b)+32t=3720$

$\Rightarrow 4000-4(at+b)-8t=3720$

$\Rightarrow (4a+8)t+(4b-280)=0$，$\Rightarrow \begin{cases}4a+8=0\\4b-280=0\end{cases}$，$\Rightarrow \begin{cases}a=-2\\b=70\end{cases}$

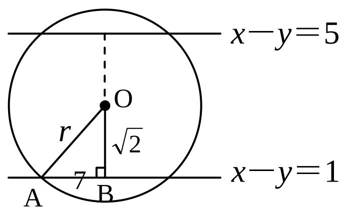
解 2：根據題意，設第一、二、三天分別賣出 x、$y=at+b$、t 公斤，則

$\begin{cases}x+y+t=100\\40x+36y+32t=3720\end{cases}$，$\Rightarrow \begin{cases}x+y=100-t\\40x+36y=3720-32t\end{cases}$，$\Rightarrow \begin{cases}x=30+t\\y=-2t+70\end{cases}$，得 $a=-2$，$b=70$

答：$a=-2$，$b=70$

E.坐標平面上，一圓與直線 $x-y=1$ 以及直線 $x-y=5$ 所截的弦長皆為 14。
則此圓的面積為㉕㉖ π

解：設圓心為 O，半徑為 r，如右圖



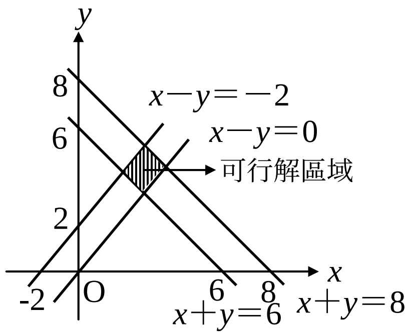
兩平行線距離：$d(x-y=1，x-y=5)=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，

得$\overline{OB}=\sqrt{2}$ 且∵弦長皆為 14，∴$\overline{AB}=7$

在ΔOAB 中，$r^2=(\sqrt{2})^2+7^2=51$，⇒圓面積＝$\pi r^2=51\pi$

答：51π

F.令$\overrightarrow{A}$，$\overrightarrow{B}$為坐標平面上兩向量。已知$\overrightarrow{A}$的長度為 1，$\overrightarrow{B}$的長度為 2 且$\overrightarrow{A}$與$\overrightarrow{B}$之間的夾角為 60^0。令$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$，$\overrightarrow{v}=x\overrightarrow{A}+y\overrightarrow{B}$，其中 x，y 為實數且符合 $6\le x+y\le 8$ 及 $-2\le x-y\le 0$，則內積$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$的最大值為 ㉗㉘



解：(1)$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=|\overrightarrow{A}||\overrightarrow{B}|\cos 60^0=1\times 2\times\frac{1}{2}=1$

(2)$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B})\cdot(x\overrightarrow{A}+y\overrightarrow{B})$

$=x|\overrightarrow{A}|^2+(x+y)\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}+y|\overrightarrow{B}|^2=2x+5y$

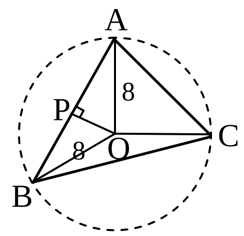
(3)∵$6\le x+y\le 8$ 及$-2\le x-y\le 0$，得可行解區域如右圖

頂點$(x，y)$	(2，4)	(3，3)	(3，5)	(4，4)
$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=2x+5y$	28	21	31	28

得知$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$的最大值為 31

答：31

G. 設銳角三角形 ABC 的外接圓半徑為 8。已知外接圓圓心到$\overline{AB}$的距離為 2，而到$\overline{BC}$的距離為 7，則$\overline{AC}=$ ㉙$\sqrt{㉚㉛}$。(化成最簡根式)



解：(1)如圖，在ΔAOP 中，$\overline{AP}=\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15}$，∴$\overline{AB}=4\sqrt{15}$

同理，在ΔBOC 中，$\overline{BC}=2\sqrt{15}$

(2)由正弦定理：$\frac{2\sqrt{15}}{\sin A}=\frac{\overline{AC}}{\sin B}=\frac{4\sqrt{15}}{\sin C}=2\times 8$

$\Rightarrow \sin A=\frac{\sqrt{15}}{8}$，$\sin C=\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\therefore \sin B=\sin(180^0-A-C)=\sin(A+C)$

$=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{\sqrt{15}}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{7}{8}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

法 1：代回正弦定理，$\Rightarrow\overline{AC}=16\sin B=4\sqrt{15}$

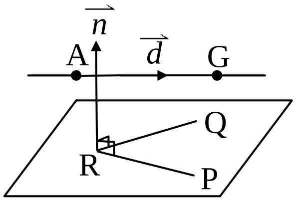
法 2：由 $\sin B=\frac{\sqrt{15}}{4}$，得 $\cos B=\frac{1}{4}$，利用餘弦定理：

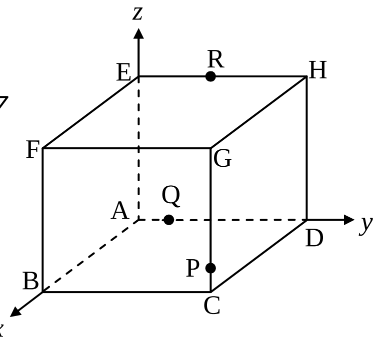
$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AC}\times\overline{BC}\cos B=(4\sqrt{15})^2+(2\sqrt{15})^2-2\times 4\sqrt{15}\times 2\sqrt{15}\times\frac{1}{4}=240$

$\therefore\overline{AC}=\sqrt{240}=4\sqrt{15}$

答：$4\sqrt{15}$

H.如下圖，在坐標空間中，A,B,C,D,E,F,G,H 為正立方體的八個頂點，已知其中四個點的坐標 A(0,0,0)、B(6,0,0)、D(0,6,0)及 E(0,0,6)，P 在線段 $\overline{CG}$上且 $\overline{CP}$：$\overline{PG}$＝1：5，R 在線段 $\overline{EH}$上且 $\overline{ER}$：$\overline{RH}$＝1：1，Q 在線段$\overline{AD}$上。若空間中通過 P,Q,R 這三點的平面，與直線 AG 不相交，則 Q 點的 y 坐標為 $\dfrac{㉜㉝}{㉞㉟}$ 。(化成最簡分數)





解：(1)根據題意，設

G(6,6,6)，P(6,6,1)，Q(0,k,0)，R(0,3,6)

(2) P,Q,R 三點的平面，與直線 AG 不相交

⇒法向量$\vec{n}$垂直方向向量$\vec{d}$

(3)$\overrightarrow{RQ}$＝(0, k－3,－6)，$\overrightarrow{RP}$＝(6,3,－5)

$\overrightarrow{RQ}\times\overrightarrow{RP}$＝(－5$k$＋33，－36，－6$k$＋18)

⇒法向量$\vec{n}$＝(－5k＋33，－36，－6k＋18)

$\overrightarrow{AG}$＝(6,6,6)＝6(1,1,1)

⇒方向向量$\vec{d}$＝(1,1,1)

法 1：∵ $\vec{n}\perp\vec{d}$，∴$\vec{n}\cdot\vec{d}$＝0，即(－5k＋33)＋(－36)＋(－6k＋18)＝0，$k=\dfrac{15}{11}$

法 2：∵$\overrightarrow{AG}\cdot(\overrightarrow{RQ}\times\overrightarrow{RP})=0$，⇒ $\begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 0 & k-3 & -6 \\ 6 & 3 & -5 \end{vmatrix}=0$

$\rightarrow\begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 0 & k-3 & -6 \\ 0 & -3 & -11 \end{vmatrix}=0\rightarrow 6\begin{vmatrix} k-3 & -6 \\ -3 & -11 \end{vmatrix}=0\rightarrow k=\dfrac{15}{11}$

答：$\dfrac{15}{11}$

參考公式及可能用到的數值

1.首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和 $S=\dfrac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}$

首項為 a，公比為 $r(r\neq 1)$等比數列的前 n 項之和 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2.三角函數的和角公式：sin(A＋B)＝sin A cos B＋sin B cos A

cos(A＋B)＝cos A cos B－sin A sin B

tan(A＋B)＝$\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

3.ΔABC 的正弦定理：$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$＝2R　(R 為ΔABC 的外接圓半徑)

ΔABC 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

4.一維數據 X：x_1，x_2，⋯，x_n，算術平均數：$\mu_X=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

標準差：$\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}((\sum_{i=1}^{n}x_i^2)-n\mu_X^2)}$

5.二維數據(X，Y)：(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，⋯，(x_n, y_n)，相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線(最適合直線)方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

6.參考數值：$\sqrt{2}\approx1.414$；$\sqrt{3}\approx1.732$；$\sqrt{5}\approx2.236$；$\sqrt{6}\approx2.449$；$\pi\approx3.142$

7.對數值：$\log_{10}2\approx0.3010$，$\log_{10}3\approx0.4771$，$\log_{10}5\approx0.6990$，$\log_{10}7\approx0.8451$

102 試題分布分析

冊別	複習單元	章節	102 學測題目	占分
第 1 冊	單元 1	Ch1 數與式	A	5
	單元 2	Ch2 多項式函數	9、B	10
	單元 3	Ch3 指數、對數函數	2、8	10
第 2 冊	單元 4	Ch1 數列與級數	12	5
	單元 5	Ch2 排列、組合	1、5	10
	單元 6	Ch3 機率	3	5
	單元 7	Ch4 數據分析	4	5
第 3 冊	單元 8	Ch1 三角	6、G	10
	單元 9	Ch2 直線與圓	E、F(1)	7.5
	單元 10	Ch3 平面向量	10(1)、C、D、F(2)	15
第 4 冊	單元 11	Ch1 空間向量		
	單元 12	Ch2 空間中的平面與直線	H	5
	單元 13	Ch3 矩陣	7	5
	單元 14	Ch4 二次曲線	10(2)、11	7.5
			20 題	100 分