全國高中 105 學年度 學科能力測驗 第 1 次 模擬考試 (105.7.26)

第壹部份：選擇題(占 55 分)

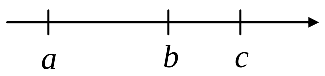
一、單選題(占 30 分)

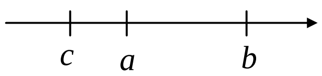
說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1.若 $a<b$ 且 $c<d$，又 $(c-a)(c-b)>0$ 且 $(d-a)(d-b)<0$，則實數 a，b，c，d 的大小關係為下列哪一個選項？

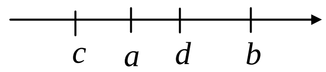
(1) $c<a<d<b$ (2) $a<c<b<d$ (3) $c<d<a<b$ (4) $c<a<b<d$ (5) $c<b<d<a$

解：1. $a<b$ 且 $(c-a)(c-b)>0$，$\Rightarrow c>a$，$c>b$ 或 $c<a$，$c<b$，如下二圖





2.$a<b$ 且 $(d-a)(d-b)<0$，$\Rightarrow a<d<b$，但是 $c<d$，$\Rightarrow$上左圖不合，即上右圖為



得知 $c<a<d<b$

答：(1)

出處：第一冊，Ch 1 數與式(數線)

2.已知 $f(z)=1+\overline{z}$，$z_1=3+2i$，$z_2=1-4i$，則 $f(\overline{z_1-z_2})=$？

(1) $3-6i$ (2) $-3+6i$ (3) $3+6i$ (4) $6-3i$ (5) $-6+3i$

解：$z_1-z_2=(3+2i)-(1-4i)=2+6i$，$\Rightarrow \overline{z_1-z_2}=\overline{2+6i}=2-6i$

$f(\overline{z_1-z_2})=f(2-6i)=1+\overline{2-6i}=1+2+6i=3+6i$

答：(3)

出處：第一冊，Ch 2 多項式函數(複數的運算)

3.請問 $5^{\log 20}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log 0.5}$ 的值為下列哪一個選項？

(1) 1 (2) $\sqrt{5}$ (3) $\sqrt{10}$ (4) 10 (5) $2\sqrt{10}$

解：$5^{\log 20}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log 0.5}=5^{\log 20}\times(0.5)^{\log 0.5}=5^{\log 20}\times(5\times10^{-1})^{\log 0.5}=5^{\log 20}\times5^{\log 0.5}\times10^{-\log 0.5}$

$=5^{\log 20+\log 0.5}\times10^{\log 0.5^{-1}}=5^{\log 20\times 0.5}\times10^{\log 2}=5^{\log 10}\times2=5\times2=10$

答：(4)

出處：第一冊，Ch 3 指數、對數函數(指對數之運算)

4.設 x，y，z 為整數，且 x，y，z 滿足 $x\log 2+y\log 6+z\log 5=\log 1200$，則 xyz 為下列哪一個選項？

(1) 6 (2) 8 (3) 9 (4) 10 (5) 12

解：原左式$=\log 2^x+\log 6^y+\log 5^z=\log 2^x\cdot6^y\cdot5^z=\log 2^x\cdot(2\cdot3)^y\cdot5^z=\log 2^{x+y}\cdot3^y\cdot5^z=\log 1200=\log\ 2^4\cdot3\cdot5^2$

$\Rightarrow x+y=4$，$y=1$，$z=2$，得知 $x=3$，$\Rightarrow xyz=3\times1\times2=6$

答：(1)

出處：第一冊，Ch 3 指數、對數函數(指對數之運算)

5.若 $(x-1)^2$ 除多項式 $x^4+ax^3-3x^2+bx+3$ 所得的餘式為 $x+1$，則 $ab=$？

(1) 9 (2) $\dfrac{5}{2}$ (3) 1 (4) 0 (5) -3

解：根據題意，設 $x^4+ax^3-3x^2+bx+3=(x-1)^2\mathrm{Q}(x)+(x+1)=(x^2-2x+1)\mathrm{Q}(x)+(x+1)$

利用綜合除法，如右圖，得知餘式 $\begin{cases}3a+b-2=1\\3-2a=1\end{cases}$，$\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$

$$\begin{array}{ccccc|c}
1 & +a & -3 & +b & +3 & \\
 & +2 & -1 & -(a+2) & -2a & 2-1\\
 & & +2(a+2) & +\ 4a & & \\
\hline
1 & +(a+2) & +2a & +(3a+b-2) & +(3-2a) &
\end{array}$$

$\Rightarrow ab=1\times0=0$

答：(4)

出處：第一冊，Ch 2 多項式函數(多項式除法、綜合除法)

6.設函數 $f(x)=\log_a x$，$a>0$ 且 $a\neq 1$，若 $f(x)$的值在範圍 $a\le x\le 2a$ 上的最大值比最小值大$\frac{1}{3}$，則 a 的所有可能值的總和為下列哪一個選項？

(1) 8　(2) $\frac{65}{8}$　(3) 9　(4) $\frac{82}{9}$　(5) $\frac{17}{4}$

解：(1)當 $a>1$，$f(x)=\log_a x$是遞增函數

$\because a\le x\le 2a$，$\Rightarrow \log_a a\le \log_a x\le \log_a 2a$，$\Rightarrow$得$\begin{cases}最大值=\log_a 2a=\log_a 2+1\\最小值=\log_a a=1\end{cases}$

$\because$最大值比最小值大$\frac{1}{3}$，$\Rightarrow \log_a 2+1=1+\frac{1}{3}$，$\Rightarrow \log_a 2=\frac{1}{3}$，得知 $a^{\frac{1}{3}}=2$，得 $a=8$

(2)當 $0<a<1$，$f(x)=\log_a x$是遞減函數

$\because a\le x\le 2a$，$\Rightarrow \log_a a\ge \log_a x\ge \log_a 2a$，$\Rightarrow$得$\begin{cases}最大值=\log_a a=1\\最小值=\log_a 2a=\log_a 2+1\end{cases}$

$\because$最大值比最小值大$\frac{1}{3}$，$\Rightarrow 1=\log_a 2+1+\frac{1}{3}$，$\Rightarrow \log_a 2=-\frac{1}{3}$，得知 $a^{-\frac{1}{3}}=2$，得 $a=\frac{1}{8}$

$\Rightarrow a$ 的所有可能值的總和$=8+\frac{1}{8}=\frac{65}{8}$

答：(2)

出處：第一冊，Ch 3 指數、對數函數(指對數運算、遞增、遞減性質)

二、多選題(占 25 分)

說明：第 7 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7.已知數線上三點 A(a)、B(b)、C(c)，則下列敘述哪些是正確的？

(1)若 $a=\sqrt{9+\sqrt{45}}$，則 A 點落在 3 與 4 之間

(2)若 a 為無理數，b 為無理數，則 ab 必為無理數

(3)若 $a<b$，則$\frac{3a+b}{4}<\frac{4a+b}{5}$

(4)若 $a=\sqrt{5}+\sqrt{12}$，$b=\sqrt{6}+\sqrt{11}$，$c=3+\sqrt{8}$，則 $a<b<c$

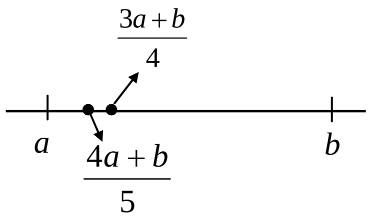
(5)$|a+1|+|a-2|$的最小值為 1

解：(1)$\because \sqrt{9+\sqrt{45}}=\sqrt{9+6.\cdots}<\sqrt{16}=4$，$\Rightarrow \sqrt{9}=3<\sqrt{9+\sqrt{45}}<4$ (正確)

(2)存在 $a=\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{2}$，得 $ab=-2$ 為有理數 (不正確)

(3)$\because \frac{4a+b}{5}-\frac{3a+b}{4}=\frac{a-b}{20}<0$，得$\frac{4a+b}{5}<\frac{3a+b}{4}$ (不正確)

另解：利用數線上的內分點公式，如右圖，得$\frac{4a+b}{5}<\frac{3a+b}{4}$



(4)相加相同，利用平方

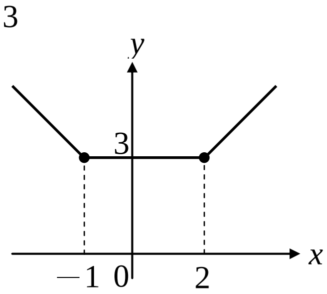
$a^2=(\sqrt{5}+\sqrt{12})^2=17+2\sqrt{60}$，$b^2=(\sqrt{6}+\sqrt{11})^2=17+2\sqrt{66}$，$c^2=(3+\sqrt{8})^2=(\sqrt{9}+\sqrt{8})^2=17+2\sqrt{72}$

$\therefore c^2>b^2>a^2$，又 a，b，$c>0$，$\Rightarrow a<b<c$ (正確)

(5)利用三角不等式$|a+1|+|a-2|=|a+1|+|-a+2|\ge|(a+1)+(-a+2)|=3$

即當$-1\le a\le 2$ 時，$|a+1|+|a-2|$有最小值為 3 (不正確)

另解：作圖如右，$|a+1|+|a-2|\ge 3$



答：(1)(4)

出處：第一冊，Ch 1 數與式(無理數、數線上的幾何、比較大小)

8.解下列個不等式，則下列哪些選項 x 的範圍在數線上所占的長度為 8？(不用考慮端點)

(1) $|x|\le 4$　(2) $|2x-1|\le 8$　(3) $1\le |x+1|\le 9$　(4) $x^2-2x-15\le 0$　(5) $\dfrac{8}{x-2}+1<0$

解：(1) $|x|\le 4$，$\Rightarrow -4\le x\le 4$，長度為 $4-(-4)=8$　(正確)

(2) $|2x-1|\le 8$，$\Rightarrow -8\le 2x-1\le 8$，$\Rightarrow -\dfrac{7}{2}\le x\le \dfrac{9}{2}$，長度為 $\dfrac{9}{2}-(-\dfrac{7}{2})=8$　(正確)

(3) $1\le |x+1|\le 9$，$\Rightarrow 1\le x+1\le 9$ 或 $1\le -x-1\le 9$，$\therefore \Rightarrow 0\le x\le 8$ 或 $-10\le x\le -2$，

$\Rightarrow 0\le x\le 8$，長度為 $8-0=8$；$-10\le x\le -2$，長度為 $-2-)-10)=8$，$\Rightarrow$總長度 $=8+8=16$　(不正確)

(4) $x^2-2x-15\le 0$，$\Rightarrow$分解得 $(x+3)(x-5)\le 0$，$\Rightarrow -3\le x\le 5$，長度為 $5-(-3)=8$　(正確)

(5) $\dfrac{8}{x-2}+1<0$，$\Rightarrow \dfrac{x+6}{x-2}<0$，$\Rightarrow (x+6)(x-2)<0$，$\Rightarrow -6\le x\le 2$，長度為 $2-(-6)=8$　(正確)

答：(1)(2)(4)(5)

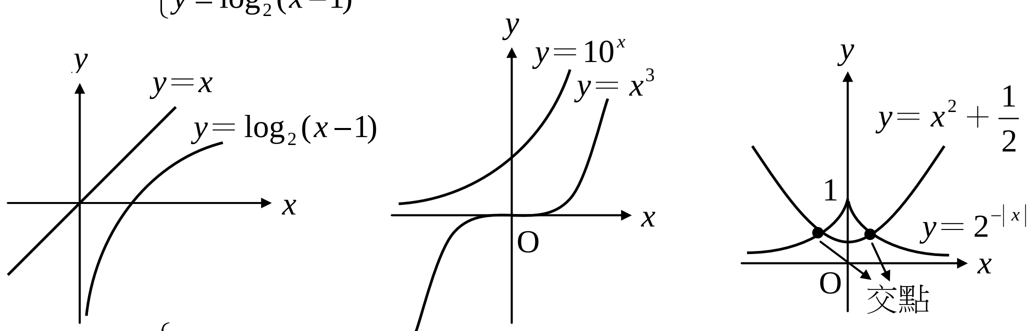
出處：第一冊，Ch 1 數與式，Ch 2 多項式函數 (絕對值、分式與二次不等式)

9.下列哪些選項，其方程式有實數解？

(1) $x=\log_2(x-1)$　(2) $10^x=x^3$　(3) $x^2=2^{-|x|}-\dfrac{1}{2}$

(4) $x^5-7x^4+x^3+2x^2-5x+1=0$　(5) $x^4+7x^2+5=0$

解：(1)視為聯立式 $\begin{cases} y=x \\ y=\log_2(x-1)\end{cases}$，分別作圖如下圖左，得知圖形無交點，即無實數解



(2)視為聯立式 $\begin{cases} y=10^x \\ y=x^3\end{cases}$，分別作圖如上圖中，得知圖形無交點，即無實數解

(3) $x^2=2^{-|x|}-\dfrac{1}{2}$，$\Rightarrow x^2+\dfrac{1}{2}=2^{-|x|}$，視為聯立式 $\begin{cases} y=x^2+\dfrac{1}{2} \\ y=2^{-|x|}\end{cases}$，分別作圖如上右圖，因圖形交 2 點，即有 2 實數解

(4) $\because x^5-7x^4+x^3+2x^2-5x+1=0$ 為實係數 5 次(奇數次)方程式，根據需根成雙定理，得知至少有 1 實數根

(5)令 $y=x^2$，$\Rightarrow$原式變為 $y^2+7y+5=0$，得解 $y=\dfrac{-7+\sqrt{29}}{2}$ 或 $\dfrac{-7-\sqrt{29}}{2}$

即 $x^2=\dfrac{-7+\sqrt{29}}{2}<0$，有 2 共軛複數根；又 $x^2=\dfrac{-7-\sqrt{29}}{2}<0$，也有 2 共軛複數

即原方程式有 4 個複數根，得知無實數解

答：(3)(4)

出處：第一冊，Ch 2 多項式函數，Ch 3 指數、對數函數(指對數作圖、性質，複數根之判別)

10.設 $\dfrac{k}{10^n}<\left(\dfrac{1}{6}\right)^{15}<\dfrac{k+1}{10^n}$，其中 n，k 皆為正整數，則下列敘述哪些是正確的？

(1) $n=11$　(2) $k=2$　(3) $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{15}$ 在小數點後第 11 為始出現不為 0 的數字

(4) $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{15}$ 在小數點以下開始出現不為 0 的數字是 3　(5) $n+k=14$

解：根據題意，意即$\left(\dfrac{1}{6}\right)^{15}$寫成小數時，小數點後第 n 位始出現不為 0 的數，又此數為 k？

令 $x=\left(\dfrac{1}{6}\right)^{15}$，取 $\log x=\log\left(\dfrac{1}{6}\right)^{15}=(-15)\log 6=(-15)(\log 2+\log 3)=(-15)(0.3010+0.4771)=-11.6715$

$\Rightarrow \log x=-11.6715=-12+0.3285$，即首數$=-12$，尾數$=0.3285$，且 $\log 2<0.3285<\log 3$，知 $0.3285=\log 2.\cdots$

$\therefore \log x=\log 10^{-12}+\log 2.\cdots=\log 2.\cdots\times 10^{-12}$，$\Rightarrow x=2.\cdots\times 10^{-12}$，$\Rightarrow \dfrac{2}{10^{12}}<x<\dfrac{3}{10^{12}}$

$\Rightarrow$表示$\left(\dfrac{1}{6}\right)^{15}$寫成小數時，小數點後第 12 位始出現不為 0 的數，又此數為 2，$\Rightarrow n=12$，$k=2$

答：(2)(5)

出處：第一冊，Ch 3 指數、對數函數(首數、尾數的應用)

11.設二次函數 $f(x)=x^2-2ax+b$ 的圖形過點(1，1)，且和 x 軸有兩個相異交點，若此兩個交點都在$-1<x<1$ 的範圍內，則下列敘述哪些是正確的？

(1) $b=2a$　(2) $f(-1)<0$　(3) $-1<a<1$　(4) $f(a)>0$　(5) $-\dfrac{1}{4}<a<0$

解：(1)$\because f(x)=x^2-2ax+b$ 的圖形過點(1，1)，$\therefore f(1)=1-2a+b=1$，$\Rightarrow 2a-b=0$，即 $b=2a$　(1)正確

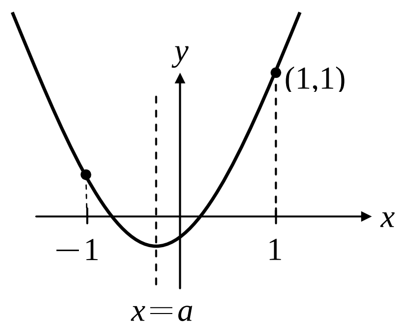
(2) $f(x)$為開口向上之拋物線，根據題意，如右圖，得知 $f(-1)>0$　(2)不正確

(3)$\because f(x)=x^2-2ax+b=x^2-2ax+2a=(x-a)^2+(2a-a^2)$

頂點為$(a，2a-a^2)$，$\Rightarrow$根據題意，x 分量：$-1<a<1$　(3)正確

(4)如右圖，得知對稱軸 $x=a$，$\Rightarrow f(a)<0$　(4)不正確

(5)由$\begin{cases}\text{頂點}\,x\,\text{分量} & -1<a<1\\ \text{頂點}\,y\,\text{分量} & 2a-a^2<0\\ f(-1)=1+4a>0\end{cases}$，$\Rightarrow\begin{cases}-1<a<1\\ a<0\text{ 或 }a>2\\ a>-\dfrac{1}{4}\end{cases}$，得知$-\dfrac{1}{4}<a<0$　(5)正確



答：(1)(3)(5)

出處：第一冊　Ch2 多項式函數(二次函數性質)

第貳部份：選填題(占 45 分)

說明：1.第 A 至 I 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(12－26)。 2.每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

A.一道絕對值不等式題目$|mx+1|<n$。阿燦看錯 m，解得 x 的範圍為$-4<x<2$；小銘看錯 n，解得 x 的範圍為$-3<x<2$，則在正確的題目中，$m+n$ 應為__⑫__

解：阿燦：$-4<x<2$，$\Rightarrow -3<x+1<3$，$\Rightarrow |x+1|<3$，看錯 m，$\therefore$得知 $n=3$

小銘：$-3<x<2$，，$\Rightarrow -\dfrac{5}{2}<x+\dfrac{1}{2}<\dfrac{5}{2}$，$\Rightarrow \left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{5}{2}$，$\Rightarrow |2x+1|<5$，看錯 n，$\therefore$得知 $m=2$

$\therefore m+n=2+3=5$

答：5

出處：第一冊　Ch 1 數與式(絕對值不等式)

B.設二次函數 $y=x^2-3x+k$ 的圖形與直線 $y=x-1$ 交於 P，Q 兩點，若 $\overline{PQ}=4\sqrt{2}$，則 $k=$ ⑬⑭ 。

解：P，Q 兩交點 $\begin{cases} y=x^2-3x+k \\ y=x-1 \end{cases}$，得 $x^2-3x+k=x-1$，$\Rightarrow x^2-4x+(k+1)=0$，解得 $x=2\pm\sqrt{-k+3}$

當 $x=2+\sqrt{-k+3}$，$y=x-1=1+\sqrt{-k+3}$，$\Rightarrow$令 P$(2+\sqrt{-k+3}$，$1+\sqrt{-k+3})$

當 $x=2-\sqrt{-k+3}$，$y=x-1=1-\sqrt{-k+3}$，$\Rightarrow$令 Q$(2-\sqrt{-k+3}$，$1-\sqrt{-k+3})$

$\Rightarrow \overline{PQ}=\sqrt{[2\sqrt{-k+3}]^2+[2\sqrt{-k+3}]^2}=\sqrt{8(-k+3)}=4\sqrt{2}$，$\Rightarrow$得 $k=-1$

另解：(1)P，Q 兩交點 $\begin{cases} y=x^2-3x+k \\ y=x-1 \end{cases}$，得 $x^2-3x+k=x-1$，$\Rightarrow x^2-4x+(k+1)=0$

(2)令 $x^2-4x+(k+1)=0$ 的兩根為 α、β，$\Rightarrow \begin{cases} \text{兩根和}\ \alpha+\beta=4 \\ \text{兩根積}\ \alpha\beta=k+1 \end{cases}$ 且設 P$(\alpha$，$\alpha-1)$，Q$(\beta$，$\beta-1)$

$\overline{PQ}=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+[(\alpha-1)-(\beta-1)]^2}=\sqrt{2(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{2[(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta]}=4\sqrt{2}$

平方，$4[(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta]=32$，$\Rightarrow\therefore(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=8$，$\Rightarrow 16-4(k+1)=8$，得 $k=-1$

答：-1

出處：第一冊 Ch 2 多項式函數(距離；根與係數的關係)

C.已知 a，b，c，d 皆為大於 1 的正數，且 $a^2=b^3=c^4=d^5$，則 $\log_{ad} bc=\dfrac{⑮}{⑯}$。(化為最簡分數)

解：令 $a^2=b^3=c^4=d^5=k^{60}$，$\Rightarrow a=k^{30}$，$b=k^{20}$，$c=k^{15}$，$d=k^{12}$，得 $ad=k^{42}$，$bc=k^{35}$

$\Rightarrow \log_{ad} bc=\log_{k^{42}} k^{35}=\dfrac{35}{42}\log_k k=\dfrac{35}{42}=\dfrac{5}{6}$

答：$\dfrac{5}{6}$

出處：第一冊 Ch 3 指數、對數函數 (指對數運算之應用)

D.已知實係數四次方程式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 有實數，其中某兩根和為 $3-i$，另外的兩根乘積為 $8+4i$，則 $d=$ ⑰⑱ 。

解：(1)根據題意，實係數四次多項式方程式恰有四根，又某兩根和為 $3-i$，得知此兩根為一實數根，一虛根可假設此兩根為 α、$k-i$，α、k 為實數

(2)根據實係數方程式虛根成共軛性質，$\Rightarrow$假設另兩根為 β、$k+i$，β 為實數

(3) $\begin{cases} \alpha+(k-i)=3-i \\ \beta(k+i)=8+4i \end{cases}$，$\Rightarrow \begin{cases} (\alpha+k)-i=3-i \\ \beta k+\beta i=8+4i \end{cases}$，$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+k=3 \\ \beta k=8 \\ \beta=4 \end{cases}$，$\Rightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ k=2 \\ \beta=4 \end{cases}$

$d=(\alpha)(k-i)(\beta)(k+i)=1\times(2-i)\times4\times(2+i)=20$

答：20

出處：第一冊 Ch 2 多項式函數 (實係數方程式虛根成共軛性質)

E.設 $f(x)$，$g(x)$為多項式，若$(x^2+1)f(x)$除以 $x-1$ 的餘式為 6，而$(4x-3)g(x)$除以 x^2-4x+3 的餘式為 $2x+1$，則$(x^2+x+1)f(x)g(x)$除以 $x-1$ 的餘式為 ⑲⑳ 。

解：根據題意，設$(x^2+1)f(x)=(x-1)Q_1(x)+6$ ……(1)，$(4x-3)g(x)=(x^2-4x+3)Q_2(x)+(2x+1)$ ……(2)

令$(x^2+x+1)f(x)g(x)=(x-1)Q(x)+k$ ……(3)

當 $x=1$，代入(1)，得 $2f(1)=6$，$\Rightarrow f(1)=3$

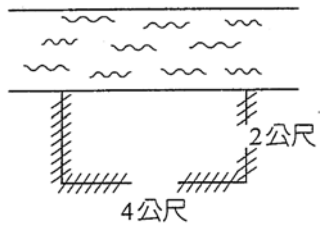
代入(2)，得 $g(1)=3$

代入(3)，得 $3f(1)g(1)=3\times3\times3=k$，$\Rightarrow k=27$

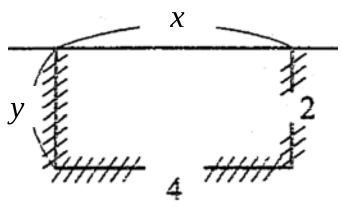
即$(x^2+x+1)f(x)g(x)$除以 $x-1$ 的餘式為 $k=27$

答：27

出處：第一冊 Ch 2 多項式函數 (除法原理、餘式定理)



F.小萱想用竹籬沿著河邊圍出面積為 288 平方公尺的長方形菜圃，並在其中一邊留下 4 公尺的入口，另外一邊留下 2 公尺的入出口(相鄰河的一邊不圍竹籬)，僅圍三個邊)，如右圖所示，則小萱最少可用__㉑㉒__公尺的竹籬就能夠完成目標



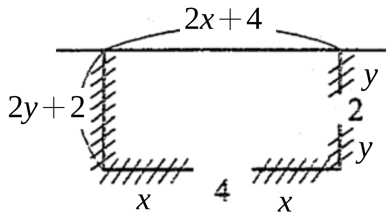
解：(1)如右圖，設長為 x 公尺，寬為 y 公尺，面積 $xy=288$

使用竹籬長＝周長＝$(x-4)+y+(y-2)=x+2y-6$

(2)利用算幾不等式，先求 $x+2y$ 的最小值

$\Rightarrow \dfrac{x+2y}{2}\geq\sqrt{x\cdot(2y)}=\sqrt{2xy}=\sqrt{576}=24$

$\therefore x+2y\geq 48$，周長$=x+2y-6\geq 48-6=42$



另解：(1)如右圖，設長為 $2x+4$ 公尺，寬為 $2y+2$ 公尺，

面積$(2x+4)(2y+2)=288$，$\Rightarrow(x+2)(2y+2)=144$

使用竹籬長＝周長$=2x+2y+(2y+2)=2x+4y+2=2(x+2y)+2$

(2)利用算幾不等式，先求 $x+2y$ 的最小值

$\Rightarrow \dfrac{(x+2)+(2y+2)}{2}\geq\sqrt{(x+2)\cdot(2y+2)}=\sqrt{144}=12$

$\Rightarrow(x+2)+(2y+2)\geq 24$，得知 $x+2y\geq 20$，$\therefore$周長$=2(x+2y)+2\geq 2\times 20+2=42$

答：42

出處：第一冊 Ch 1 數與式 (利用算幾不等式求最大、最小值)

G.已知 $x>1$ 且 $y>1$，若$\log_y x-3\log_x y^4=\log_{\sqrt{2}}\dfrac{1}{4}$，則 x^2-6y^2+4 的最小值為__㉓㉔__。

解：(1)方程式左式$=\log_y x-3\log_x y^4=\log_y x-12\log_x y$；右式$=\log_{\sqrt{2}}\dfrac{1}{4}=\log_{2^{\frac{1}{2}}}2^{-2}=-4$

即方程式 $\Rightarrow\log_y x-12\log_x y=-4$

(2)令$\log_x y=A$，($\because x>1$ 且 $y>1$，$\therefore A>0$)，則$\log_y x=\dfrac{1}{A}$

方程式 $\Rightarrow\dfrac{1}{A}-12\times A=-4$，化簡為 $12A^2-4A-1=0$，分解$(2A-1)(6A+1)=0$，得 $A=\dfrac{1}{2}$ 或 $A=-\dfrac{1}{6}$(不合)

$\Rightarrow\therefore A=\dfrac{1}{2}=\log_x y$，得關係式 $x^{\frac{1}{2}}=y$，即 $x=y^2$

(3)所求 $x^2-6y^2+4=x^2-6x+4=(x-3)^2-5\geq-5$，即得最小值為$-5$

答：-5

出處：第一冊 Ch 3 指數、對數函數 (指對數運算、配方法求最小值)

H.「GO 黑動」錢莊貸款一律採「九出十三歸」法則計算：貸款者借 10000 元，實拿 9000 元(1000 元為貸款手續費)，一期(10 天)後須償還 13000 元，並且採複利計息。今阿拓跟「GO 黑動」貸款 20000 元，(實拿 18000 元)，且其間未償還任何借款，則最少經過__㉕__個月後阿拓須償還超過 4000000 元。($\log1.3\approx0.1139$，一個月以 30 天計，不足一個月者以一個月計算)

解：(1)根據題意：本金 10000 元，一期後得本利和 13000 元

設利率為 r，利用公式 $10000(1+r)^1=13000$，得知利率 $r=0.3$

(2)設阿拓貸款 20000 元，x 期後須償還超過 4000000 元

利用公式 $20000(1+0.3)^x\geq4000000$，$\Rightarrow(1+0.3)^x\geq 200$

取 $\log(1+0.3)^x\geq\log200=2+\log2=2.3010$

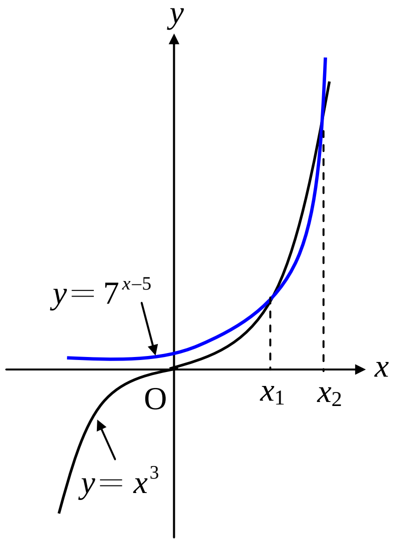
$\Rightarrow x(\log1.3)\geq 2.3010$，$\Rightarrow x\geq\dfrac{2.3010}{0.1139}\approx 20.2$，$\Rightarrow x\approx 20.2\times10$ 天$=202$ 天≈ 6.7 月

$\therefore$最少 7 個月後阿拓須償還超過 4000000 元

答：7

出處：第一冊 Ch 3 指數、對數函數 (指對數運算、解複利計息問題)

I.若Γ_1：$x-3=\log_7 y$ 與Γ_2：$\dfrac{x^3}{y}=\dfrac{1}{49}$ 在第一象限交於 P(x_1 ， y_1)，Q(x_2 ， y_2)兩點，其中 $x_1<x_2$ ，且 $k<x_2<k+1$，k 為正整數，則 $k=$ ㉖ 。



解：Γ_1：$y=7^{x-3}$ 代入Γ_2：$x^3=\dfrac{1}{49}y=\dfrac{1}{49}\times 7^{x-3}=7^{x-5}$，即解 $x^3=7^{x-5}$ 的 x 值

圖解之示意圖，如右圖

x	5	6	7	8	9
$x^3=7^{x-5}$	$x^3>7^{x-5}$	$x^3>7^{x-5}$	$x^3>7^{x-5}$	$x^3>7^{x-5}$	$x^3<7^{x-5}$

得知 $8<x<9$ 時，使 $x^3=7^{x-5}$，即 $k=8$

答：8

出處：第一冊 Ch 2 多項式函數(勘根定理)，Ch 3 指數、對數函數