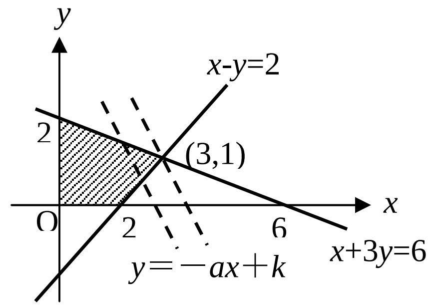
第三冊模擬試題(三角函數、直線與圓、平面向量)

一、單選題

1.已知 x, y 滿足聯立不等式$\begin{cases} x+3y\le 6 \\ x-y\le 2 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$，且只有當 x＝3, y＝1 時, ax＋y 有最大值, 則下列哪一個選項不會是實數 a 的值？

(1)－1　(2) $\sqrt{2}$　(3) $\log 3$　(4) $5^{\frac{2}{3}}$　(5) 10^5



解：設 ax＋y＝k, ∴y＝－ax＋k, 表示斜率為－a

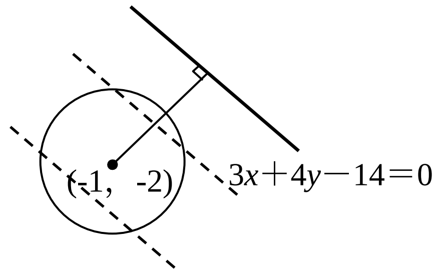
過(3, 1)有最大值, ∴斜率－a＜－$\frac{1}{3}$, ⇒ a＞$\frac{1}{3}$

答：(1)

出處：直線與圓、線性規畫

2.在圓 C：$(x+1)^2+(y+2)^2=5$ 上共有多少個點到直線 L：$3x+4y-14=0$ 的距離正好是整數值？

(1) 7　(2) 8　(3) 9　(4) 10　(5) 11



解：圓心(－1, －2)到直線 L 的距離＝$\frac{|-3-8-14|}{\sqrt{3^2+4_2}}$＝5

⇒設圓上之點到直線 L 的距離為 d, 則 $5-\sqrt{5}\le d\le 5+\sqrt{5}$

∴整數值 d＝3, 4, 5, 6, 7 共有 5×2＝10

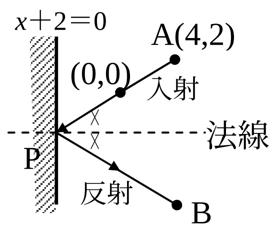
答：(4)

出處：直線與圓

1.一光線由 A(4, 2)發射, 經原點後, 遇直線 x＋2＝0 反射, 求反射後的路徑在哪一直線上？

(1) $x+2y=0$　(2) $x+2y+4=0$　(3) $2x-y+3=0$

(4) $2x-y=0$　(5) $2x-y-6=0$



解：1.如右圖, 入射線經過(4, 2), (0, 0), 方程式為 $\frac{y-0}{x-0}=\frac{2-0}{4-0}$, 得 $x-2y=0$

與直線 x＋2＝0 交於 P(－2, －1)

2.法線於與直線 x＋2＝0 垂直, 且通過 P 點, 得法線為 y＝－1, 故 A 點對稱於法線的 B(4, －4)

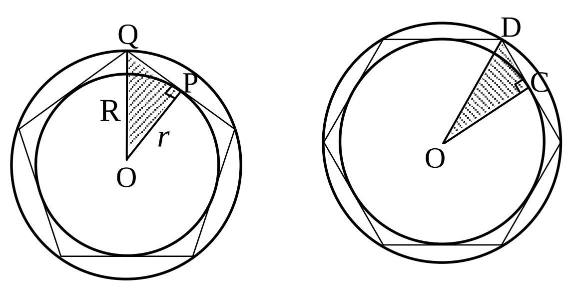
3.反射線 PB 為 $\frac{y-(-1)}{x-(-2)}=\frac{-4-(-1)}{4-(-2)}$, 得 $x+2y+4=0$

答：(2)

出處：100 北區 2 模, 平面向量

4.小志計算出一正五邊形外接圓與內切圓之間所夾區域的面積為 A；小剛計算出另一正六邊形外接圓與內切圓之間所夾區域的面積為 B；若這兩個正多邊形的邊長都是 2, 則下列何者正確？

(1)A＝$\frac{25}{36}$B　(2) A＝$\frac{36}{25}$B　(3) A＝$\frac{5}{6}$B　(4) A＝$\frac{6}{5}$B　(5) A＝B



解：1.如右圖, 設正五邊形外接圓與內切圓之半徑分別為 R, r

則在ΔPOQ 中, $R^2-r^2=\overline{PQ}^2=1$, ⇒A＝$\pi R^2-\pi r^2=\pi$

2.同理, 右圖ΔCOD 中, 得 B＝π, 故 A＝B

答：(5)

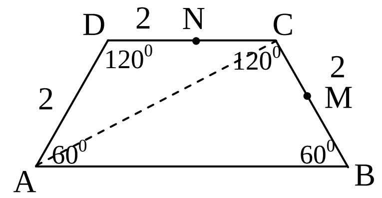
出處：100 北區 2 模, 直線與圓

5.四邊形 ABCD 為等腰梯形, 其中$\overline{AB}$//$\overline{CD}$, ∠A＝∠B＝60^0, $\overline{AD}=\overline{DC}=\overline{CB}=2$, M, N 各為$\overline{BC}$、$\overline{CD}$的中點, 則下列哪一個選項是錯誤的？

(1) $|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}|=2\sqrt{3}$　(2) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$　(3)$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AN}$

(4)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=8$　　(5)若$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}$，則 P 必為$\overline{AB}$的中點

解：(1)如右圖，連接 AC，$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$，在ΔACD 中，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2^2+2^2-2\cdot2\cdot2\cos120^0}=2\sqrt{3}$



(2)∵M，N 各為$\overline{BC}$、$\overline{CD}$的中點，∴在ΔBCD 中，$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

(3)∵$\overline{AB}=4=2\overline{CD}=4\overline{DN}$，∴$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AN}$

(4)$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{CD}$夾角為 180^0(反向)，∴$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|\cos180^0=4\times2\times(-1)=-8$

(5)∵$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}$，$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{DC}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$，∴P 必為$\overline{AB}$的中點

答：(4)

出處：100 北區 2 模，平面向量

2.若 tan(α＋β)＝3，tan(β－γ)＝－2，則α＋γ的角度可能是以下哪一個？

(1) 15^0　(2) 30^0　(3) 60^0　(4) 135^0　(5) 150^0

解：∵α＋γ＝(α＋β)－(β－γ)

∴$\tan(\alpha+\gamma)=\tan[(\alpha+\beta)-(\beta-\gamma)]=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan(\beta-\gamma)}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan(\beta-\gamma)}=\frac{3-(-2)}{1+3(-2)}=-1$，得知α＋γ＝$135^0$

答：(4)

出處：100 北區 3 模，三角函數

5.化簡 $\sin(280^0)\sin(-200^0)+\cos(160^0)\cos(-80^0)$之值為？

(1)－3　(2)－2　(3)－1　(4)$-\frac{1}{2}$　(5)$\frac{\sqrt{3}}{2}$

解：∵$\sin(280^0)=\sin(270^0+10^0)=-\cos(10^0)$　　$\sin(-200^0)=-\sin(200^0)=-\sin(180^0+20^0)=\sin(20^0)$

$\cos(160^0)=\cos(180^0-20^0)=-\cos(20^0)$　　$\cos(-80^0)=\cos(80^0)=\cos(90^0-10^0)=\sin(10^0)$

∴$\sin(280^0)\sin(-200^0)+\cos(160^0)\cos(-80^0)=-\cos(10^0)\sin(20^0)-\cos(20^0)\sin(10^0)$

$=-[\cos(10^0)\sin(20^0)+\cos(20^0)\sin(10^0)]=-\sin(20^0+10^0)=-\frac{1}{2}$

答：(4)

出處：100 全國 2 模，三角函數

3.欲作出函數 $y=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$的圖形，只需將函數 $y=\sin2x$ 之圖形

(1)向右平移$\frac{5\pi}{12}$單位　(2)向左平移$\frac{5\pi}{12}$單位　(3)向右平移$\frac{5\pi}{6}$單位　(4)向左平移$\frac{5\pi}{6}$單位　(5)向左平移$\frac{5\pi}{3}$單位

解：∵$y=\cos(2x+\frac{\pi}{3})=y=\sin(\frac{\pi}{2}+(2x+\frac{\pi}{3}))=\sin(2x+\frac{5\pi}{6})=\sin2(x+\frac{5\pi}{12})$

∴由函數 $y=\sin2x$ 向左平移$\frac{5\pi}{12}$單位，得 $\sin2(x+\frac{5\pi}{12})=\sin(2x+\frac{5\pi}{6})=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$

答：(2)

出處：100 全國 3 模，三角函數

4.平面坐標系中，O 為原點，已知兩點 A(3,1)，B(－1,3)，若點 P 滿足$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，其中α、β∈R 且α＋β＝1，則點 P 之軌跡方程式為何？

(1)$(x-1)^2+(y-2)^2=5$　(2) $3x+2y-11=0$　(3) $2x-y=0$　(4) $x+2y-5=0$　(5)$\begin{cases}x=3-4t\\y=1+2t\end{cases}$，$0\le t\le1$

解：滿足$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，其中α、β∈R 且α＋β＝1，得知 P，A，B 共線，∴則點 P 之軌跡為直線 AB

直線 AB 方程式為$\frac{y-1}{x-3}=\frac{3-1}{-1-3}=\frac{1}{-2}$，⇒$x+2y-5=0$

答：(4)

出處：100 全國 3 模，平面向量

6.若$\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，則$\cos\alpha+\sin\alpha$之值為何？

(1) $\dfrac{1}{2}$ (2)$-\dfrac{1}{2}$ (3)$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (4)$\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ (5)$-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

解：1.$\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})}=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

展開，得 $2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\cos\alpha-\sin\alpha$，$\Rightarrow 2(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)=\cos\alpha-\sin\alpha$

2.由分母$\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})\neq 0$，$\therefore \cos\alpha-\sin\alpha\neq 0$，得$\cos\alpha+\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$

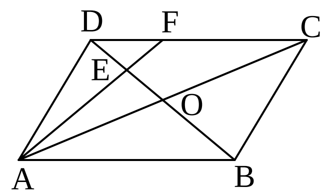
答：(1)

出處：100 全國 3 模，三角函數

7.圖(二)：在平行四邊形 ABCD 中，$\overline{AC}$與$\overline{BD}$交於 O 點，E 是$\overline{OD}$之中點，$\overline{AE}$之延長線交$\overline{CD}$於 F，若$\overrightarrow{AC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BD}=\vec{b}$，則$\overrightarrow{AF}$等於

(1)$\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$ (2)$\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$ (3)$\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

(4)$\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$ (5)$\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$



解：1.平行四邊形加法，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}$，減法性質，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}$

$\therefore$兩式相加，得$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$，$\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$

2.$\therefore \Delta DEF\sim\Delta BOA$，則$\overline{DF}:\overline{AB}=\overline{DB}:\overline{EB}=1:3$，$\therefore \overrightarrow{DF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

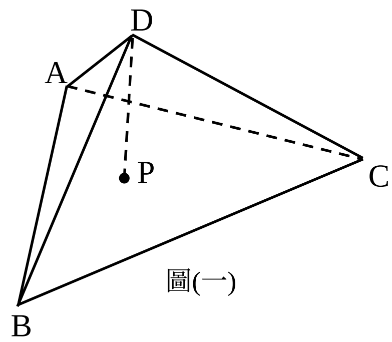
$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

答：(3)

出處：100 全國 3 模，平面向量

3.如圖(一)，已知四面體 ABCD 每一個側面和底面 ABC 的兩面角都相等。設頂點 D 點在底面 ABC 的投影點為 P，則下列各敘述何者是正確的？

(1) P 點為三角形 ABC 的重心
(2) P 點為三角形 ABC 的內心
(3) P 點為三角形 ABC 的外心
(4) P 點為三角形 ABC 的垂心
(5)條件不足，無法判斷 P 點與三角形 ABC 之關係



圖(一)

解：1.觀察底面 ABC 與側面 BCD 的兩面角，如右圖

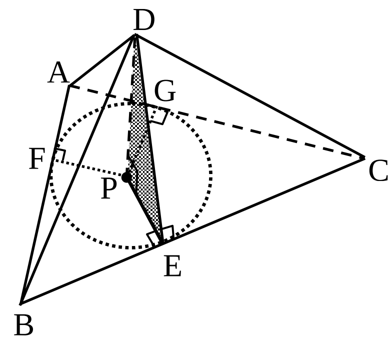
$\because$共用邊為$\overline{BC}$，$\therefore$過 P 作$\overline{PE}\perp\overline{BC}$交$\overline{BC}$於 E，連接$\overline{DE}$

$\Rightarrow$得兩面角為$\angle DEP$，設$\angle DEP=\theta$，$\tan\theta=\dfrac{\overline{DP}}{\overline{PE}}$

2.同理，作$\overline{PG}\perp\overline{AC}$，$\angle DGP=\theta$，$\tan\theta=\dfrac{\overline{DP}}{\overline{PG}}$，作$\overline{PF}\perp\overline{AB}$，$\angle DFP=\theta$，$\tan\theta=\dfrac{\overline{DP}}{\overline{PF}}$

$\Rightarrow \tan\theta=\dfrac{\overline{DP}}{\overline{PE}}=\dfrac{\overline{DP}}{\overline{PG}}=\dfrac{\overline{DP}}{\overline{PF}}$，得知$\overline{PE}=\overline{PF}=\overline{PG}$

$\Rightarrow$ P 點為三角形 ABC 的內心



答：(2)

出處：100 全國 4 模，三角函數

6.已知 $0\le x\le\pi$，設 $f(x)=\sin(\cos x)$，$g(x)=\cos(\sin x)$；若 $f(x)$之最大值為 M_f，最小值為 m_f；若 $g(x)$之最大值為 M_g，最小值為 m_g；則其大小順序為何？

(1)$M_f>m_f>M_g>m_g$ (2)$M_f>M_g>m_f>m_g$ (3)$M_g>M_f>m_g>m_f$

(4) $M_g > m_g > M_f > m_f$　　　　(5) $M_g > M_f > m_f > m_g$

解：1.∵$0 \le x \le \pi$，$-1 \le \cos x \le 1$，∴$\sin(-1) \le f(x) = \sin(\cos x) \le \sin 1$，⇒$M_f = \sin 1$，$m_f = \sin(-1) = -\sin 1$

∵$0 \le x \le \pi$，$0 \le \sin x \le 1$，$\cos 1 \le g(x) = \cos(\sin x) \le \cos 0$，⇒$M_g = 1$，$m_g = \cos 1$

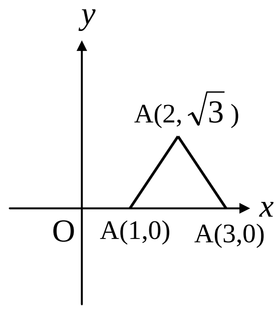
2.∵$45^0 = \dfrac{\pi}{4} = 0.785 < 1$，($45^0 \le \theta \le 45^0$，$\sin\theta > \cos\theta$)，∴$1 > \sin 1 > \cos 1 > \sin(-1) = -\sin 1$

得知 $M_g > M_f > m_g > m_f$

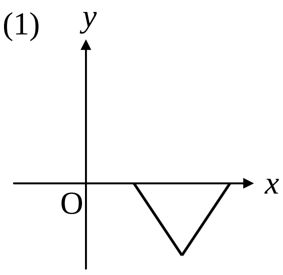
答：(3)

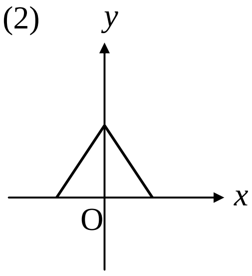
出處：100 全國 4 模，三角函數

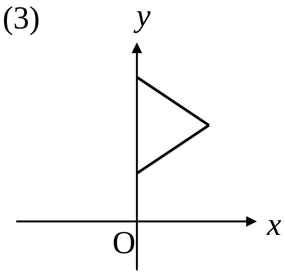
7.如圖(二)，ΔABC 為正三角形，A(1，0)，B(3，0)，C(2，$\sqrt{3}$)。若點 P(a，b)為ΔABC 邊上的任一點，則點 Q($-b+ai$)在複數平面上所呈現的圖形軌跡，在下列哪一個選項是最適當的？

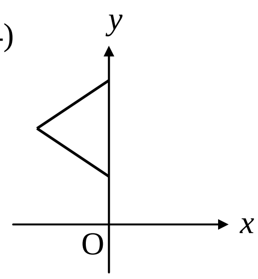


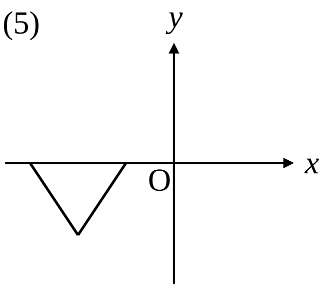
圖(二)

(1)


(2)


(3)


(4)


(5)


解 1：利用對應點關係：P(a，b) ↔ Q($-b+ai$)，∴A(1，0) ↔ ($0+i$)，B(3，0) ↔ ($0+3i$)，C(2，$\sqrt{3}$) ↔ ($-\sqrt{3}+2i$)

即圖形軌跡必過點(0，1)，(0，3)，($-\sqrt{3}$，2)，得知只有(4)可能

解 2：P(a，b)≡P($a+bi$)與 Q($-b+ai$)的關係為：$-b+ai = i(a+bi) = (a+bi)(\cos 90^0 + \sin 90^0)$

得知點 P 繞原點經逆時針旋轉 90^0 後到達點 Q，故(4)為正確

答：(4)

出處：100 全國 4 模，三角函數

二、多選題

7.下列各項有關函數 $y = f(x) = 4\sin 2x - 3\cos 2x + 5$ 之圖形的敘述，哪些是正確的？

(1)此函數圖形的週期為 2π　　(2)$-5 \le f(x) \le 5$　　(3)此函數圖形與 y 軸交於點(0，2)

(4)此函數圖形與 x 軸的交點有無限多個　　(5)此函數圖形對稱於 x 軸

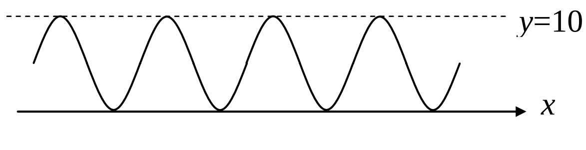
解：∵$y = f(x) = 4\sin 2x - 3\cos 2x + 5 = 5(\dfrac{4}{5}\sin 2x - \dfrac{3}{5}\cos 2x) + 5 = 5\sin(2x - \theta) + 5$，其中 $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$，$\cos\theta = \dfrac{4}{5}$

(1)週期為 $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$

(2)∵$-1 \le \sin(2x-\theta) \le 1$，⇒$0 \le 5\sin(2x-\theta)+5 \le 10$，⇒$0 \le f(x) \le 10$

(3)令 $x = 0$ 代入 $f(x) = -3+5 = 2$，∴與 y 軸交於點(0，2)

(4)由(1)(2)得知圖形如下，∴與 x 軸的交點有無限多個

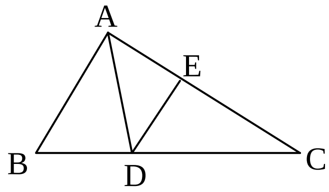


(5)以$-y$代替 y，則函數相等，∴圖形不對稱於 x 軸

答：(3) (4)

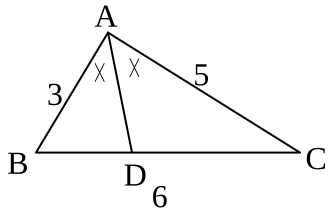
出處：100 北區 1 模，三角函數

12.設ΔABC，其中$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=5$，$\overline{BC}=6$，而∠BAC 的角平分線$\overline{AD}$交$\overline{BC}$於 D 點。若 E 點為$\overline{AC}$上之動點，則當 E 點移動到$\overline{DE}$有最小長度之位置時，下列各相關數值何者正確？



(1) $\overline{BD}=\dfrac{15}{4}$　　(2) ΔABC 的面積為 $2\sqrt{14}$

(3) ΔABC 的外接圓半徑為$\dfrac{2\sqrt{14}}{7}$　　(4) $\overline{DE}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$　　(5) $\overline{AD}=\dfrac{\sqrt{105}}{4}$



解：(1)如右圖，根據內分角線性質，$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}=3:5$，∴ $\overline{BD}=\dfrac{3}{3+5}\times 6=\dfrac{9}{4}$

(2)根據海龍定理，$S=\dfrac{1}{2}(3+5+6)=7$，ΔABC 的面積$=\sqrt{7(7-3)(7-5)(7-6)}=2\sqrt{14}$

(3)設外接圓半徑為 R，由ΔABC 的面積$=\dfrac{3\times5\times6}{4R}=2\sqrt{14}$，$R=\dfrac{45}{4\sqrt{14}}\neq\dfrac{2\sqrt{14}}{7}$

(4)∵ΔADC 的面積$=\dfrac{5}{8}$ΔABC 的面積$=\dfrac{5\sqrt{14}}{4}$

當$\overline{DE}$有最小長度時，$\overline{DE}$為$\overline{AC}$上的高，由ΔADC 的面積$=\dfrac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{DE}=\dfrac{5\sqrt{14}}{4}$，得$\overline{DE}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

(5)在ΔABC 中，$\cos B=\dfrac{3^2+6^2-5^2}{2\times3\times6}=\dfrac{5}{9}$，在ΔABC 中，設$\overline{AD}=k$，$\cos B=\dfrac{3^2+(\frac{9}{4})^2-k^2}{2\times3\times\frac{9}{4}}=\dfrac{5}{9}$，得 $k=\dfrac{\sqrt{105}}{4}$

答：(2)(4)(5)

出處：100 北區 1 模，三角函數

7.函數 $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$，則下列選項何者正確？

(1) $y=f(x)$之圖形必通$(-2,\ -3)$　　(2)方程式 $f(x)=0$ 在 0 與 1 之間必有實根

(3)方程式 $f(x)=0$ 在 1 與 2 之間必有實根　　(4)當 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$時，方程式 $f(x)=2\sin^2\theta$ 在 0 與 1 之間必有實根

(5)當 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$時，方程式 $f(x)=2\sin^2\theta$ 在 1 與 2 之間必有實根

解：(1)∵$f(-2)=-51\neq-3$，∴$y=f(x)$之圖形不通過$(-2,\ -3)$

(2)∵$f(0)f(1)=(-1)(3)=-3<0$，∴$f(x)=0$ 在 0 與 1 之間必有實根

(3)∵$f(1)f(2)=(3)(1)=3>0$，∴$f(x)=0$ 在 0 與 1 之間未必有實根

但是 $f(2)f(3)=(1)(-1)<0$，$f(3)f(4)=(-1)(3)<0$，∴$f(x)=0$ 在 0 與 1 之間沒有實根

$f(x)=x^3-6x^2+9x-1=2\sin^2\theta$，得 $g(x)=x^3-6x^2+9x-1-2\sin^2\theta$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$時，$0<\sin\theta<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\Rightarrow 0<\sin^2\theta<\dfrac{1}{2}$，$0<2\sin^2\theta<1$

(4) $g(0)g(1)=(-1-2\sin^2\theta)(3-2\sin^2\theta)<0$，∴$g(x)=0$ 在 0 與 1 之間必有實根

(5) $g(1)g(2)=(3-2\sin^2\theta)(1-2\sin^2\theta)>0$，且 $g(2)g(3)=(1-2\sin^2\theta)(-1-2\sin^2\theta)<0$

∴$g(x)=0$ 在 1 與 2 之間沒有實根

答：(2)(4)

出處：100 北區 2 模，多項式函數、三角函數

9.下列各數學式何者為真？

(1) $\sin 40^0>\tan 40^0$　　(2) $\sin(870^0)>\cos(-430^0)$　　(3) $\sin 1>\sin 3$

(4) $\dfrac{1}{2}\sin5^0\cos5^0=\dfrac{1}{\tan5^0+\cot5^0}$　　(5) $\sqrt{3}\sin10^0-\cos10^0=-4\sin10^0\cos10^0$

解：(1) $\sin 40^0<1$，$\tan 40^0>1$，∴$\sin 40^0<\tan 40^0$

(2)∵$\sin 870^0=\sin 150^0=\sin 30^0$ 與 $\cos(-430^0)=\cos430^0=\cos70^0=\sin20^0$，∴$\sin(870^0)>\cos(-430^0)$

(3)∵sin 1≈ sin 57.3^0＞sin30^0 與 sin 3≈ sin171.9^0＜sin150^0＝sin30^0, ∴sin 1＞sin 3

(4)∵ $\dfrac{1}{\tan 5^0+\cot 5^0}$ ＝sin5^{0}cos5^0 $\neq\dfrac{1}{2}$ sin5^{0}cos5^0

(5)∵ $\sqrt{3}\sin 10^0-\cos 10^0=2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^0-\dfrac{1}{2}\cos 10^0)$

$=2(\cos 30^0\sin 10^0-\sin 30^0\cos 10^0)=2\sin(-20^0)=2(-2\sin 10^0\cos 10^0)=-4\sin 10^0\cos 10^0$

答：(2)(3)(5)

出處：100 北區 2 模，三角函數

10.在空間坐標系中，設 A(1，0，3)，B(3，6，9)，下列哪些點在$\overline{AB}$的垂直平分面上？

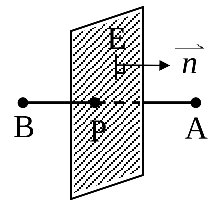
(1) (3，0，－1)　(2) (2，3，6)　(3) (5，1，－1)　(4) (5，4，4)　(5) (0，8，$\dfrac{5}{3}$)

解：如圖，∵$\overrightarrow{AB}$＝(2，6，6)＝2(1，3，3)，取垂直平分面 E 的法向量$\vec{n}$＝(1，3，3)

設 P 為$\overline{AB}$的中點，∴P(2，3，6)

∴垂直平分平面 E：1·(x－2)＋3(y－3)＋3(z－6)＝0，⇒ x＋3y＋3z＝29

則(2，3，6)、(5，4，4)、(0，8，$\dfrac{5}{3}$)滿足 x＋3y＋3z＝29



答：(2)(4)(5)

出處：100 北區 2 模，平面向量

10.ΔABC 的三邊$\overline{AB}$＝4、$\overline{BC}$＝6、$\overline{CA}$＝5，過頂點 C 的高與∠B 的內角平分線交於 P 點，若$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則下列選項哪些是正確的？

(1) 2x＋5y＝2　(2) 3x＋5y＝2　(3) $x=\dfrac{3}{10}$　(4) $y=\dfrac{9}{25}$　(5) x 的值可能有 2 個

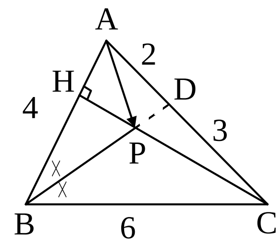
解：1.如圖，設∠B 的內角平分線交$\overline{CA}$於 D

根據內角分角線性質：$\overline{AD}$：$\overline{DC}$＝$\overline{BC}$：$\overline{AB}$＝2：3

⇒$\overline{AD}=5\times\dfrac{2}{2+3}=2$，$\overline{CD}$＝5－2＝3，得$\overrightarrow{AC}=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{AD}$

由$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+y(\dfrac{5}{2}\overrightarrow{AD})=x\overrightarrow{AB}+\dfrac{5y}{2}\overrightarrow{AD}$

∵B－P－D，∴$x+\dfrac{5y}{2}=1$，即 2x＋5y＝2



2.如圖，設過頂點 C 的高為$\overline{CH}$，則$\overline{CH}\perp\overline{AB}$，∴$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}-(y-1)\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

其中$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos(\angle CAB)=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AB}}=\dfrac{4^2+5^2-6^2}{2}=\dfrac{5}{2}$

⇒ $0=16x-(y-1)(\dfrac{5}{2})$，得 32$x$＋5$y$＝5

∴解$\begin{cases}2x+5y=2\\32x+5y=5\end{cases}$，得 $x=\dfrac{1}{10}$， $y=\dfrac{9}{25}$

答：(1)(4)

出處：100 北區 2 模，平面向量

9.若 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，則下列哪些函數在此範圍是遞增函數？

(1) sin x＋cos x　(2) sin x－cos x　(3) sin x cos x　(4) $\dfrac{\sin x}{\cos x}$　(5) $\dfrac{\cos x}{\sin x}$

解：(1) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$，且$\dfrac{\pi}{4}<x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{4}$，∴$\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$先遞增後遞減

(2) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\dfrac{\pi}{4})$，且$-\dfrac{\pi}{4}<x-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{4}$，∴$\sqrt{2}\sin(x-\dfrac{\pi}{4})$為遞增函數

(3) $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$，且 $0<2x<\pi$，$\therefore \frac{1}{2}\sin 2x$ 先遞增後遞減

(4) $\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$，且 $0<x<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \tan x$ 為遞增函數

(5) $\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$，且 $0<x<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \cot x$ 為遞減函數

答：(2)(4)

出處：100 全國 2 模，三角函數

11.ΔABC 中，∠A，∠B，∠C 之對邊分別為 a，b，c 且 $2a+3b-3c=0$，$a-2b+c=0$，ΔABC 的面積 $=15\sqrt{3}$，則下列哪些選項是正確的？

(1) $\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$　(2)最大內角為 150^0　(3) $\cos A:\cos B:\cos C=13:7:(-11)$

(4) ΔABC 的周長為 30　(5) ΔABC 外接圓面積為 $\frac{196}{3}\pi$

解：(1)由 $2a+3b-3c=0$，$a-2b+c=0$，得知 $a:b:c=3:5:7$

$\therefore$ 根據正弦定理 $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=3:5:7$

(2)根據大邊對大角性質，$\because a:b:c=3:5:7$，知∠C 為最大內角

令 $a=3k$，$b=5k$，$c=7k$，$\therefore$ 由餘弦定理 $\cos\angle C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(3k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\cdot 3k\cdot 5k}=-\frac{1}{2}$，$\angle C=120^0$

(3)由(2)令 $a=3k$，$b=5k$，$c=7k$，

得 $\cos A:\cos B:\cos C=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}:\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}:\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=13:7:(-11)$

(4)由(2)令 $a=3k$，$b=5k$，$c=7k$，得 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{15k}{2}$

由海龍公式，ΔABC 的面積 $=15\sqrt{3}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{15\sqrt{3}k^2}{4}$，$\therefore k=2$

$\therefore a=6$，$b=10$，$c=14$，ΔABC 的周長 $=a+b+c=30$

(5)由ΔABC 的面積 $=\frac{abc}{4R}=\frac{6\cdot 10\cdot 14}{4R}=15\sqrt{3}$，得外接圓半徑 $R=\frac{14}{\sqrt{3}}$，$\therefore$ΔABC 外接圓面積為 $\pi(\frac{14}{\sqrt{3}})^2=\frac{196}{3}\pi$

答：(1)(4)(5)

出處：100 全國 2 模，三角函數

9.設 $z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$，請問下列哪些選項是正確的？

(1) z 為 $x^3=1$ 之一虛根　(2)若 $\bar{z}$ 表 z 的共軛複數，則 $\bar{z}=\frac{1}{z}$　(3) $z+z^2+z^3+\cdots+z^{18}=1$

(4) $(2+z)(2+z^2)(2+z^3)(2+z^4)(2+z^5)=21$

(5)在複數平面上，以 z、z^3、z^5 所對應的點圍成一三角形，則此三角形面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

解：(1) $z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\cos\frac{2\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi}{6}$，$\therefore z$ 為 $x^6=1$ 之一虛根

(2) $\because \bar{z}\cdot z=|z|^2=|\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}|^2=(\sqrt{(\cos\frac{\pi}{3})^2+(\sin\frac{\pi}{3})^2})^2=1$，$\therefore \bar{z}=\frac{1}{z}$

(3)設 $x^6=1$ 之根為 1，z，z^2，z^3，z^4，z^5，則 $1+z^2+z^3+z^4+z^5=0$，且 $z^6=1$，$\therefore z+z^2+z^3+\cdots+z^{18}=\frac{z(1-z^{18})}{1-z}=0$

(4) $\because (x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)(x-z^5)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

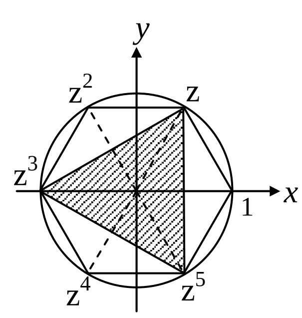
$\therefore x=-2$ 代入，得 $(-2-z)(-2-z^2)(-2-z^3)(-2-z^4)(-2-z^5)$

$=-(2+z)(2+z^2)(2+z^3)(2+z^4)(2+z^5)=(-2)^5+(-2)^4+(-2)^3+(-2)^2+(-2)+1$

得 $(2+z)(2+z^2)(2+z^3)(2+z^4)(2+z^5)=21$

(5) $\because z^6=1=1\cdot(\cos 0^0+i\sin 0^0)$

其解為 $z_k=\sqrt[6]{1}\,(\cos\frac{0+2k\pi}{6}+i\sin\frac{0+2k\pi}{6})$，$k=0$，1，2，⋯，5



如右圖，圍成一正三角形，其面積＝$3(\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\frac{2\pi}{3})=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

答：(2)(4)

出處：100 全國 3 模，三角函數

三、選填題

B.有長度為 600 公分的繩子一條，切取$\frac{3}{4}$圍成一個正三角形，令此三角形面積為 S_1，再從餘下的$\frac{1}{4}$中切取$\frac{3}{4}$圍成第二個正三角形，令此三角形面積為 S_2，如此持續做下去。如果前述程序永遠進行而不中斷，則 S_1、S_2、⋯、S_n、⋯等正三角形面積之總和為____平方公分

解：S_1：正三角形邊長＝$600\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=150$，面積 $S_1=\frac{1}{2}\times150\times150\times\sin60^0=5625\sqrt{3}$

S_2：正三角形邊長＝$600\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{150}{4}$，面積 $S_2=\frac{1}{2}\times\frac{150}{4}\times\frac{150}{4}\times\sin60^0=\frac{5625}{16}\sqrt{3}$

得 S_1、S_2、⋯、S_n、⋯之公比為$\frac{S_2}{S_1}=\frac{1}{16}$，面積之總和為＝$\frac{5625\sqrt{3}}{1-\frac{1}{16}}=6000\sqrt{3}$

答：$6000\sqrt{3}$

出處：100 北區 1 模，三角函數

F.設 $0<\theta<\frac{\pi}{6}$，若$|1+\log_2\cos\theta|+|\log_2\sin\theta|=2$，則 $\tan\theta=$______

解：在 $0<\theta<\frac{\pi}{6}$中，$\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos\theta<1$，$\therefore 1+\log_2\cos\theta>0$，得知$|1+\log_2\cos\theta|=1+\log_2\cos\theta$

$0<\cos\theta<\frac{1}{2}$，$\therefore 1+\log_2\sin\theta<0$，得知$|1|\log_2\sin\theta|=-1-\log_2\sin\theta$

$\Rightarrow|1+\log_2\cos\theta|+|\log_2\sin\theta|=(1+\log_2\cos\theta)+(-1-\log_2\sin\theta)=2$

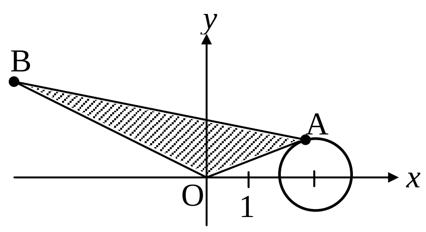
$\Rightarrow\log_2\cos\theta-\log_2\sin\theta=2$，$\Rightarrow\log_2\cot\theta=2$，$\therefore\cot\theta=4$，得 $\tan\theta=\frac{1}{4}=0.25$

答：0.25

出處：100 北區 1 模，三角函數

G.設 A、B、O 為複數平面上三點，分別表示複數α、β、0。若α、β同時滿足$|\alpha-3|=1$ 和$\beta=(-1+i)\alpha$，則ΔABO 面積的最大值與最小值總和為____。

解：∵α滿足$|\alpha-3|=1$，即以(3，0)為圓心，半徑為 1 的圓，如圖



$\beta=(-1+i)\alpha=\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})\alpha$，$\therefore\angle AOB=\frac{3\pi}{4}$

設$\overline{OA}=k$，$2\le k\le4$，且$\overline{OB}=|\beta|=\sqrt{2}|\alpha|=\sqrt{2}k$

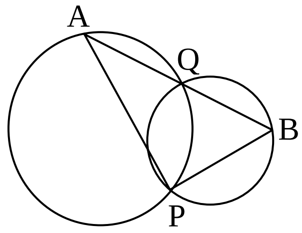
則ΔABO 面積＝$\frac{1}{2}\overline{OA}\times\overline{OB}\sin\angle AOB=\frac{1}{2}k\times\sqrt{2}k\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{2}k^2$

得知當 $k=2$ 時，有最小面積為 2，當 $k=4$ 時，有最小面積為 8，$\therefore 2+8=10$

答：10

出處：100 北區 1 模，三角函數

D.如圖(3)，半徑分別為 5 和 4 的大小兩圓相交於 P、Q 兩點，A、B 兩點分別在兩個圓上且線段$\overline{AB}$通過 Q 點，若$\overline{PA}$＝7，則$\overline{PB}$之值為_____。

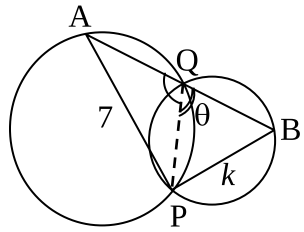


圖(3)

解：1.如圖，連接$\overline{PQ}$，設$\overline{PB}$＝k，∠PQB＝θ，∴∠AQP＝π－θ

2.根據正弦定理：在ΔAPQ 中，$\dfrac{\overline{AP}}{\sin\angle AQP}$＝2(外接圓半徑)

$\therefore \dfrac{7}{\sin(\pi-\theta)}$＝2×5，⇒$\dfrac{7}{\sin\theta}$＝10，得$\sin\theta=\dfrac{7}{10}$

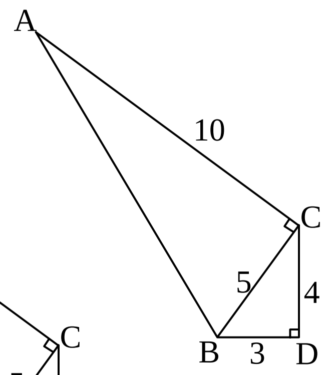


3.在ΔBQP 中，$\dfrac{\overline{PB}}{\sin\theta}=\dfrac{k}{\sin\theta}$＝2×4，⇒$k$＝8$\sin\theta$＝8×$\dfrac{7}{10}=\dfrac{28}{5}$

答：$\dfrac{28}{5}$

出處：100 北區 2 模，三角函數

E.將二股長為 5 公分、10 公分的直角ΔABC 及二股長為 3 公分、4 公分的直角ΔBCD 擺放如圖(4)，試求$\overline{AD}$＝______。



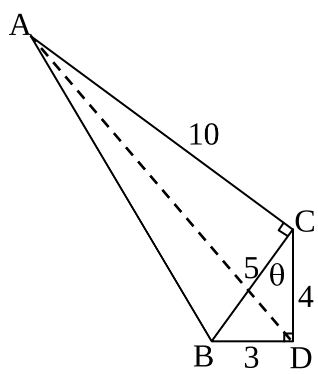
圖(4)

解：1.連接$\overline{AD}$，設∠BCD＝θ，∴在ΔBCD 中，$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$

2.在ΔACD 中，根據餘弦定理：

$\overline{AD}^2$＝10^2＋4^2－2×10×4cos($\dfrac{\pi}{2}$＋θ)＝100＋16＋80$\sin\theta$＝164

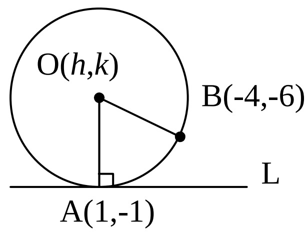
$\therefore\overline{AD}=\sqrt{164}$



答：$\sqrt{164}$

出處：100 北區 2 模，三角函數

G.設有一圓 C 切直線 L：$\begin{cases}x=1+t\\y=-1+2t\end{cases}$，$t\in$R 於點 A(1，－1)，且此圓上有另一點 B(－4，－6)，則此圓 C 之方程式為_________。



解：1.直線 L：$\begin{cases}x=1+t\\y=-1+2t\end{cases}$，去參數 t，L：為 2x－y＝3

2.如圖，∴$\overline{OA}$⊥L，設$\overline{OA}$：x＋2y＝m，過 A(1，－1)，得 m＝－1
通過圓心 O (h，k)，得知 h＋2k＝－1

3.∵$\overline{OA}=\overline{OB}$＝半徑，∴$\sqrt{(h-1)^2+(k+1)^2}=\sqrt{(h+4)^2+(k+6)^2}$，整理得 h＋k＝－5

4.解 h＋2k＝－1 與 h＋k＝－5 得 h＝－9，k＝4，即圓心 O(－9，4)

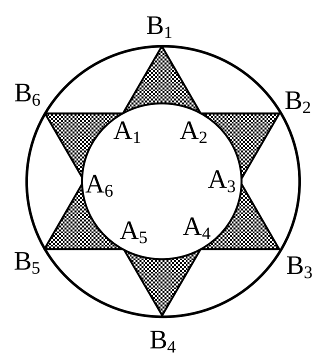
半徑＝$\overline{OA}$＝$\sqrt{(h-1)^2+(k+1)^2}=\sqrt{10^2+5^2}=\sqrt{125}$

∴圓 C 之方程式為$(x+9)^2+(y-4)^2=125$

答：$(x+9)^2+(y-4)^2=125$

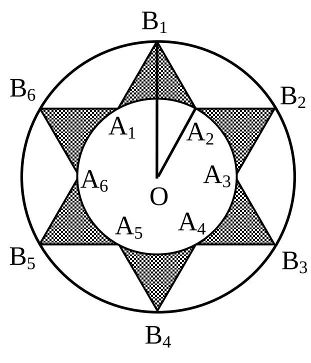
出處：100 北區 2 模，直線與圓

A.如右圖，兩個同心圓半徑分別為 2 與 3，若 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6 等分小圓，B_1、B_2、B_3、B_4、B_5、B_6 等分大圓，且$\overline{A_1B_1}=\overline{B_1A_2}$，則圖中陰影部分面積為______。



解：1.如圖，∠ A_2OB_1＝$\dfrac{360^0}{12}$＝30^0

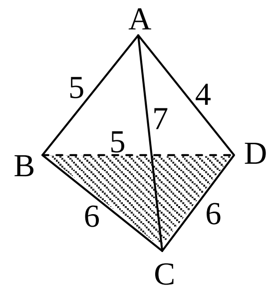
∴ΔA_2OB_1 面積＝$\dfrac{1}{2}$×2×3sin30^0＝$\dfrac{3}{2}$



2.陰影部分面積＝12(ΔA_2OB_1面積)－小圓面積＝$12(\frac{3}{2})-4\pi=18-4\pi$

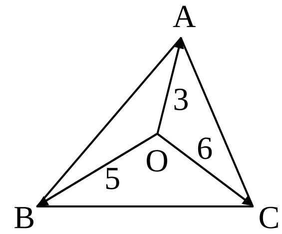
答：$18-4\pi$
出處：100 北區 3 模，直線與圓

B.四面體 ABCD 滿足$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=7$，$\overline{AD}=4$，$\overline{BD}=5$，$\overline{CD}=6$，則$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=$______



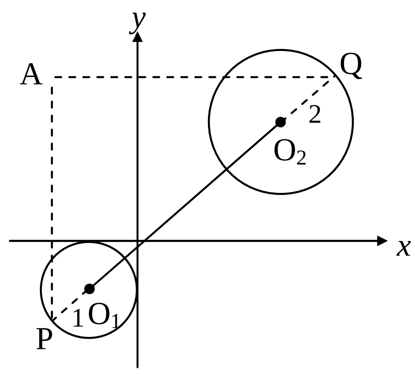
解：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{5^2+4^2-5^2}{2}-\frac{5^2+7^2-6^2}{2}=-11$
註：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$與$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$之計算，請參考(10)
答：-11
出處：100 北區 3 模，平面向量

C.設 O 為ΔABC 內部一點滿足$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{O}$，若$|\overrightarrow{OA}|=3$，$|\overrightarrow{OB}|=5$，$|\overrightarrow{OC}|=6$，試求ΔOAB 的面積為_____



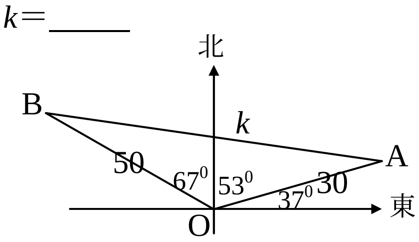
解：1.$\because\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{O}$，$\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$
平方$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2=|-\overrightarrow{OC}|^2$，$\Rightarrow|\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2$
$\Rightarrow 9+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+25=36$，得$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1$
2. ΔOAB 的面積＝$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{9\times25-1}=2\sqrt{14}$
答：$2\sqrt{14}$
出處：100 北區 3 模，平面向量

D.坐標平面上，點 P 在圓$(x+1)^2+(y+1)^2=1$上，點 Q 在圓$(x-5)^2+(y-7)^2=4$上，若向量$\overrightarrow{PQ}$在 x 軸上的正射影長為 a，在 y 軸上的正射影長為 b，則 a^2+b^2 的最大值為______



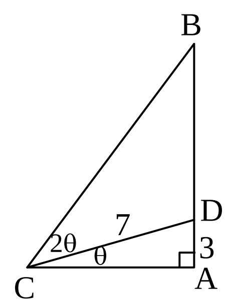
解：如圖，$O_1(-1,\ -1)$，$O_2(5,\ 7)$，連心線$\overline{O_1O_2}=10$
求 a^2+b^2 的最大值時，則
$\overrightarrow{PQ}$在 x 軸上的正射影長為 $a=\overline{AQ}$，在 y 軸上的正射影長為 $b=\overline{AP}$
$a^2+b^2=|\overrightarrow{PQ}|^2=(1+10+2)^2=169$
答：169
出處：100 北區 3 模，直線與圓

D.小新暑假參加「那霸四天三夜遊輪之旅」，在途中發現有兩座不知名島嶼 A、B，經觀察得知：A 島在郵輪的東 37^0 北 30 海浬處，B 島在郵輪的北 67^0 西 50 海浬處。若此時 A、B 兩島嶼相距 k 海浬，則 $k=$_____



解：依題意，如右圖，$\angle AOB=120^0$，根據餘弦定理
$k^2=30^2+50^2-2\times30\times50\cos(\angle AOB)=4900$，得 $k=70$
答：70
出處：100 全國 2 模，三角函數

E.已知直角ΔABC 中，$\angle A=90^0$，在$\overline{AB}$上取一點 D，使得$\overline{AD}=3$且$\overline{CD}=7$，又$\angle BCA=3\angle DCA$，求$\overline{BC}=$____。(化為最簡分數)

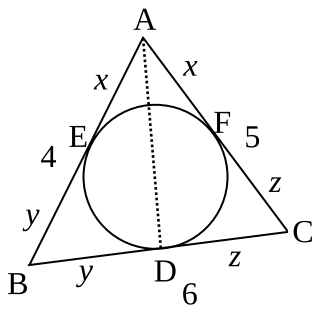


解：依題意，如右圖，設$\angle DCA=\theta$，$\therefore\angle BCA=3\theta$
在ΔACD 中，$\overline{AC}=\sqrt{7^2-3^2}=2\sqrt{10}$，$\therefore\cos\theta=\frac{2\sqrt{10}}{7}$
$\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=4(\frac{2\sqrt{10}}{7})^3-3(\frac{2\sqrt{10}}{7})=\frac{26\sqrt{10}}{343}$
在ΔABC 中，$\cos3\theta=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$，$\Rightarrow\frac{2\sqrt{10}}{\overline{BC}}=\frac{26\sqrt{10}}{343}$，得$\overline{BC}=\frac{343}{13}$

答：$\frac{343}{13}$

出處：100 全國 2 模，三角函數

H.已知ΔABC 之內切圓切 $\overline{BC}$ 於 D，若 $\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=5$，則 $\overline{AD}=$______



解：1.如右圖，根據圓切線性質

設 $\overline{AE}=x=\overline{AF}$，$\overline{BE}=y=\overline{BD}$，$\overline{CD}=z=\overline{CF}$，則

$$\therefore\begin{cases}\overline{AB}=x+y=4\\ \overline{BC}=y+z=6\\ \overline{AC}=z+x=4\end{cases}，解得\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\ y=\frac{5}{2}\\ z=\frac{7}{2}\end{cases}$$

2.根據餘弦定理

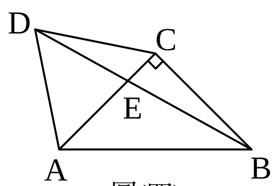
在ΔABC 中，$\cos B=\frac{4^2+6^2-5^2}{2\cdot4\cdot6}$，在ΔABD 中，$\cos B=\frac{4^2+(\frac{5}{2})^2-\overline{AD}^2}{2\cdot4\cdot\frac{5}{2}}$

由 $\cos B=\frac{4^2+6^2-5^2}{2\cdot4\cdot6}=\frac{4^2+(\frac{5}{2})^2-\overline{AD}^2}{2\cdot4\cdot\frac{5}{2}}$，得 $\overline{AD}=\sqrt{11}$

答：$\sqrt{11}$

出處：100 全國 2 模，直線與圓、三角函數

C.圖(四)：ΔACD 為正Δ，ΔABC 為等腰直角Δ，$\angle ACB=90^0$，$\overline{BD}$交$\overline{AC}$於 E 且$\overline{AB}=2$，則$\overline{AE}=$______



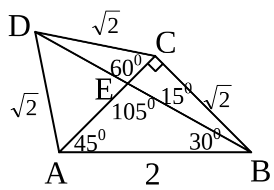
圖(四)

解：1.∵ΔACD 為正Δ，ΔABC 為等腰直角Δ，∴$\overline{AD}=\overline{CD}=\overline{AC}=\overline{BC}$

2.在ΔACB 中，$\overline{AC}=\overline{BC}=\sqrt{2}$

$\angle EAB=45^0$，$\angle EBA=45^0-15^0=30^0$，$\angle AEB=120^0$

在ΔABE 中，根據正弦定理 $\frac{2}{\sin150^0}=\frac{\overline{AE}}{\sin30^0}$，得$\overline{AE}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$



答：$\sqrt{6}-\sqrt{2}$

出處：100 全國 3 模，三角函數

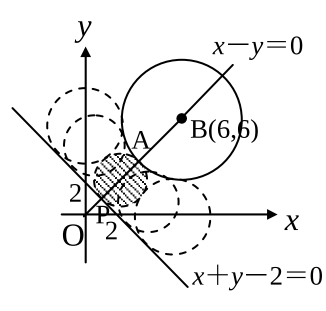
F.平面坐標系中，與直線 L：$x+y-2=0$ 及圓 C：$x^2+y^2-12x-12y+54=0$ 都相切的圓，其面積最小的圓方程式為 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，則序組$(d,e,f)=($ __,___,__ $)$

解：1.圓 C：$x^2+y^2-12x-12y+54=0$

$\Rightarrow(x-6)^2+(y-6)^2=18$，即圓心(6，6)，半徑$=3\sqrt{2}$

∵圓心到直線 L 的距離 $d(B，L)=\frac{|6+6-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=5\sqrt{2}=\overline{BO}$

∴所求之圓的直徑$=\overline{AP}=5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，如圖



2.∵所求之圓的圓心為通過 B(6,6)且垂直直線 L

設此直線為 $x-y=t$，通過 B(6,6)，得知 $t=0$，∴此直線為 $x-y=0$

故設所求之圓的圓心為 C(k，k)

∵$d(C，L)=\sqrt{2}=\frac{|k+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|2k|}{\sqrt{2}}$，得 $k=0$(不合)或 2

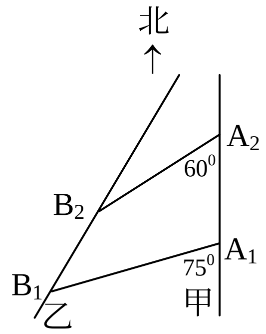
即所求圓的圓心為 C(2，2)，半徑為$\sqrt{2}$

⇒所求之圓方程式為$(x-2)^2+(y-2)^2=(\sqrt{2})^2$，得 $x^2+y^2-4x-4y+6=0$

答：$(d,e,f)=(-4,-4,6)$

出處：100 全國 3 模，直線與圓

H.圖(五)所示：甲船以每小時 $30\sqrt{2}$ 浬的速度向正北方向航行，同時刻乙船按固定方向定速直線航行，當甲船位於 A_1 處時，乙船位於甲船的南偏西 75^0 方向的 B_1 處，此時兩船相距 20 浬，當甲船航行 20 分鐘到達 A_2 處時，則乙船航行到甲船的南偏西 60^0 方向的 B_2 處，此時兩船相距 20 浬，則乙船每小時航行____浬。(四捨五入到小數點後第一位)

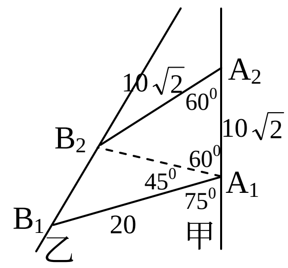


圖(五)

解：1.20 分鐘＝$\frac{1}{3}$小時，∴$\overline{A_1A_2}=30\sqrt{2}\times\frac{1}{3}=10\sqrt{2}$

2.∴$\overline{A_1A_2}=\overline{A_2B_2}$，連接$\overline{A_1B_2}$，則$\Delta A_1A_2B_2$為正三角形，得知$\overline{A_1B_2}=10\sqrt{2}$

3.設乙船每小時航行 k 浬，則$\overline{B_1B_2}=\frac{k}{3}$浬



在$\Delta A_1B_1B_2$中，根據餘弦定理

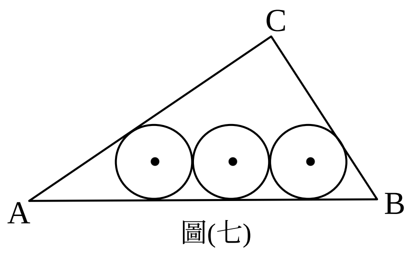
$(\frac{k}{3})^2=20^2+(10\sqrt{2})^2-2\times20\times10\sqrt{2}\cos45^0$

$\Rightarrow\frac{1}{9}k^2=400+200-400=200$，得 $k=30\sqrt{2}\approx30\times1.414\approx42.4$

答：42.4 浬

出處：100 全國 3 模，三角函數

C.如圖(七)，已知$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=3$，$\overline{AC}=4$，有三個等圓相切且與三角形相切，則等圓的半徑為____。(化為最簡分數)



圖(七)

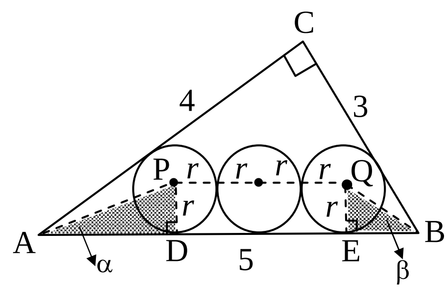
解：1.如右圖，設等圓的半徑＝r，∠A＝2α，∠B＝2β

2.∴$\tan A=\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow3\tan^2\alpha+8\tan\alpha-3=0$，$(3\tan\alpha-1)(\tan\alpha+3)=0$

$\Rightarrow\tan\alpha=\frac{1}{3}$或$-3$(不合，∵α為銳角)，

則在ΔPAD 中，$\tan\alpha=\frac{1}{3}=\frac{r}{\overline{AD}}$，∴$\overline{AD}=3r$



3.同理，$\tan B=\tan2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\frac{4}{3}$

$\Rightarrow2\tan^2\beta+3\tan\beta-2=0$，$(2\tan\beta-1)(\tan\beta+2)=0$

$\Rightarrow\tan\beta=\frac{1}{2}$或$-2$(不合，∵β為銳角)

則在ΔQBE 中，$\tan\beta=\frac{1}{2}=\frac{r}{\overline{BE}}$，∴$\overline{BE}=2r$

4.$\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{PQ}+\overline{BE}$，$\Rightarrow5=3r+4r+2r$，∴$r=\frac{5}{9}$

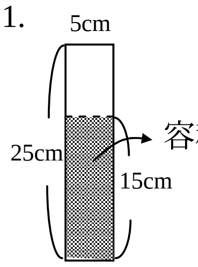
答：$\frac{5}{9}$

出處：100 全國 4 模，三角函數、直線與圓

E.如圖(八)，在水平桌面上有個平底圓柱管，管內水高 15cm，口徑(直徑)5cm，管高 25cm，今將此圓柱管傾斜和桌面夾角 θ，恰使水面管口不溢出，求$\sin\theta=$______。(分子、分母化為最簡)

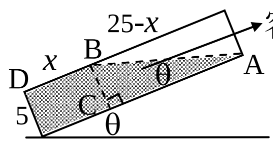
解：利用傾斜前、後之管內不變

1.



容積＝$\pi(\frac{5}{2})^2\times15$

設$\overline{BD}=x$ cm



容積＝$\pi(\frac{5}{2})^2\times(x)+\frac{1}{2}(\frac{5}{2})^2\times(25-x)$

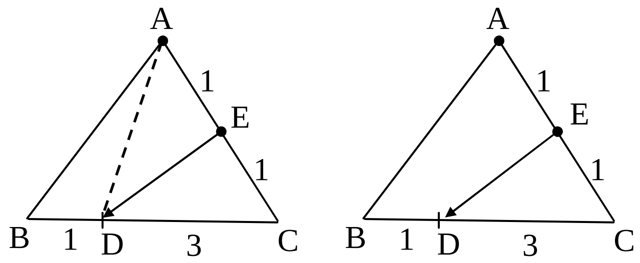
容積＝$\pi(\frac{5}{2})^2\times15=\pi(\frac{5}{2})^2\times(x)+\frac{1}{2}\pi(\frac{5}{2})^2\times(25-x)$，解得 $x=5$

2.在ΔABC 中，$\overline{BC}=5$，$\overline{AC}=25-x=20$，$\overline{AB}=\sqrt{20^2+5^2}=\sqrt{425}=5\sqrt{17}$，∴$\sin\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{5}{5\sqrt{17}}=\frac{1}{\sqrt{17}}$

答：$\frac{1}{\sqrt{17}}$

出處：100 全國 4 模，三角函數

F.如圖(九)所示，D 在ΔABC 之$\overline{BC}$邊上，且$\overline{CD}$＝3$\overline{BD}$，E 為$\overline{AC}$之中點。若$\overrightarrow{ED}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$，其中 r，s 為實數，求(r，s)＝_______。(r，s 化為最簡分數)



圖(九)

解：1.連接$\overline{AD}$

2.$\because \overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}$，如右圖，其中

(1)$\overrightarrow{EA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

(2)在ΔABC 中，利用分點公式$\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

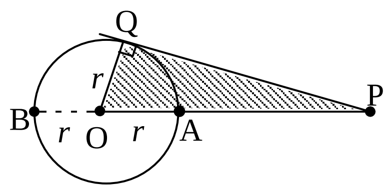
$\therefore \overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}=(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})+(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC})=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

答：$(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$

出處：100 全國 4 模，平面向量

G.已知 P 點為圓 C 外一點，若 P 點到圓 C 上點之最遠距離與最近距離分別為 5、3，則過 P 點作圓 C 的切線段長為_____。

解：1.根據題意，如右圖，設圓 C 半徑為 r



最近距離＝$\overline{PA}$＝3

最遠距離＝$\overline{PB}$＝5＝$\overline{PA}$＋2r＝3＋2r，$\therefore r=1$

2.在ΔPOQ 中，切線段長$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OQ}^2}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$

答：$\sqrt{15}$

出處：100 全國 4 模，直線與圓