全華圖書

學科能力測驗模擬試卷

數學考科

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

考試範圍：數學一～三冊

題型題數：

- 單選題，共 7 題。
- 多選題，共 5 題。
- 填充題，共 8 題。

作答方式：

- 請用黑筆或藍筆在「答案卷」上作答。

祝考試順利

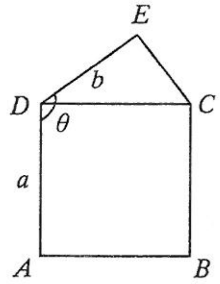
全華圖書　編印

第壹部分：選擇題（占60分）

一、單選題（占35分）

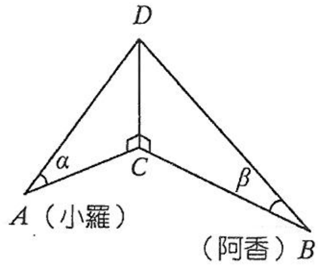
說明：第1至7題，每題選出最適當的一個選項，每題答對得5分，答錯不倒扣。

1. 老羅有一塊正方形菜園 $ABCD$ 連接一塊三角形花圃，如圖所示，其中正方形每邊長為 a，且 $\overline{DE}=b$，$\angle ADE=\theta$，則 E 點到 $\overline{AB}$ 邊的距離可表為下列哪一選項？



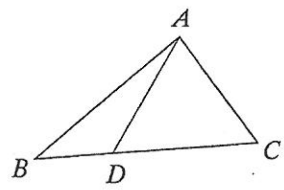
(1) $a+b\sin\theta$
(2) $a-b\sin\theta$
(3) $a+b\cos\theta$
(4) $a-b\cos\theta$
(5) $a+b\tan\theta$.

2. 如圖小羅與阿香分別在 A,B 兩地測得全華大樓頂樓 D 處的仰角分別為 α,β，已知 $0°<2\beta\le\alpha<90°$，若 $\overline{AC}=25$ 公尺，$\overline{BC}=75$ 公尺，則全華大樓樓高的最大值最接近下列哪一個整數？



(1) 41
(2) 43
(3) 45
(4) 47
(5) 49　公尺.

3. 如右圖，$\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=16$，$\overline{BC}=20$，$\overline{CA}=12$，若在 $\overline{BC}$ 邊上任取一點 D，使得 $\triangle ACD$ 的外接圓半徑為 R_1，$\triangle ABD$ 的外接圓半徑為 R_2，則 $\dfrac{R_1}{R_2}$ 的值為何？



(1) $\dfrac{1}{4}$　(2) $\dfrac{2}{3}$　(3) $\dfrac{3}{2}$　(4) $\dfrac{3}{4}$　(5) $\dfrac{4}{5}$.

4. 假設效力於日本職棒火腿隊的臺灣之光陽岱鋼近五年的年薪（日幣）如下表所示：

球季	2013	2014	2015	2016	2017
年薪（X）單位：千萬元	1	2	3	4	5

若將他的年薪換算為新臺幣，則其標準差約為多少千萬元？
（已知日幣 2.8 元等於新臺幣 1 元，$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sqrt{5}\approx 2.234$，$\sqrt{7}\approx 2.646$）
(1) 0.405
(2) 0.415
(3) 0.505
(4) 0.615
(5) 0.685.

5. 下列各數值何者最小？
(1) $\sin 20°+\cos 20°$
(2) $\sin 40°+\cos 40°$
(3) $\sin 50°+\cos 50°$
(4) $\sin 70°+\cos 70°$
(5) $\sin 80°+\cos 80°$.

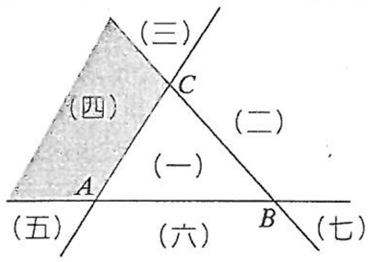
6. 某次公民與道德測驗有 10 題是非題，若題目敘述正確則寫「○」，錯誤則寫「×」.
小民作答完成後發現他的答案中沒有連續 2 題出現「○」，則小民的答案有幾種可能的情形？（有可能 10 題都是「×」）
(1) 84
(2) 124
(3) 134
(4) 144
(5) 164.

7. 設 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 為坐標平面上兩向量，已知 $|\overrightarrow{a}|=2$，$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 30°.
令 $\overrightarrow{u}=2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{v}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$，其中 x, y 為實數，且滿足 $x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 100, 2x+y\le 160$.
若內積 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ 的最大值為 M，最小值為 m，則 $M+m=$？
(1) 960
(2) 1020
(3) 900
(4) 880
(5) 1900.

二、多選題（占 25 分）

說明：第 8 至 12 題，每題的五個選項各自獨立，其中至少有一個選項是正確的。每題皆不倒扣，五個選項全部答對者得 5 分，答錯一個選項可得 3 分，答錯兩個選項得 1 分，未作答或答錯多於兩個選項者不給分。

8. 如圖, 平面上有一$\triangle ABC$, 若其三邊所在的直線將平面分割成七個區域, 則下列哪些選項中的 P 點會落在區域（四）？



(1) $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

(3) $\overrightarrow{AP}=-\frac{2015}{2016}\overrightarrow{AB}-\frac{2011}{2016}\overrightarrow{AC}$

(4) $\overrightarrow{AP}=-\frac{103}{106}\overrightarrow{AB}+\frac{105}{106}\overrightarrow{AC}$

(5) $\overrightarrow{AP}=-\frac{103}{106}\overrightarrow{AB}+\frac{101}{106}\overrightarrow{AC}$.

9. 下列哪些條件可決定唯一的一個三角形？

(1)三邊長分別為 2, 4, 6

(2) $\angle A=120°$, $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=7$

(3) $\angle A=60°$, $\overline{AB}=10$, $\overline{BC}=5$

(4) $\triangle ABC$ 的周長為 $7+\sqrt{13}$, $\angle A=60°$, $\overline{BC}=\sqrt{13}$, 且 $\overline{AB}<\overline{AC}$

(5)三高長分別為 1, 2, 3.

10. 設全華高中高三（甲）班 30 位同學期末考數學成績（X）與英文成績（Y）的統計資料如下表所示：

	平均數（μ）	標準差（σ）
數學成績（X）	$\mu_X = 55$	$\sigma_X = 2$
英文成績（Y）	$\mu_Y = 65$	$\sigma_Y = 6$

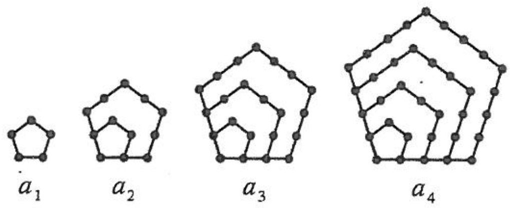
已知 Y 對 X 的最適直線 L 通過點(40, 95), 若 X 與 Y 的相關係數為 r, Y 對 X 的最適直線為 $y = ax + b$, 則下列哪些選項正確？

(1) $a > 0$
(2) $b > 0$
(3) $a + b < 0$
(4) $0 < r < \frac{1}{2}$
(5) $-1 < r < -\frac{1}{2}$.

11. 設 $f(x)$為三次實係數多項式，且 $f(1-2i) = f(1-\sqrt{2}) = 0$，試問下列哪些選項正確？

(1) $f(-1+2i) = 0$
(2) $f(1+\sqrt{2}) = 0$
(3)在坐標平面上 $y = f(x)$的圖形與 x 軸相交於兩點
(4)方程式 $f(x) = x^2 - 106$ 有實數解
(5)若 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$, 則 $f(0) > 0$.

12. 如右圖，其邊長依序為 1, 2, 3, …的正五邊形，圖中「點」的個數所成的數列為〈a_n〉，如 $a_1 = 5, a_2 = 12, a_3 = 22, a_4 = 35$, …. 利用數列的遞迴關係，可找出 a_n 與 a_{n-1} 之關係式為 $a_n = a_{n-1} + pn + q, n \geq 2$. 試問下列選項哪些正確？



(1) $a_6 = 70$
(2) $a_{10} = 176$
(3) $p = 4$
(4) $q = 1$
(5) $\sum_{k=1}^{10} a_k = 725$.

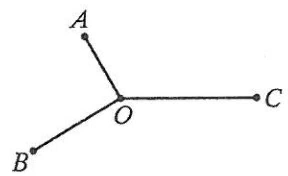
第貳部分：填充題（占 40 分）

說明：第 A 至 H 題為填充題，每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設數列$\langle a_n \rangle$是由正數所組成的等比數列，若$a_2 \cdot a_5 = \dfrac{1}{27}$，
則$\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \log_3 a_3 + \cdots + \log_3 a_6$的值為__________.

B. 在坐標平面上有一光源自點$A(-3, 2)$朝向x軸射出光線，經x軸反射後，反射光通過點$B(7, 2)$，則此光線在x軸的入射點之x坐標為__________.

C. 如圖，設O, A, B, C為平面上四點，且$\overline{OA}=1$，$\overline{OB}=\sqrt{3}$，$\overline{OC}=2$，
$\angle AOC = 120°$，$\angle BOC = 150°$，若$\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$，
則數對$(x, y) =$__________.

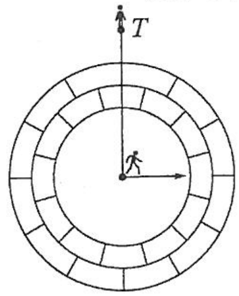


D. 在坐標平面上，質點 P 由原點出發，移動方法如下：
投一公正骰子，若出現奇數點，則向右走一單位；若出現偶數點，則向上走一單位，
則通過$(2, 3)$至$(6, 5)$的機率為＿＿＿＿＿.

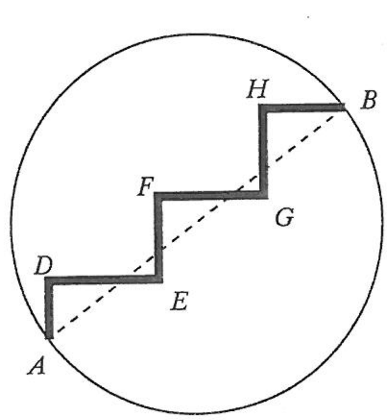
E. 假設甲袋有 4 個白球 4 個紅球，乙袋有 n 個白球 2 個紅球，今小羅投擲一公正的骰子，出現的點數為 5 點或 6 點時選擇甲袋，若出現其他點數時選擇乙袋，再從該袋中任取兩球，若小羅取出兩白球是來自乙袋的機率為$\frac{5}{6}$，則 $n=$ ＿＿＿＿＿.

F. 設 O, A, B 為平面上相異三點，且$\angle AOB = 30°$，$\overline{OA}=2$，$\overline{OB}=3$，若$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，則在 $x+y\geq 3, 3x-y\leq 9, y\leq 3$ 的條件下，向量的終點 P 所形成區域的面積為＿＿＿＿＿.

G. 有一半徑 72 公尺的圓形城堡，阿土站在城堡的正北方與城堡距離 90 公尺的 T 處，老羅從城堡中心向正東走，試問他至少要走__________公尺才會看到阿土？



H. 香香花園內有一座直徑為 100 公尺的圓形大池塘，池塘內有五彩繽紛的大蓮花，為了方便遊客觀賞，並使景觀更為雅致，決定在池塘上建造一座曲橋（如圖中粗黑線段部分）．其中 $\overline{AB}$ 為直徑，各個轉角皆為直角，則此曲橋長度 $\overline{AD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{HB}$ 的最大值為__________．



全華圖書

學科能力測驗模擬試卷

數學考科　解答與解析

解答

第壹部分：

一、單選題

1	2	3	4	5	6	7
4	2	4	3	5	4	2

二、多選題

8	9	10	11	12
245	24	25	45	1245

第貳部分：

A	B	C	D
-9	2	$(-1,-1)$	$\frac{75}{1024}$
E	F	G	H
6	18	120	$100\sqrt{2}$

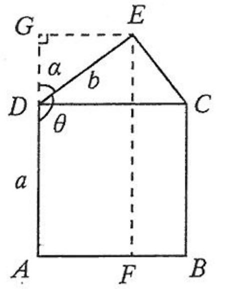
解析

第壹部分：

一、單選題

1. 如圖所示,

延長 $\overline{AD}$ 直線作直角三角形$\triangle DEG$,



令 $\angle EDG=\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha=\dfrac{\overline{DG}}{b}$,

$\therefore \overline{DG}=b\cos\alpha=b\cos(180°-\theta)$,

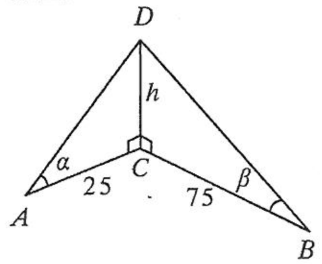
$\therefore \overline{DG}=-b\cos\theta$.

$\because \overline{DG}+\overline{AD}=\overline{AG}=\overline{EF}$,

$\therefore \overline{EF}=-b\cos\theta+a$,

故選(4).

2. 如圖,



令 $\overline{CD}=h$,

$\triangle ACD$ 中 $\tan\alpha=\dfrac{h}{25}$;

$\triangle BCD$ 中 $\tan\beta=\dfrac{h}{75}<1$,

$\because \tan\beta<\tan45°=1$,

$\because 0°<2\beta\le\alpha<90°$,

$\therefore \tan2\beta\le\tan\alpha$

$\Rightarrow \dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}\le\tan\alpha$

$\Rightarrow \dfrac{2\times\frac{h}{75}}{1-(\frac{h}{75})^2}\le\dfrac{h}{25}$

$\Rightarrow \dfrac{2}{3}\le1-(\dfrac{h}{75})^2$

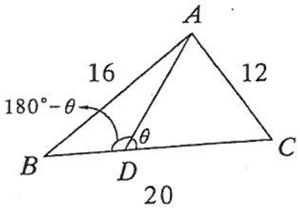
$\Rightarrow (\dfrac{h}{75})^2\le(\dfrac{1}{\sqrt{3}})^2$

$\Rightarrow \dfrac{h}{75} \le \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow h \le \dfrac{75\sqrt{3}}{3} = 25\sqrt{3} \ \approx 43.3$,

$\therefore \overline{CD}$ 的最大值最接近 43, 故選(2).

3. 如圖所示,



令 $\angle ADC = \theta$, 則 $\angle ADB = 180° - \theta$,
在$\triangle ACD$ 與$\triangle ABD$ 中,
分別由正弦定理得

$$\frac{\overline{AC}}{\sin\theta} = 2R_1 \Rightarrow \frac{12}{\sin\theta} = 2R_1 \cdots ①$$

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(180°-\theta)} = 2R_2 \Rightarrow \frac{16}{\sin\theta} = 2R_2 \cdots ②$$

$$\frac{①}{②} \Rightarrow \frac{\frac{12}{\sin\theta}}{\frac{16}{\sin\theta}} = \frac{2R_1}{2R_2}$$

$$\Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}, \text{ 故選(4).}$$

4. 由表格可知日幣的平均數為

$$\mu_X = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3,$$

則日幣的標準差為

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i-3)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5}[(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2]}$$

$$= \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2} \text{（千萬元）},$$

又 Y（新臺幣）$= \dfrac{X\text{（日幣）}}{2.8}$,

$$\therefore \sigma_Y = \sigma\left(\frac{X}{2.8}\right) = \frac{1}{2.8}\sigma_X = \frac{\sqrt{2}}{2.8} \approx \frac{1.414}{2.8}$$

$= 0.505$（千萬元）, 故選(3).

5. $\because$ 各數值皆為正,
故平方後數值最小者為所求,
由 $(\sin\theta+\cos\theta)^2$
$= \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1+\sin 2\theta$,
分別令 $\theta = 20°, 40°, 50°, 70°, 80°$,
代入上式得
(1) $(\sin 20° + \cos 20°)^2 = 1+\sin 40°$,
(2) $(\sin 40° + \cos 40°)^2 = 1+\sin 80°$,
(3) $(\sin 50° + \cos 50°)^2 = 1+\sin 100° = 1+\sin 80°$,
(4) $(\sin 70° + \cos 70°)^2 = 1+\sin 140° = 1+\sin 40°$,
(5) $(\sin 80° + \cos 80°)^2 = 1+\sin 160° = 1+\sin 20°$,
$\because \sin 20° < \sin 40° < \sin 80°$,
$\therefore (\sin 80° + \cos 80°)^2$ 最小,
即 $\sin 80° + \cos 80°$ 最小, 故選(5).

6. (1) 0 個「○」, 共 $C_0^{10} = 1$ 種
(2) 1 個「○」, 即 9 個「×」1 個「○」,
共 $C_1^{10} = 10$ 種
從 10 個「∨」中選 1 個放「○」

√×√×√×√×√×√×√×√×√×√

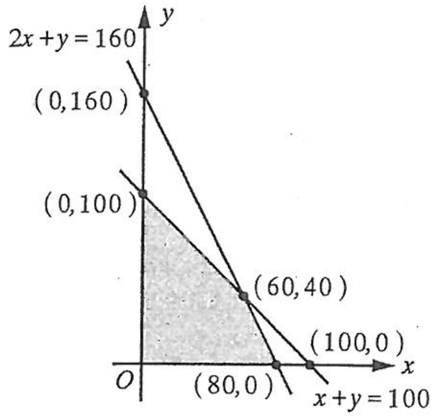
(3) 2 個「○」, 即 8 個「×」,
共 $C_2^{9} = 36$ 種
從 9 個「∨」中選 2 個放「○」

√×√×√×√×√×√×√×√×√

(4) 3 個「○」, 共 $C_3^{8} = 56$ 種
(5) 4 個「○」, 共 $C_4^{7} = 35$ 種
(6) 5 個「○」, 共 $C_5^{6} = 6$ 種,
共 $1+10+36+56+35+6 = 144$ 種, 故選(4).

7. $\because |\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$,
$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot\sqrt{3}\cdot\cos 30° = 3$,
又 $\vec{u}\cdot\vec{v} = (2\vec{a}+\vec{b})\cdot(x\vec{a}+y\vec{b})$
$= 2x|\vec{a}|^2 + (x+2y)\vec{a}\cdot\vec{b} + y|\vec{b}|^2 = 11x+9y$,

將 $\begin{cases} x \ge 0, y \ge 0 \\ x+y \le 100 \\ 2x+y \le 160 \end{cases}$ 圖示如下,



令目標函數為 $f(x,y)=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=11x+9y$,

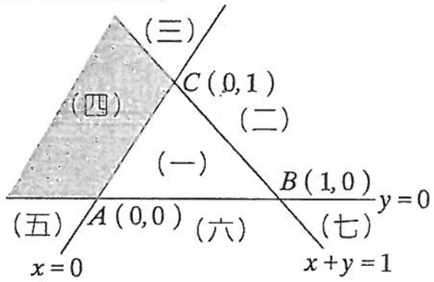
由頂點法可得下表,

(x,y)	$(0,0)$	$(80,0)$	$(60,40)$	$(0,100)$
$11x+9y$	0	880	1020	900

$\therefore M+m=1020+0=1020$, 故選(2).

二、多選題

8. 利用斜坐標系,



設 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{BC}$: $x+y=1$.

令 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,

其中滿足 $\begin{cases}x<0\\y>0\\x+y<1\end{cases}$ 者為所求.

(1)╳ : $x=\dfrac{1}{3}>0$.

(2)◯ : $x=-\dfrac{1}{2}<0, y=\dfrac{2}{3}>0, x+y=\dfrac{1}{6}<1$.

(3)╳ : $x=-\dfrac{2015}{2016}<0, y=-\dfrac{2011}{2016}<0$.

(4)◯ : $x=-\dfrac{103}{106}<0, y=\dfrac{105}{106}>0$,

$x+y=-\dfrac{103}{106}+\dfrac{105}{106}=\dfrac{2}{106}<1$.

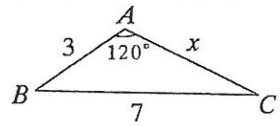
(5)◯ : $x=-\dfrac{103}{106}<0, y=\dfrac{101}{106}>0$,

$x+y=-\dfrac{103}{106}+\dfrac{101}{106}=-\dfrac{2}{106}<1$.

故選(2)(4)(5).

9. (1)╳ ; $2+4=6$ 不滿足三角形任意兩邊之和必大於第三邊.

(2)◯ ; 如圖, $\triangle ABC$ 中, 設 $\overline{AC}=x$,



由餘弦定理得

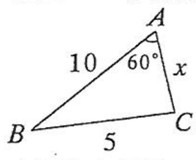
$49=9+x^2-2\cdot3\cdot x\cdot\cos120°$

$\Rightarrow x^2+3x-40=0$

$\Rightarrow (x+8)(x-5)=0$,

但 $(x+8)>0$, $\therefore x=5$（唯一存在）.

(3)╳ ; 設 $\triangle ABC$ 存在且 $\overline{AC}=x$,



由餘弦定理得

$25=100+x^2-2\cdot10\cdot x\cdot\cos60°$

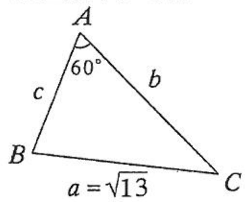
$\Rightarrow x^2-10x+75=0$,

$\because$ 判別式 $D=(-10)^2-4\times75$

$=-200<0$,

$\therefore x$ 不存在.

(4)◯ ; 如圖所示, 可得 $b+c=7\cdots$①



由餘弦定理得

$13=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos60°$

$\Rightarrow b^2+c^2-bc=13\cdots$②,

由 $c=7-b$ 代入②得

$b^2+(7-b)^2-b(7-b)=13$

$\Rightarrow 3b^2-21b+36=0$

$\Rightarrow b^2-7b+12=0$

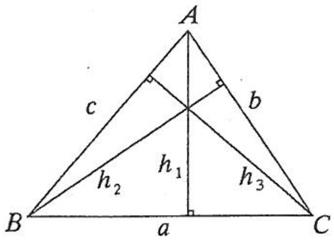
$\Rightarrow (b-3)(b-4)=0$,

又 $\overline{AB}<\overline{AC}$, $\therefore c<b$,

即 $b=4, c=3$,

則 $\triangle ABC$ 唯一存在.

(5)╳ ; 如圖所示,



$\triangle ABC$ 面積

$=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot h_1=\dfrac{1}{2}\cdot b\cdot h_2=\dfrac{1}{2}\cdot c\cdot h_3$

$\Rightarrow ah_1=bh_2=ch_3$,

令 $h_1=1, h_2=2, h_3=3$,

則 $a=2b=3c$

$\Rightarrow \dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{\frac{1}{2}}=\dfrac{c}{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow a:b:c=1:\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{3}$,

即 $a:b:c=6:3:2$,

令 $a=6k, b=3k, c=2k$,

但 $b+c=5k<6k=a$, 不滿足三角形任意兩邊之和必大於第三邊.

故選(2)(4).

10.∵最適直線必過$(\mu_X, \mu_Y)=(55, 65)$,

又(40, 95)在 L 上,

$\therefore L$: $y-95=\dfrac{65-95}{55-40}(x-40)$

$\Rightarrow y-95=(-2)(x-40)$,

得 L : $y=-2x+175$, 即 $a=-2, b=175$,

又 L 的斜率 $-2=r\cdot\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$

$\Rightarrow -2=r\cdot\dfrac{6}{2}\Rightarrow r=-\dfrac{2}{3}$,

(1)╳ : $a<0$.

(2)○ : $b=175$.

(3)╳ : $a+b=173>0$.

(4)╳.

(5)○.

故選(2)(5).

11.∵$f(x)=0$ 為三次實係數方程式,

由虛根成對定理可知 $f(1+2i)=0$,

即其三根為 $x=1+2i, 1-2i,\ 1-\sqrt{2}$.

(1)╳ : $f(1+2i)=0$ 才對.

(2)╳ : 須為有理係數方程式才對.

(3)╳ : $f(x)=0$ 僅有 $1-\sqrt{2}$ 之根, 故只有一個交點.

(4)○ : 令 $g(x)=f(x)-(x^2-106)$,

則 $g(x)=0$ 為實係數三次方程式,

必有實數解.

(5)○ : ∵ $f(x)=[x-(1+2i)][x-(1-2i)][x-(1-\sqrt{2})]$,

$\therefore f(0)=(-1-2i)(-1+2i)(-1+\sqrt{2})$

$\Rightarrow f(0)=5(\sqrt{2}-1)>0$.

故選(4)(5).

12. $a_1=5$,

$a_2=12=a_1+7=a_1+(3\times 2+1)$,

$a_3=22=a_2+10=a_2+(3\times 3+1)$,

$\vdots$

$+)\ a_n=a_{n-1}+3n+1\Rightarrow p=3, q=1$,

$a_n=a_1+3(2+3+\cdots+n)+(n-1)$

$\Rightarrow a_n=5+3(2+3+\cdots+n)+(n-1)$

$\Rightarrow a_n=2+3(1+2+3+\cdots+n)+(n-1)$

$=3\times\dfrac{n(n+1)}{2}+(n+1)$

$\Rightarrow a_n=\dfrac{1}{2}(n+1)(3n+2)=\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{5}{2}n+1$,

(1)○ : $a_6=\dfrac{1}{2}\cdot 7\cdot 20=70$.

(2)○ : $a_{10}=\dfrac{1}{2}\cdot 11\cdot 32=176$.

(3)╳ : $p=3$.

(4)○ : $q=1$.

(5)○ : $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(\frac{3}{2}k^2+\frac{5}{2}k+1)$

$\displaystyle=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{10}k^2+\frac{5}{2}\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}1$

$=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{10\times 11\times 21}{6}+\dfrac{5}{2}\times\dfrac{10\times 11}{2}+10=725$.

故選(1)(2)(4)(5).

第貳部分：

A.設其首項為 a_1，公比為 r，

$$\because a_2 \cdot a_5 = \frac{1}{27}，\therefore a_1 r \cdot a_1 r^4 = \frac{1}{27} \Rightarrow a_1{}^2 r^5 = \frac{1}{27}$$

又 $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \log_3 a_3 + \cdots + \log_3 a_6$

$= \log_3 (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_6)$

$= \log_3 (a_1 \cdot a_1 r \cdot a_1 r^2 \cdot \cdots \cdot a_1 r^5)$

$= \log_3 a_1{}^6 \cdot r^{1+2+\cdots+5}$

$= \log_3 a_1{}^6 \cdot r^{15}$

$= \log_3 (a_1{}^2 \cdot r^5)^3$

$= \log_3 (\frac{1}{27})^3$

$= \log_3 (3^{-3})^3$

$= \log_3 3^{-9}$

$= -9$.

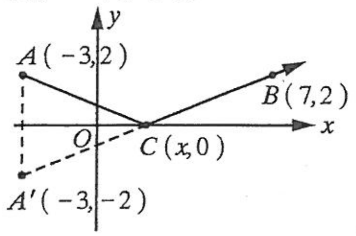
B.設此光源在 x 軸上的入射點坐標為$(x, 0)$，

$\because A(-3, 2)$關於 x 軸的對稱點為 $A'(-3, -2)$，

$\therefore$可得 $\overleftrightarrow{A'B}$ ： $y - 2 = \frac{2+2}{7+3}(x-7)$

$\Rightarrow 2x - 5y - 4 = 0$,

將 $y = 0$ 代入，得 $x = 2$.



C.依題意得 $\angle AOB = 90°$,

且 $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$，

則 $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = x\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA}$

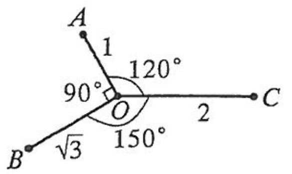
$\Rightarrow 2 \cdot 1 \cdot \cos 120° = x + 0 \cdot y$

$\Rightarrow x = -1$,

$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = x\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 150° = 0 \cdot x + (\sqrt{3})^2 \cdot y$

$\Rightarrow y = -1$.

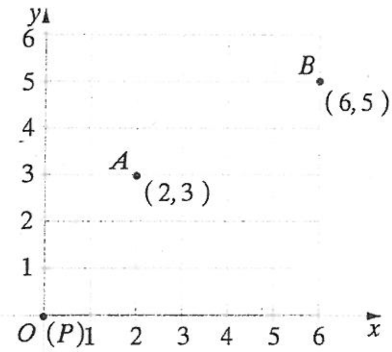


D.P(奇數點)$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$，$P$(偶數點)$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$，

由 O 至 A 之機率為 $C_2^5 (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^2 = 10 \times (\frac{1}{2})^5$，

再由 A 至 B 之機率為 $C_4^6 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^4 = 15 \times (\frac{1}{2})^6$，

故所求為 $10 \times (\frac{1}{2})^5 \times 15 \times (\frac{1}{2})^6 = \frac{75}{1024}$.



E.依題意得 P(甲)$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$，$P$(乙)$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$，

（甲：5 點或 6 點；乙：其他點數）

利用貝氏定理的樹狀圖得

- 甲袋 $\frac{1}{3}$
  - 取得兩白球 $\frac{C_2^4}{C_2^8} = \frac{3}{14}$
  - ×
- 乙袋 $\frac{2}{3}$
  - 取得兩白球 $\frac{C_2^n}{C_2^{n+2}} = \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)} = \frac{n^2 - n}{n^2 + 3n + 2}$
  - ×

令 $\frac{n^2 - n}{n^2 + 3n + 2} = t$

$\Rightarrow P$(乙袋 | 兩白球)$= \dfrac{\frac{2}{3}t}{\frac{1}{3} \times \frac{3}{14} + \frac{2}{3}t} = \frac{5}{6}$

$\Rightarrow 4t = \frac{5}{14} + \frac{10}{3}t \Rightarrow \frac{2}{3}t = \frac{5}{14} \Rightarrow t = \frac{15}{28}$,

$\therefore \dfrac{n^2-n}{n^2+3n+2}=\dfrac{15}{28}$

$\Rightarrow 13n^2-73n-30=0$

$\Rightarrow (13n+5)(n-6)=0$

$\because 13n+5\neq 0$,

$\therefore n=6$ 為所求.

F. 建立斜坐標系, 取 $O(0, 0)$,

令包含 $\overline{OA}$ 的直線為 x 軸, 且 $A(1, 0)$,

包含 $\overline{OB}$ 的直線為 y 軸, 且 $B(0, 1)$,

則可得如圖所示.

$\because D(0, 3)$, 且 $\overline{OB}=3$, $\therefore \overline{OD}=9$,

過 D 作 $\overline{DH}\perp x$ 軸, 則在 $\triangle DOH$ 中,

$\overline{DH}=\overline{OD}\sin 30^\circ=9\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}$.

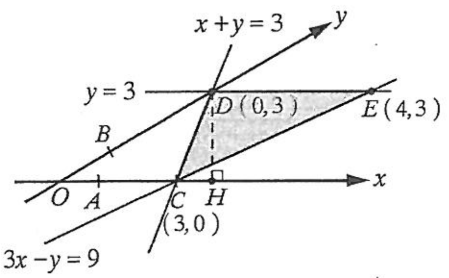
$\because E(4, 3)$, 且 $\overline{DE}\,//\,\overline{OA}$,

$\overline{DE}=4\overline{OA}=4\times 2=8$,

故所求面積為 $\dfrac{1}{2}\times\overline{DE}\times\overline{DH}$

$=\dfrac{1}{2}\times 8\times\dfrac{9}{2}$

$=18$.



G. 建立坐標系,

設城堡的圓心為 $O(0, 0)$, 半徑 $r=72$,

得圓 C : $x^2+y^2=72^2=5184$.

設阿土的位置為 $T(0, 90)$,

當老羅看到阿土時,

兩人的連接線 $\overline{TM}$ 恰為圓 C 的切線,

則 $\overleftrightarrow{TM}$: $y-90=m(x-0)$

$\Rightarrow mx-y+90=0$,

又 $d(O, \overleftrightarrow{TM})=r$

$\Rightarrow \dfrac{|0-0+90|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=72$

$\Rightarrow \dfrac{5}{\sqrt{m^2+1}}=4$

$\Rightarrow 25=16(m^2+1)$

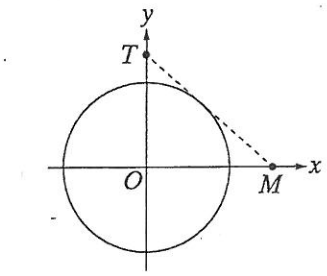
$\Rightarrow m=\pm\dfrac{3}{4}$,

由圖可知 $m=-\dfrac{3}{4}$,

$\therefore \overleftrightarrow{TM}$: $-\dfrac{3}{4}x-y+90=0$.

令 $y=0\Rightarrow x=120$, 得 $M(120, 0)$,

即老羅要向正東至少走 120 公尺才能看到阿土.



H. 如圖所示,

令 $\overline{DE}+\overline{FG}+\overline{HB}=\overline{AC}=x$

$\overline{AD}+\overline{EF}+\overline{GH}=\overline{BC}=y$

⇒曲橋總長為

$\overline{AD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GH}+\overline{HB}=x+y$

$\triangle ACB$ 中 $x^2+y^2=100^2$,

$x, y\in \mathbb{R}$ 且 $x, y>0$, 由柯西不等式得

$(x^2+y^2)\cdot(1^2+1^2)\geq(x+y)^2$

$\Rightarrow 100^2\times 2\geq(x+y)^2$

$\Rightarrow -100\sqrt{2}\leq x+y\leq 100\sqrt{2}$

即 $x+y$ 的最大值為 $100\sqrt{2}$,

得曲橋總長度最大值為 $100\sqrt{2}$ 公尺.