第 3 單元　指數與對數

1.若 $x=\dfrac{\sqrt[3]{88.3}}{\sqrt{2.56}}$，則下列那一個敘述是正確的？(可用查表法) (83 推甄)

(1)$2.8<x<2.9$　　(2)$2.7<x<2.8$　　(3) $2.6<x<2.7$

(4)$2.5<x<2.6$　　(5) $2.4<x<2.5$　　$(\log 8.83=0.9460,\ \log 2.56=0.4082)$

解：取 $\log x=\log\dfrac{\sqrt[3]{88.3}}{\sqrt{2.56}}=\dfrac{1}{3}\log 88.3-\dfrac{1}{2}\log 2.56=\dfrac{1}{3}(1+0.9460)-\dfrac{1}{2}(0.4082)=0.4446$

查表得 $\log 2.7=0.4314$，$\log 2.8=0.4472$，$\therefore 2.7<x<2.8$

答：(2)

2.函數 $y=4^x$ 與 $y=2^{3x+2}$ 的圖形之交點坐標為________。(83 推甄)

解：$\because 4^x=2^{3x+2}$，$\Rightarrow 2^{2x}=2^{3x+2}$，$\therefore 2x=3x+2$，得知 $x=-2$，$y=\dfrac{1}{16}$，故交點坐標為$(-2,\ \dfrac{1}{16})$

答：$(-2,\ \dfrac{1}{16})$

3.設 $\log_a x=\log_b y=-\dfrac{1}{2}\log_c 2$，式中 a，b，c 均為不等於 1 的正數，且 $x>0$，$y>0$，$c=\sqrt{ab}$，則 $xy=$____。(83 社)

解：(1)設 $\log_a x=\log_b y=-\dfrac{1}{2}\log_c 2=k$，$\Rightarrow x=a^k$，$y=b^k$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}=c^k$

(2)$\because c=\sqrt{ab}$，$\therefore c^{2k}=a^k b^k$，$\Rightarrow xy=(\dfrac{1}{\sqrt{2}})^2=\dfrac{1}{2}$

答：$\dfrac{1}{2}$

4.令 $a=\log 2$，$b=\log 3$，試以 a，b 表(1)$\log_5 72$ 與(2)$\log_6[\sqrt{5}\cdot(\sqrt{14-4\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}})]$。

解：(1)$\log_5 72=\dfrac{\log 72}{\log 5}=\dfrac{\log(2^3\times 3^2)}{\log(\frac{10}{2})}=\dfrac{3\log 2+2\log 3}{1-\log 2}=\dfrac{3a+2b}{1-a}$

(2)$\because \sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$\sqrt{14-4\sqrt{6}}=\sqrt{14-2\sqrt{24}}=\sqrt{12}-\sqrt{2}=2\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$\therefore \sqrt{14-4\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}=(2\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{3}+\sqrt{2})=3\sqrt{3}$

$\Rightarrow \log_6[\sqrt{5}\cdot(\sqrt{14-4\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}})]=\log_6[\sqrt{5}\cdot(3\sqrt{3})]=\dfrac{\log 3\sqrt{15}}{\log 6}$

$=\dfrac{\log 3+\frac{1}{2}(\log 3+\log 15)}{\log 2+\log 3}=\dfrac{a+\frac{1}{2}(b+1-a)}{a+b}=\dfrac{3b-a+1}{2a+2b}$

答：1. $\dfrac{3a+2b}{1-a}$　2. $\dfrac{3b-a+1}{2a+2b}$　(83 自)

5.如右圖為某池塘中布袋蓮蔓延的面積與時間的關係圖。假設其關係為指數函數，試問下列敘述何者為真？(87 推甄)

(1)此指數函數的底數為 2

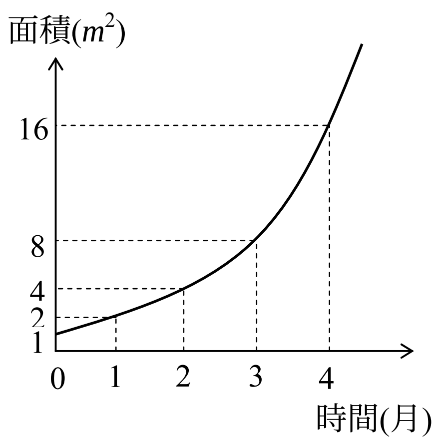
(2)在第 5 個月時，布袋蓮的面積就會超過 $30m^2$

(3)布袋蓮從 $4\,m^2$，蔓延到 $12\,m^2$，只需 1.5 個月

(4)設布袋蓮蔓延到 $2\,m^2$、$3\,m^2$、$6\,m^2$ 所需的時間分別為 t_1、t_2、t_3

則 $t_1+t_2=t_3$

(5)布袋蓮在第 1 到第 3 個月之間的蔓延平均速度等於在第 2 到第 4 個月之間的蔓延平均速度



解：(1)設此函數為 $y=a^x$，y 表示面積，x 表示時間，∵通過(1，2)代入，∴$2=a^1$，得底數 $a=2$

或以底數為 2，檢查各點

點(1，2)⇒ $2=2^1$

點(2，4)⇒ $4=2^2$

點(3，8)⇒ $8=2^3$

點(4，16)⇒ $16=2^4$，得知皆正確

(2)當 $x=5$ 時，代入 $y=2^x=32>30$

(3)∵$4=2^x$，∴$x=2$，則經過 1.5 個月後，面積 $y=2^{2+1.5}=8\sqrt{2}<12$

(4)∵$2=2^{t_1}$ ......①，$3=2^{t_2}$ ......②，$6=2^{t_3}$ ......③

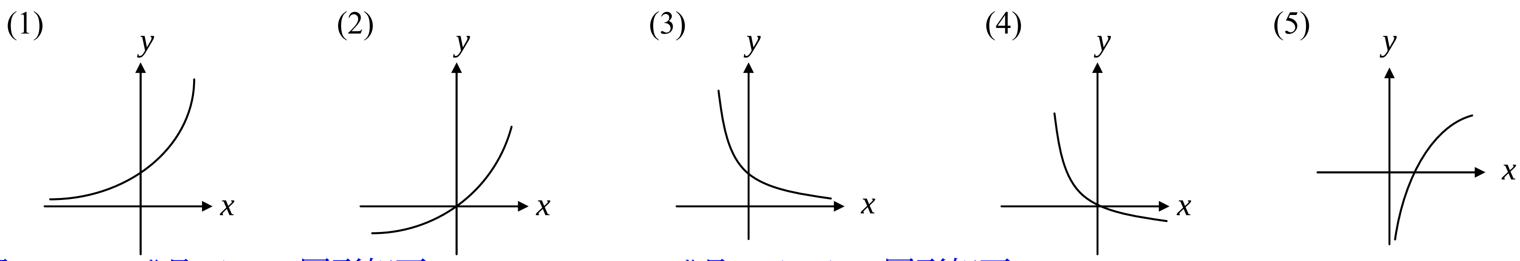
∴①×②＝$6=2\times3=2^{t_1+t_2}=2^{t_3}$＝③，∴$t_1+t_2=t_3$

(5)第 1 到第 3 個月之間的蔓延平均速度＝$\dfrac{2^3-2^1}{3-1}=3$

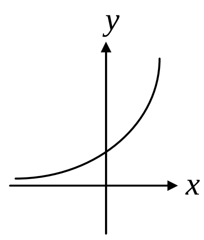
第 2 到第 4 個月之間的蔓延平均速度＝$\dfrac{2^4-2^2}{4-2}=6$，∴其蔓延平均速度不相等

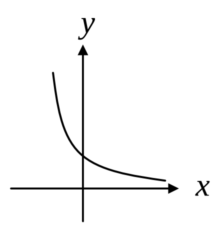
答：(1)(2)(4)

6.若 $a>0$ 且 $a\neq1$，則下列圖形中，何者可能是指數函數 $y=a^x$ 的部分圖形？(87 社)



解：(1) $y=a^x$ 且 $a>1$，圖形如下　　(2) $y=a^x$ 且 $0<a<1$，圖形如下





答：(1)(3)

7.若實數 x 滿足 $1+\log_4(x-1)=\log_2(x-9)$，試求 x 的值。(87 社)

解：(1)條件：真數＞0，⇒ $x-1>0$ 且 $x-9>0$，∴$x>9$

(2)原式：$\log_2 2+\dfrac{1}{2}\log_2(x-1)=\log_2(x-9)$ ⇒ $2\sqrt{x-1}=x-9$

平方：$x^2-22x+85=0$，⇒ $(x-5)(x-17)=0$，∴$x=5$ 或 $x=17$

由(1) (2)得知 $x=17$

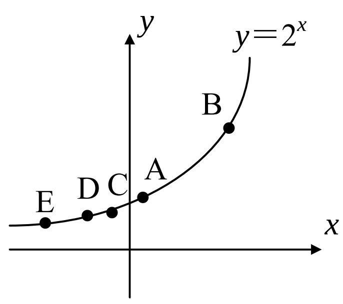
答：17

8.下列五個數中，何者為最小？(1) $2^{\frac{1}{3}}$　(2) $(\frac{1}{8})^{-2}$　(3) $2^{-\frac{1}{4}}$　(4) $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$　(5) $8^{-\frac{1}{3}}$　(88 推甄)

解：(2) $(\dfrac{1}{8})^{-2}=(2^{-3})^{-2}=2^6$

(4) $(\dfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}}=(2^{-1})^{\frac{1}{2}}=2^{-\frac{1}{2}}$

(5) $8^{-\frac{1}{3}}=(2^3)^{-\frac{1}{3}}=2^{-1}$



答：(5)

9.本金 100 元，年利率 6%，每半年複利一次，五年期滿，共得本利和為_____元。(元以下四捨五入) (88 推甄)

解：設本利和為 x，$\therefore x=100(1+6\%)^5=100\times1.06^5$

取 $\log x=\log 100\times1.06^5=2+5\log1.06=2+5\times0.0253=2.1265=\log 100+\log 1.338=\log 133.8$

$\therefore x=133.8$　134

答：134

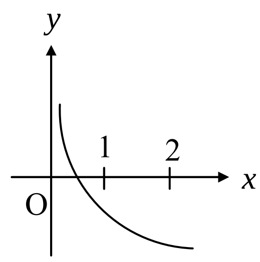
10.某甲向銀行貸款 100 萬元，約定從次月開始每月還給銀行 1 萬元，依月利率 0.6%複利計算，則甲需要_____年就可還清。(答案以四捨五入計算成整數，而 $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}1.006=0.0026$) (88 自)

解：設 n 個月之後可還清，則 $100(1.006)^n=1\times[1+(1.006)^1+(1.006)^2+\ldots+(1.006)^{n-1}]=0.006\times100\times(1.006)^n$

$n\approx153$ 月≈13 年

答：13 年

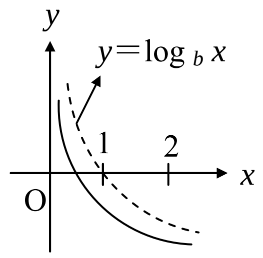
11.下圖為函數 $y=a+\log_b x$ 之部分圖形，其中 a，b 皆為常數，則下列何者為真？(88 社)



(1) $a<0$，$b>1$　(2) $a>0$，$b>1$　(3) $a=0$，$b>1$

(4) $a>0$，$0<b<1$　(5) $a<0$，$0<b<1$

解：如右圖，



(1) $y=a+\log_b x$ 的圖形是 $y=\log_b x$ 的圖形鉛直向下 a 單位得到

$\because y=a+\log_b x$ 的圖形在 $y=\log_b x$ 的圖形下方，$\therefore a<0$

(2) $y=\log_b x$ 的圖形是遞減函數，$\therefore 0<b<1$

答：(5)

12.在 1999 年 6 月 1 日數學家利用超級電腦驗證出 $2^{6792593}-1$ 是一個質數 若想要列印出此質數至少需要多少張 A4 紙？假定每張 A4 紙，可列印出 3000 個數字。在下列選項中，選出最接近的張數。[$\log 2=0.3010$] (89 推甄)

(1) 50　(2) 100　(3) 200　(4) 500　(5) 700

解：設 $k=2^{6792593}$，$\therefore \log k=\log 2^{6792593}=6792593(\log 2)=2098750.493$

$\Rightarrow \log k$ 的首數為 2098750，$\therefore k$ 為 2098751 位數，$\Rightarrow$ $2^{6792593}-1$ 也是 2098751 位數

需 A4 紙張數$=\dfrac{2098751}{3000}=699.58$(張)

答：(5)

13.下列選項何者為真？(89 社)

(1) $\dfrac{2^{10}+2^{20}}{2}>\sqrt{2^{10}\cdot2^{20}}$　(2) $\dfrac{(\frac{1}{2})^{10}+(\frac{1}{2})^{20}}{2}>\sqrt{(\frac{1}{2})^{10}\cdot(\frac{1}{2})^{20}}$　(3) $\sqrt{10}+\sqrt{20}>\sqrt{30}$

(4) $\log10+\log 20>\log 30$　(5) $\dfrac{10^2+20^2}{2}>(\dfrac{10+20}{2})^2$

解：(1)根據算幾不等式，得知(1)(2)為真

(2) $\because(\sqrt{10}+\sqrt{20})^2-30=2\sqrt{200}>0$，$\therefore\sqrt{10}+\sqrt{20}>\sqrt{30}$，(3)為真

(3) $\because\log 10+\log 20=\log 200>\log 30$，$\therefore$(4)為真

(4) $\dfrac{10^2+20^2}{2}=\dfrac{500}{2}=250>225=15^2=(\dfrac{10+20}{2})^2$，$\therefore$(5)為真

答：(1)(2)(3)(4)(5)

14.某食品實驗室混合甲、乙兩種菌類製成一種新食品。調查發現乙菌個數是甲菌個數的千倍以上時，新食品才受歡迎。又知道甲菌一日後增加一倍，乙菌增加三倍(成為原來的四倍)。現在取同數量的甲、乙兩種菌，讓它們同時繁殖，試問至少第____天後混和甲、乙兩種菌類時，才能製成受歡迎的食品。(已知 $\log 2=0.3010$) (89 社)

解：設現在取相同數量的甲、乙兩菌種各 a 單位讓它們同時繁殖

在第 n 日後混合，製成受歡迎的食品，依題意得知 $\dfrac{a\cdot 4^n}{a\cdot 2^n}>10^3$

$\Rightarrow 2^n>10^3$，取 log，得 $n\log 2>3$，$\Rightarrow n>\dfrac{3}{\log 2}=\dfrac{3}{0.3010}=9.96\cdots$，取 $n=10$ 為所求

答：10

15.某甲在股票市場裡買進賣出頻繁。假設每星期結算都損失該星期初資金的 1%，而第 n 星期結束後資金總損失超過原始資金的一半，則 n 最小為______。(已知 $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}11=1.0414$) (89 自)

解：設原始資金為 x，$\therefore x(1-1\%)^n>\dfrac{1}{2}x$，$\Rightarrow$ $(\dfrac{99}{100})^n>\dfrac{1}{2}$

取 log ，$\therefore n(2\log 3+\log 11-2)<-\log 2$，$\therefore n>\dfrac{\log 2}{2-2\log 3-\log 11}=\dfrac{0.3010}{2-2\times 0.4771-1.0414}=68.\cdots$，取 $n=69$

答：69

16.設 $a=(\dfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$，$b=(\dfrac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$，$c=(\dfrac{1}{4})^{\frac{1}{4}}$。下列選項何者為真？(90 學測)

(A) $a>b>c$　(B) $a<b<c$　(C) $a=c>b$　(D) $a=c<b$　(E) $a=b=c$

解：$a=(\dfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$：取 $\log a=\log(\dfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\log(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}\log 2^{-1}=-0.1505$

$b=(\dfrac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$：取 $\log b=\log(\dfrac{1}{3})^{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}\log(\dfrac{1}{3})=-\dfrac{1}{3}\log 3=-0.1590$

$c=(\dfrac{1}{4})^{\frac{1}{4}}$：取 $\log c=\log(\dfrac{1}{4})^{\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{4}\log(\dfrac{1}{4})=\dfrac{1}{4}\log(\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{1}{4}\times 2\times\log 2^{-1}=\log a$

$\log a=-0.1505=\log c>-0.1590=\log b$，$\therefore a=c>b$

答：(C)

17.根據內政統計，臺灣地區在西元 2000 年底有 2228 萬人，而最近九年的人口平均年增加率為 0.0087。假設此後一世紀內，人口的年增加率皆為 0.0087，則臺灣地區人口增加 50%而達到 3342 萬時，會最接近下面所列的那一年(西元)？

(1) 2040　(2) 2050　(3) 2060　(4) 2070　(5) 2080　(90 自)

常用對數表 $y=\log_{10}x$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014

例：$\log_{10}1.23=0.0899$

解：設 n 年後，人口達到 3342 萬

$\therefore 2228(1+0.0087)^n=3342$，$(1+0.0087)^n=\dfrac{3342}{2228}=1.5$

取 $\log(1+0.0087)^n=\log 1.5$，$\Rightarrow n\log 1.0087=0.1761$，$\therefore n=47.6$，而 $2000+47.6=2047.6$(西元)

答：(2)

18.目前國際使用芮氏規模來表示地震強度。設 $E(r)$為地震芮氏規模 r 時，震央所釋放出來的能量，r 與 $E(r)$的關係如下：$\log E(r)=5.24+1.44r$，

(1)某次地震其芮氏規模為 4，試問其震央所釋放的能量 $E(4)$為多少？

(2)試問芮氏規模 6 的地震，其震央所釋放的能量是芮氏規模 4 的地震震央所釋放能量之多少倍？(整數倍以下捨去，已知 $10^{1.44}=27.54$) (90 數學乙)

解：(1) $\log E(4)=5.24+1.44\times4=11$，$\therefore E(4)=10^{11}$

(2) $\log E(6)=5.24+1.44\times6=13.88$，$\therefore E(6)=10^{13.88}$，$\Rightarrow\dfrac{E(6)}{E(4)}=\dfrac{10^{13.88}}{10^{11}}=10^{2.88}=(10^{1.44})^2=27.54^2=758.45\approx758$

答：(1)10^{11}；(2)758 倍

19.觀察相關的函數圖形，判斷下列選項何者為真？(91 學測)

(1) $10^x=x$ 有實數解　(2)$10^x=x^2$ 有實數解　(3) x 為實數時，$10^x>x$ 恆成立

(4) $x>0$ 時，$10^x>x^2$ 恆成立　(5)$10^x=-x$ 有實數解

解：(1)如下圖 1，∵ $y=10^x$ 與 $y=x$ 的圖形不相交，∴沒有實數解

(2)如下圖 2，∵ $y=10^x$ 與 $y=x^2$ 的圖形交於 1 點，∴有 1 實數解

(3)如下圖 1，∵ $y=10^x$ 的圖形恆在 $y=x$ 圖形的上方，∴$10^x>x$ 恆成立

(4)如下圖 2，∵當 $x>0$ 時，$y=10^x$ 的圖形(第一象限內)恆在 $y=x^2$ 圖形的上方，∴$10^x>x^2$ 恆成立

(5)如下圖 3，∵ $y=10^x$ 與 $y=-x$ 的圖形相交於 1 點，∴有 1 實數解

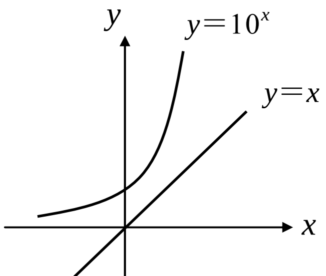


圖 1

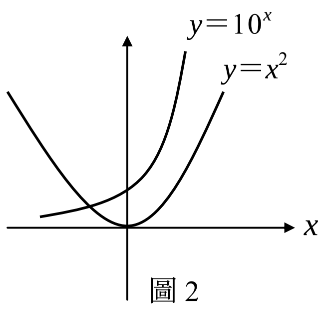


圖 2

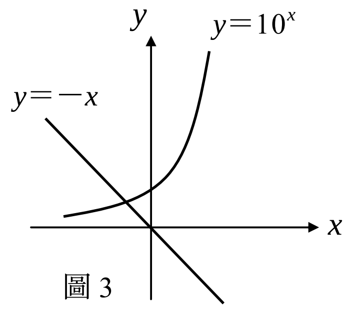


圖 3

答：(2)(3)(4)(5)

20.某甲自 89 年 7 月起，每月 1 日均存入銀行 1000 元，言明以月利率 0.5%按月複利計息，到 90 年 7 月 1 日提出。某乙則於 89 年 7 月起，每單月(一月、三月、五月…)1 日均存入銀行 2000 元，亦以月利率 0.5%按月複利計息，到 90 年 7 月 1 日提出。一整年中，兩人都存入本金 12000 元。提出時，甲得本利和 A 元，乙得本利和 B 元。問下列選項何者為真？(91 學測)

(1) B＞A　(2) $A=1000\left[\sum_{k=1}^{12}(\frac{1005}{1000})^k\right]$　(3) $B=2000\left[\sum_{k=1}^{6}(\frac{1005}{1000})^{2k}\right]$

(4) $A<12000(\frac{1005}{1000})^{12}$　(5) $B<12000(\frac{1005}{1000})^{12}$

解：$A=\underline{1000(1+0.5\%)^{12}+1000(1+0.5\%)^{11}}+\ldots+1000(1+0.5\%)^1=1000\left[\sum_{k=1}^{12}(\frac{1005}{1000})^k\right]$

$<12000(1+0.5\%)^{12}+12000(1+0.5\%)^{12}+\ldots+12000(1+0.5\%)^{12}=12000(\frac{1005}{1000})^{12}$

$B=2000(1+0.5\%)^{12}+2000(1+0.5\%)^{10}+\ldots+2000(1+0.5\%)^2=2000\left[\sum_{k=1}^{6}(\frac{1005}{1000})^{2k}\right]$

$=\underline{1000(1+0.5\%)^{12}+1000(1+0.5\%)^{12}}+\ldots+\underline{1000(1+0.5\%)^2+1000(1+0.5\%)^2}>A$

$B=2000(1+0.5\%)^{12}+2000(1+0.5\%)^{10}+\ldots+2000(1+0.5\%)^2$

$<12000(1+0.5\%)^{12}+12000(1+0.5\%)^{12}+\ldots+12000(1+0.5\%)^{12}=12000(\frac{1005}{1000})^{12}$

答：(1)(2)(3)(4)(5)

21.前行政院長提出知識經濟，喊出 10 年內要讓臺灣 double(加倍)，一般小市民希望第 11 年開始的薪水加倍。如果每年調薪 a%，其中 a 為整數，欲達成小市民的希望，那麼 a 的最小值為_____。(參考數值：log2　0.3010)(91 數乙)

$x=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\log(1+0.01x)$	0.0043	0.0086	0.0128	0.0170	0.0212	0.0253	0.0294	0.0334	0.0374

解：設原有薪水 x 元，第 11 年開始薪水加倍 $\therefore x\cdot(1+a\%)^{10}\geq 2x$，$\Rightarrow(1+a\%)^{10}\geq2$

兩邊取 log，∴ $10\log(1+0.01a)\geq\log2$，$\Rightarrow\log(1+0.01a)\geq0.03010$，查附表得 a 之最小整數值為 8。

答：8

22.根據統計資料，在 A 小鎮當某件訊息發布後，t 小時之內聽到該訊息的人口是全鎮人口的 $100(1-2^{-kt})\%$，其中 k 是某個大於 0 的常數。今有某訊息，假設在發布後 3 小時之內已經有 70%的人口聽到該訊息。又設最快要 T 小時後，有 99%的人口已聽到該訊息，則 T 最接近下列哪一個選項？(92 學測)

(1) 5 小時　(2) $7\frac{1}{2}$ 小時　(3) 9 小時　(4) $11\frac{1}{2}$ 小時　(5) 13 小時

解：依題意 $100(1-2^{-3k})\%=70\%$，$\Rightarrow 1-2^{-3k}=\dfrac{7}{10}$，$\Rightarrow 2^{-3k}=\dfrac{3}{10}$

又 $100(1-2^{-kT})\%=99\% \Rightarrow 1-2^{-kT}=\dfrac{99}{100} \Rightarrow 2^{-kT}=\dfrac{1}{100} \Rightarrow (2^{-3k})^{\frac{T}{3}}=\dfrac{1}{100} \Rightarrow (\dfrac{3}{10})^{\frac{T}{3}}=\dfrac{1}{100}$

兩邊取 log 得 $\dfrac{T}{3}\log\dfrac{3}{10}=-2$，$\Rightarrow \dfrac{T}{3}(\log 3-1)=-2 \Rightarrow T=\dfrac{-6}{\log 3-1}\approx\dfrac{-6}{0.4771-1}=\dfrac{-6}{-0.5229}\approx 11.5$

答：(4)

23.以下個數何者為正？(92 學測)

(1) $\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}$　(2) $\log_2 3-1$　(3) $\log_3 2-1$　(4) $\log_{\frac{1}{2}} 3$　(5) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$

解：(1) $\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^3}-\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{8}-\sqrt[6]{4}>0$

(2) $\because \log_2 3>\log_2 2=1$，$\therefore \log_2 3-1>0$

(3) $\because \log_3 2>\log_3 3=1$，$\therefore \log_3 2-1<0$

(4) $\log_{\frac{1}{2}} 3=\log_{2^{-1}} 3=-\log_2 3<0$

(5) $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{2}=\log_{3^{-1}} 2^{-1}=\dfrac{-1}{-1}\log_3 2=\log_3 2>0$

答：(1)(2)(5)

24.試問有多少個正整數 n 滿足 $100\le(1.5)^n\le 500$？(92 學測補)

(1) 3 個　(2) 4 個　(3) 5 個　(4) 6 個　(5) 7 個

解：原式同時取 log，$\therefore \log 100\le\log(1.5)^n\le\log 500$，$\Rightarrow 2\le n(\log 3-\log 2)\le 2+\log 5$

$\Rightarrow 11.357\le n\le 15.326$，故 $n=12$，13，14，15 共 4 個

答：(2)

25.已知不等式 $1.253\times10^{845}<7^{1000}<1.254\times10^{845}$ 成立。請選出正確的選項。(92 數學甲)

(1) $\log_{10}7<0.846$　(2) $\log_{10}7>0.845$　(3) $7^{100}<5\times10^{84}$　(4) $7^{10}<2\times10^{8}$

解：(1)取 log，$\therefore \log 1.253+845<1000\log 7<\log 1.254+845$……①

①式同除 1000，$\therefore 0.845+\dfrac{1}{1000}\log 1.253<\log 7<0.845+\dfrac{1}{1000}\log 1.254$，$\Rightarrow 0.845<\log 7<0.846$

(2)①式同除 100，$\therefore 0.845+\dfrac{1}{100}\log 1.253<\log 7<0.845+\dfrac{1}{100}\log 1.254$，$\Rightarrow 0.845<\log 7<0.846$

(3) $\log 7^{100}<84.6<\log 10^{84}+\log 5=\log 5\times10^{84}$　($\because \log 5=0.6990>0.9$)，$\Rightarrow 7^{100}<5\times10^{84}$

(4) $\because \log 7>0.845$，$\therefore 10\log 7>8.45=8+0.45>8+\log 2$，$\Rightarrow \log 7^{10}>\log 10^8+\log 2$，$\Rightarrow 7^{10}>2\times10^8$

答：(1)(2)(3)

26.下表是 2001 年時，從各國國會網站取得有關『該國國會議員席次與人口數』的資料：

國名	議會席次 y	人口數 P(千人)
冰島	63	270
挪威	165	4480
丹麥	175	5330
泰國	393	60600
日本	500	126540

根據上述資料，人口數(以千人為單位)為 P 的國家，他們的國會議員席次 y，以下列哪個公式制訂較接近上述五個國家的現況？(92 數學乙)

(1) $y=\frac{P}{4}$　(2) $y=0.1P+36$　(3) $y=4\sqrt{P}$　(4) $y=10\sqrt[3]{P}$　(5) $y=27\log 10P$

解：(1) $y=\frac{P}{4}$ 對冰島適用，其他國家誤差太大，∴不合

(2) $y=0.1P+36$ 對冰島適用，其他國家誤差太大，∴不合

(3) $y=4\sqrt{P}$ 對任何國家皆不適用，∴不合

(5) $y=27\log 10P$

冰島：$27\log 270\fallingdotseq 54\cdots<63$

挪威：$27\log_{10}4480\fallingdotseq 81\cdots<165$　誤差越來越大，∴不合

(4) $y=10\sqrt[3]{P}$，計算如下，其誤差非常小

冰島：$10\sqrt[3]{270}\fallingdotseq 63$

挪威：$10\sqrt[3]{4480}\fallingdotseq 165$

丹麥：$10\sqrt[3]{5330}\fallingdotseq 175$

泰國：$10\sqrt[3]{60600}\fallingdotseq 393$

日本：$10\sqrt[3]{126540}\fallingdotseq 500$

答：(4)

27.陳老師證明了 $x^2=2^x$ 有兩個正實數解及一個負實數解後，進一步說，此方程式兩邊各取 $\log_2$，得 $2\log_2 x=x$；陳老師要同學討論此新的方程式有多少實數解？(92 數學乙)

小英說：恰有三個實數解；

小明說：恰有兩個正實數解；

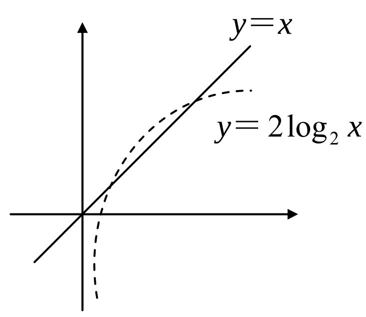
小華說：最多只有兩個實數解；

小毛說：仍然有兩個正實數解及一個負實數解；

小芬說：沒有實數解。

請問哪些人說的話，可以成立？

(1)小英　(2)小明　(3)小華　(4)小毛　(5)小芬



解：解 $2\log_2 x=x$，即求 $y=2\log_2 x$ 與 $y=x$ 圖形之交點個數

如右圖，其相交於 2 點，且交點之座標均為正數

∴ $2\log_2 x=x$ 恰有 2 個正實數解

答：(B)(C)

28.台灣證券交易市場規定股票成交價格只能在前一個交易日的收盤價(即最後一筆的成交價)的漲、跌 7%範圍內變動。例如：某支股票前一個交易日的收盤價是每股 100 元，則今天該支股票每股的買賣價格必須在 93 元至 107 元之間．假設有某支股票的價格起伏很大，某一天的收盤價是每股 40 元，次日起連續五個交易日以跌停板收盤(也就是每天跌 7%)，緊接著卻連續五個交易日以漲停板收盤(也就是每天漲 7%)。請問經過這十個交易日後，該支股票每股的收盤價最接近下列哪一個選項中的價格？(93 學測)

(1) 39 元　(2) 39.5 元　(3) 40 元　(4) 40.5 元　(5) 41 元

解 1：依題意最後的收盤價為 $40(1-7\%)^5(1+7\%)^5=40\times 0.93^5\times 1.07^5$，

又由對數表得 $\log(0.93^5\times 1.07^5)=5(\log 0.93+\log 1.07)=5(0.9685-1+0.0294)$

$=5(-0.0021)=-0.0105=-1+0.9895=-1+\log 9.762=\log 0.9762$

所以收盤價約為 $40\times0.9762=39.0480\approx39$

解 2：依題意最後的收盤價為 $40(1-7\%)^5(1+7\%)^5=40[(1-0.07)(1+0.07)]^5=40(1-0.0049)^5$

$=40[C_0^5\,1+C_1^5(0.0049)+C_2^5(-0.0049)^2+\cdots\cdots+C_5^5(-0.0049)^5]\approx40(1-5\times0.0049)=40\times0.9755=39.0200\approx39$

答：(1)

29.設 a，b，c 為正整數，若 $a\log_{520}2+b\log_{520}5+c\log_{520}13=3$，則 $a+b+c=$_______。(93 學測)

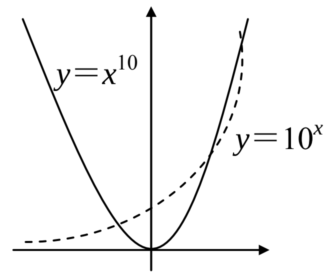
解：$a\log_{520}2+b\log_{520}5+c\log_{520}13=3\Rightarrow\log_{520}(2^a\times5^b\times13^c)=3$

$\Rightarrow2^a\times5^b\times13^c=520^3=(2^3\times5\times13)^3=2^9\times5^3\times13^3$，$\Rightarrow a+b+c=9+3+3=15$

答：15

30.根據對數表，log 2 的近似值是 0.3010，log 3 的近似值是 0.4771。下列選項有哪些是正確的？(93 數學甲)

(1) $10^9>9^{10}$　(2) $10^{12}<12^{10}$　(3) $10^{11}>11^{10}$　(4)方程式 $10^x=x^{10}$ 有一負根



解：(1)$\because\log10^9=9$；$\log9^{10}=10\log9=10\times2\log3=9.542$，$\therefore10^9<9^{10}$

(2)$\because\log10^{12}=12$；$\log12^{10}=10\log12=10\times(2\log2+\log3)=9.542$，$\therefore10^{12}>12^{10}$

(3)$\because\log10^{11}=11$；$\log10^{11}>\log12^{10}>\log11^{10}$，$\therefore10^{11}>11^{10}$

(4)如右圖，求 $y=10^x$ 與 $y=x^{10}$ 圖形之交點，得知有一交點的座標為負，故其有一負根

答：(3)(5)

31.統計學家克利夫蘭對人體的眼睛詳細研究後發現：我們的眼睛看到圖形面積的大小與此圖形實際面積的 0.7 次方成正比。例如：大圖形是小圖形的 3 倍，眼睛感覺到的只有 $3^{0.7}$(約 2.16)倍。觀察某個國家地圖，感覺全國面積約為某縣面積的 10 倍，試問這國家的實際面積大約是該縣面積的幾倍？(93 數學乙)

(1) 18 倍　(2) 21 倍　(3) 24 倍　(4) 27 倍　(5) 36 倍

(已知 log 2≑ 0.3010，log 3≑ 0.4771，log 7≑ 0.8451)

解：(1)假設全國實際面積為 A，某縣實際面積為 B，$\therefore\dfrac{A^{0.7}}{B^{0.7}}=10$

取 $\log(\dfrac{A^{0.7}}{B^{0.7}})=\log10$，$\Rightarrow0.7\log\dfrac{A}{B}=1$，得 $\log\dfrac{A}{B}=\dfrac{1}{0.7}\doteqdot1.4286$

(2)$\because\log2<0.4286<\log3$，利用內插法得知 $0.4286=\log2.725$

$\therefore\log\dfrac{A}{B}=1.4286=1+0.4286=\log10+\log2.725=\log27.25$

$\Rightarrow\dfrac{A}{B}\doteqdot27$

答：(4)

32.聲音的強度是用每平方公尺多少瓦特(W/m^2)來衡量，一般人能感覺出聲音的最小強度為 $I_0=10^{-12}$ (W/m^2)；當測得的聲音強度為 I (W/m^2)時，所產生的噪音分貝數 d 為 $d(I)=10.\ \log\dfrac{I}{I_0}$。(93 數學乙)

(1)一隻蚊子振動翅膀測得的聲音強度為 10^{-12}(W/m^2)，求其產生的噪音分貝數。

(2)汽車製造廠測試發現，某新車以每小時 60 公里速度行駛時，測得的聲音強度為 10^{-4} (W/m^2)，試問此聲音強度產生的噪音為多少分貝？

(3)棒球比賽場中，若一支瓦斯汽笛獨鳴，測得的噪音為 70 分貝，則百支瓦斯汽笛同時同地合鳴，被測得的噪音大約為多少分貝？

解：(1) $d(10^{-12})=10\log\dfrac{10^{-12}}{10^{-12}}=10\log1=0$ (分貝)

(2) $d(10^{-4})=10\log\dfrac{10^{-4}}{10^{-12}}=10\log 10^{8}=80$ (分貝)

(3)一支汽笛：$d(\mathrm{I})=10\log\dfrac{I}{10^{-12}}=70$, $\Rightarrow \log \mathrm{I}.\ \ 10^{12}=7$, $\therefore \mathrm{I}=10^{-5}$

百支汽笛：$d(100\mathrm{I})=10\log\dfrac{100I}{10^{-12}}=10\log\dfrac{10^{-3}}{10^{-12}}=10\log 10^{9}=90$

答：(1)0；(2)80；(3)90

33.設 a, b 為正實數，已知 $\log_7 a=11$, $\log_7 b=13$：試問 $\log_7(a+b)$ 之值最接近下列哪個選項？(94 學測)

(1) 12 (2) 13 (3) 14 (4) 23 (5) 24

解 1：$\because \log_7 a=11\Rightarrow a=7^{11}$

$\because \log_7 b=13\Rightarrow b=7^{13}$

$\therefore \log_7(a+b)=\log_7(7^{11}+7^{13})=\log_7 7^{11}(1+7^2)=\log_7 7^{11}\times 50=\log_7 7^{11}+\log_7 50=11+\dfrac{\log 50}{\log 7}$ $11+2.1=13.1$

解 2：(1) $\because \log_7 a=11\Rightarrow a=7^{11}$ ； $\log_7 b=13\Rightarrow b=7^{13}$

(2) $\because a$, b 為正實數且 $a\neq b$, 根據算幾不等式, $\therefore a+b>2\sqrt{ab}=2\times 7^{12}$

(3) $\log_7(a+b)$ 是遞增函數, $\therefore \log_7(a+b)>\log_7(2\times 7^{12})=12+\log_7 2=12+\dfrac{\log 2}{\log 7}=12+\dfrac{0.3010}{0.8451}$ 12.36

(4)又 $\because a<b\Rightarrow a+b<2b$, $\therefore \log_7(a+b)<\log_7 2b=\log_7 2\times 7^{13}=13+\log_7 2$ 13.36

故 $12.36<\log_7(a+b)<13.36$ $\Rightarrow$ $\log_7(a+b)$ 最接近 13

答：(2)

34.地震規模的大小通常用芮氏等級來表示，已知芮氏等級每增加 1 級，地震震幅強度約增加為原來的 10 倍，能量釋放強度則約增加為原來的 32 倍。現假設有兩次地震，所釋放的能量約相差 100,000 倍，依上述性質則地震震幅強度約相差幾倍？請選出最接近的答案。(1) 10 倍 (2) 100 倍 (3) 1000 倍 (4) 10000 倍 (94 數學甲)

解：令 A 表震幅強度，E 表能量強度，芮氏等級 n，依題意

芮氏等級	n	$n+1$	$n+2$	……	$n+k$
震幅強度	A	10A	10^2A		10^k A
能量強度	E	32E	32^2E		32^k E

設兩次地震之等級為 n 級與 $n+k$ 級，則其震幅強度為 A 與 10^k A

$\therefore 32^k\,\mathrm{E}=100000\,\mathrm{E}$, $\Rightarrow 2^{5k}\,\mathrm{E}=10^5\mathrm{E}$, $\therefore$ 取 log， $\Rightarrow (5k)\log 2=5$, 得知 $k=\dfrac{1}{\log 2}=3$

$\Rightarrow$ 震幅強度為 A 與 10^3 A，亦即約相差 1000 倍

答：(3)

35.設 10^4 的所有正因數的乘積為 n，則 $\log n=$______。(94 指乙)

解 1：$\because 10^4=2^4\times 5^4$，則其正因數共有$(4+1)(4+1)=25$ 個

$\Rightarrow$ 利用公式：正因數的乘積為 $n=(10^4)^{\frac{25}{2}}=10^{50}$， $\therefore \log n=\log(10^{50})=50$

解 2：$\because 10^4=2^4\times 5^4$，則其共有$(4+1)(4+1)=25$ 個正因數,

設正因數由小而大依次設為 a_1, a_2, …, a_{25}, $\Rightarrow a_1\times a_{25}=a_2\times a_{24}=\cdots=a_{12}\times a_{14}=10^4$，故其中間項 $a_{13}=10^2$

$\Rightarrow$ 所有正因數的乘積為 $n=a_1\times a_2\times\cdots\times a_{25}=(10^4)^{12}\times 10^2=10^{50}$，則 $\log n=\log(10^{50})=50$

答：50

36.根據過去長期統計資料顯示：某公司推銷員的年資 x(年)，與每次推銷成功的機率 $y\ (x)$，滿足下列關係式：

$$y\ (x)=\frac{2^{-3+x}}{1+2^{-3+x}}$$

(1)化簡 $r\ (x)=\dfrac{y(x)}{1-y(x)}$，並說明 $r\ (x)$的值隨 x 增大而增大(即 $r\ (x)$為遞增函數)。

(2)說明年資 8 年(含)以上的推銷員，每次推銷不成功的機率小於 4 %。(94 指乙)

解：(1) $r\ (x)=\dfrac{y(x)}{1-y(x)}=\dfrac{\dfrac{2^{-3+x}}{1+2^{-3+x}}}{1-\dfrac{2^{-3+x}}{1+2^{-3+x}}}=\dfrac{2^{-3+x}}{1+2^{-3+x}-2^{-3+x}}=2^{x-3}$

∵底數為 2 的指數函數為遞增函數，∴$r\ (x)$的值隨 x 增大而增大

(2)∵$x=8$，推銷成功機率 $y\ (8)=\dfrac{2^{-3+8}}{1+2^{-3+8}}=\dfrac{32}{33}$，且 $x\geq 8$ 時，$r\ (x)$為遞增函數

$\Rightarrow x\geq 8$ 時，成功機率 $y\ (x)\geq\dfrac{32}{33}$，∴不成功的機率$=1-y\ (x)\leq 1-\dfrac{32}{33}=\dfrac{1}{33}<\dfrac{1}{25}=4\ \%$，故得證

37.在養分充足的情況下，細菌的數量會以指數函數的方式成長，假設細菌 A 的數量每兩個小時可以成長為兩倍，細菌 B 的數量每三個小時可以成長為三倍。若養分充足且一開始兩種細菌的數量相等，則大約幾小時後細菌 B 的數量除以細菌 A 的數量最接近 10？

(1) 24 小時　(2) 48 小時　(3) 69 小時　(4) 96 小時　(5) 117 小時　(95 學測)

解 1：設一開始兩種細菌的數量均為 x，則依據題意：

細菌 A 每經過 t 小時的成長數量為 $x\cdot 2^{\frac{t}{2}}$；細菌 B 每經過 t 小時的成長數量為 $x\cdot 3^{\frac{t}{3}}$，

則 $\dfrac{細菌B}{細菌A}=\dfrac{x\cdot 3^{\frac{t}{3}}}{x\cdot 2^{\frac{t}{2}}}=10$，$\Rightarrow$ 即 $3^{\frac{t}{3}}=10\cdot 2^{\frac{t}{2}}$，$\Rightarrow$ 兩邊取 log，$\Rightarrow$ $\dfrac{t}{3}\log 3=\log 10+\dfrac{t}{2}\log 2=1+\dfrac{t}{2}\log 2$

同乘 6 $\Rightarrow (2\ t\ )\log 3=6+(3\ t\ )\log 2$ $\Rightarrow t=\dfrac{6}{2\log 3-3\log 2}=\dfrac{6}{2\times 0.4771-3\times .3010}\approx 117.2$

解 2：設一開始兩種細菌的數量均為 x，則依據題意：

細菌 A 每經過 $2t$ 小時的成長關係式為 $x\cdot 2^{t}$；

細菌 B 每經過 $3t$ 小時的成長關係式為 $x\cdot 3^{t}$

若設經過 $6k$ 小時細菌 B 的數量除以細菌 A 的數量最接近 10，

即細菌 B 經過 $2t=2(3k)=6k$ 小時；細菌 A 經過 $3t=3(2k)=6k$ 小時

$\Rightarrow\dfrac{細菌B}{細菌A}=\dfrac{x\cdot 3^{2k}}{x\cdot 2^{3k}}=10$ $\Rightarrow$ 得 $\dfrac{3^{2k}}{2^{3k}}=10$ $\Rightarrow(\dfrac{3^2}{2^3})^k=10$ $\Rightarrow$ $(\dfrac{9}{8})^k=10$

$\Rightarrow$兩邊取 log $\Rightarrow k(\log 9-\log 8)=\log 10=1$

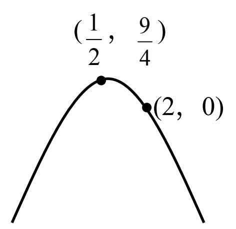
$\Rightarrow k=\dfrac{1}{\log 9-\log 8}=\dfrac{1}{2\times 0.4771-3\times 0.3010}$　19.5

$\Rightarrow$故需 $6k=19.5\times 6=117$ (小時)

答：(5)

38.在坐標平面上，設 P 為 $y=2+x-x^2$ 圖形上的一點。若 P 的 x 坐標為 $\log_3 10$，則 P 點的位置在：(95 數學甲)

(1)第一象限　(2)第二象限　(3)第三象限　(4)第四象限　(5)坐標軸上



解 1：(1)P 的 x 坐標為 $\log_3 10>\log_3 9=2>0$

(2)∵ $y=2+x-x^2=-(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{9}{4}$，為開口向下的拋物線(右圖)

當 $x=\log_3 9=2$ 代入 y，得 $y=0$

則當 $x=\log_3 10>2$ 代入 y，得 $y<0$，∴P 點 y 坐標為負數

由(1)(2)得知 P 點在第四象限

解 2：(1)P 的 x 坐標為 $\log_3 10 > \log_3 9 = 2 > 0$

(2)令 $x = \log_3 10 = 2 + k$，$0 < k < 1$，$\therefore y = 2 + x - x^2 = 2 + (2+k) - (2+k)^2 = -k^2 - 3k < 0$

由(1) (2)得知 P 點在第四象限

答：(4)

39.設 a 為大於 1 的實數，考慮函數 $f(x) = a^x$ 與 $g(x) = \log_a x$，試問下列哪些選項是正確的？(96 學測)

(1)若 $f(3)=6$，則 $g(36)=6$

(2) $\dfrac{f(238)}{f(219)} = \dfrac{f(38)}{f(19)}$

(3) $g(238)-g(219)=g(38)-g(19)$

(4)若 P，Q 為 $y=g(x)$的圖形上兩相異點，則直線 PQ 之斜率必為正數

(5)若直線 $y=5x$ 與 $y=f(x)$的圖形有兩個交點，則直線 $y=\dfrac{1}{5}x$ 與 $y=g(x)$的圖形也有兩個交點

解：(1)若 $f(3)=6$，得 $a^3=6$，兩邊取對數 $\Rightarrow$ $\log_a 6 = 3$，而 $g(36) = \log_a 36 = 2\log_a 6 = 6$

(2) $\dfrac{f(238)}{f(219)} = \dfrac{a^{238}}{a^{219}} = a^{238-219} = a^{19}$ ；$\dfrac{f(38)}{f(19)} = \dfrac{a^{38}}{a^{19}} = a^{38-19} = a^{19}$ $\Rightarrow \therefore \dfrac{f(238)}{f(219)} = \dfrac{f(38)}{f(19)}$

(3) $g(238)-g(219) = \log_a 238 - \log_a 219 = \log_a \dfrac{238}{219}$

$g(38)-g(19) = \log_a 38 - \log_a 19 = \log_a \dfrac{38}{19}$

$\because \log_a \dfrac{238}{219} \neq \log_a \dfrac{38}{19}$ $\Rightarrow \therefore g(238)-g(219) \neq g(38)-g(19)$

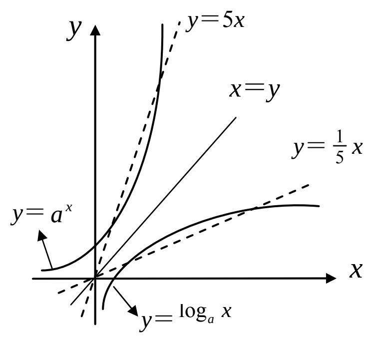
(4)$\because \log_a x$ 的底數為 $a>1$，$\therefore y=g(x)=\log_a x$ 是一嚴格遞增之對數函數，$\Rightarrow$直線 PQ 之斜率大於 0，故必為正數

(5)如圖，函數 $f(x)=a^x$ 與 $g(x)=\log_a x$ 互為反函數，且圖形對稱於直線 $y=x$

而 $y=5x$ 與 $y=\dfrac{1}{5}x$ 之圖形對稱於直線 $y=x$

$\therefore$直線 $y=5x$ 與 $y=f(x)$的圖形有兩個交點，

則直線 $y=\dfrac{1}{5}x$ 與 $y=g(x)$的圖形也有兩個交點。



答：(1)(2)(3)(4)

40.設實數 x 滿足 $0<x<1$，且 $\log_x 4 - \log_2 x = 1$，則 x=_____。(96 學測)

解：$\log_x 4 - \log_2 x = 2\log_x 2 - \log_2 x = 1$

$\because \log_x 2 = \dfrac{1}{\log_2 x}$，$\therefore$原式為 $2(\dfrac{1}{\log_2 x}) - \log_2 x = 1$，

化簡得$(\log_2 x)^2 + \log_2 x - 2 = 0$，因式分解 $\Rightarrow (\log_2 x + 2)(\log_2 x - 1) = 0$

$\because \log_2 x = -2$ 或 $\log_2 x = 1$ (不合，$\because 0<x<1$ 時，$\log_2 x < 0$)

$\Rightarrow$ $\log_2 x = -2$，得 $x = \dfrac{1}{4}$

41.設 a_1，a_2，a_3，…，a_{10} 是一等比數列，其首項 $a_1>1$ 且公比 $r>1$。坐標平面上有一質點 M 自原點(0，0)出發，依以下規則連續移動十次：第一次移動往右 $\log a_1$ 單位，第二次移動向上 $\log a_2$ 單位，第三次移動往右 $\log a_3$ 單位，第四次移動向上 $\log a_4$ 單位，依此類推直到第十次；即第 $2k-1$ 次的移動是往右 $\log a_{2k-1}$ 單位，接著第 $2k$ 次的移動是向上 $\log a_{2k}$ 單位。已知經過這十次的移動後，該質點 M 停在點$(5+5\log 2，5+\dfrac{15}{2}\log 2)$的位置上，試問首項 a_1 與公比 r 組成的序對$(a_1，r)$為以下哪一選項？(96 指甲 3)

(1)$(\sqrt{2}，\sqrt{2})$　(2)$(2\sqrt{2}，\sqrt{5})$　(3)$(2，\sqrt{2})$　(4)$(5，\sqrt{5})$　(5)$(5，\sqrt{2})$

解：如圖所示，設 M$(x，y)$

$x=\log a_1+\log a_3+\log a_5+\log a_7+\log a_9$

$=\log a_1+\log a_1r^2+\log a_1r^4+\log a_1r^6+\log a_1r^8$

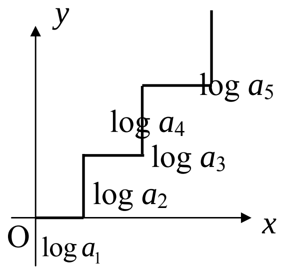
$=\log a_1+(\log a_1+\log r^2)+(\log a_1+\log r^4)+(\log a_1+\log r^6)+(\log a_1+\log r^8)$

$=5\log a_1+2\log r+4\log r+6\log r+8\log r$

$=5\log a_1+20\log r=5+5\log 2$

$y=\log a_2+\log a_4+\log a_6+\log a_8+\log a_{10}=5\log a_1+25\log r=5+\frac{15}{2}\log 2$

$\Rightarrow$解得 $\log r=\frac{1}{2}\log 2=\log\sqrt{2}$，$\therefore r=\sqrt{2}$，$a_1=5$，$\Rightarrow(a_1,\ r)=(5,\ \sqrt{2})$

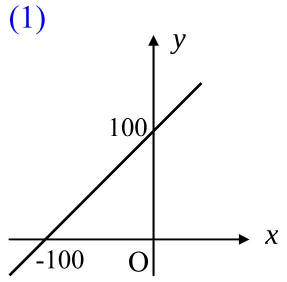


答：(5)

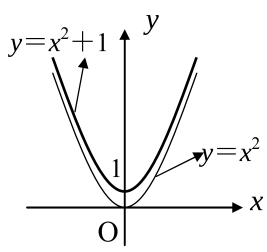
42.試問：在坐標平面上，下列哪些選項中的函數圖形完全落在 x 軸的上方？(97 學測)

(1) $y=x+100$ (2) $y=x^2+1$ (3) $y=2+\sin x$ (4) $y=2^x$ (5) $y=\log x$

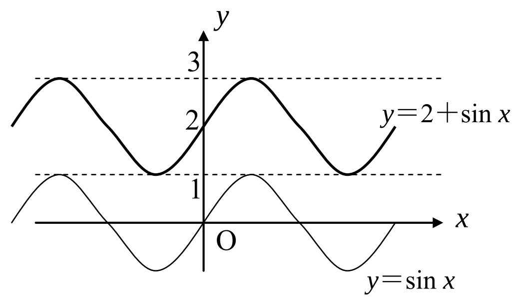
解： (1)



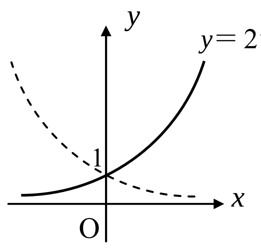
(2)



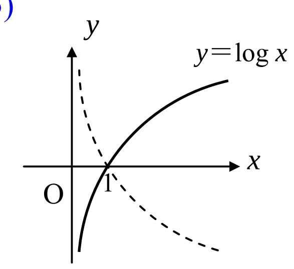
(3)



(4)



(5)



答：(2)(3)(4)

43.已知在一容器中有 A，B 兩種菌，且在任何時刻 A，B 兩種菌的個數乘積為為定值 10^{10}。為了簡單起見，科學家用 $P_A=\log(n_A)$ 來記錄 A 菌個數的資料，其中 n_A 為 A 菌的個數。試問下列哪些選項是正確的？(97 學測)

(1) $1\le P_A\le 10$

(2)當 $P_A=5$ 時，B 菌的個數與 A 菌的個數相同

(3)如果上週一測得 P_A 值為 4，而上週五測得 P_A 值為 8，表示上週五 A 菌的個數是上週一 A 菌個數的 2 倍

(4)若今天的 P_A 值比昨天增加 1，則今天的 A 菌比昨天多了 10 個

(5)假設科學家將 B 菌的個數控制為五萬個，則 $5<P_A<5.5$

解：(1) $\because 1\le n_A<10^{10}$，$\therefore 0\le P_A<10$

(2) $P_A=5=\log(n_A)$，$\therefore n_A=10^5$；則 B 菌的個數$=\frac{10^{10}}{10^5}=10^5$

(3)上週一 P_A 值為 4，$\therefore n_A=10^4$；上週五 P_A 值為 8，$\therefore n_A=10^8$；$\frac{10^8}{10^4}=10^4$

(4) P_A 值增加 1，則增加 10 倍個，不是增加 10 個

(5) B 菌的個數＝五萬個，$n_A=2\times10^5$，$P_A=\log(2\times10^5)=5+\log 2\approx 5.301$

答：(2)(5)

44.某公司為了響應節能減碳政策，決定在五年後將公司該年二氧化碳排放量降為目前排放量的75% 。公司希望每年依固定的比率(當年和前一年排放量的比)逐年減少二氧化碳的排放量。若要達到這項目標，則該公司每年至少要比前一年減少_____%的二氧化碳的排放量。(計算到小數點後第一位，以下四捨五入。)(98學測F)

解：設當年和前一年排放量的比為 x，則根據題意得知 $x^5=75\%=\dfrac{3}{4}$

取 $\log x^5=\log\dfrac{3}{4}$，$\Rightarrow 5\log x=\log 3-\log 4\fallingdotseq 0.4771-0.6020=-0.1249$

$\therefore \log x\fallingdotseq -0.02498$，$\Rightarrow$ $\log\dfrac{1}{x}=0.02498=\log 1.059$，得知 $x=\dfrac{1}{1.059}\fallingdotseq 0.9442$

$\Rightarrow$ 遞減率$=1-x=0.0558\fallingdotseq 5.6\%$

答：5.6%

45.若$(a，b)$是對數函數 $y=\log x$ 圖形上一點，則下列哪些選項中的點也在該對數函數的圖形上？(98 指乙 3)

(1)(1，0)　(2)$(10a，b+1)$　(3)$(2a，2b)$　(4)$(\dfrac{1}{a}，1-b)$　(5)$(a^2，2b)$

解：1. $(a，b)$在函數 $y=\log x$ 圖形上一點，$\Rightarrow b=\log a$

2. (1，0)代入 $y=\log x$，$\Rightarrow 0=\log 1$ 或 由函數 $y=\log x$ 圖形必過點(1，0)，(正確)

$(10a，b+1)$代入 $y=\log x$，$\Rightarrow b+1=\log(10a)=\log 10+\log a=1+b$，(正確)

$(2a，2b)$代入 $y=\log x$，$\Rightarrow 2b=\log(2a)\neq\log 2+\log a=\log 2+b$，(不正確)

$(\dfrac{1}{a}，1-b)$代入 $y=\log x$，$\Rightarrow 1-b\neq\log\dfrac{1}{a}=-\log a=-b$，(不正確)

$(a^2，2b)$代入 $y=\log x$，$\Rightarrow 2\mathrm{b}=\log a^2=2\log a=2b$，(正確)

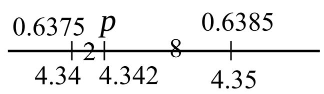
答：(1)(2)(5)

46.數學教科書所附的對數表中，log4.34＝0.6375、log4.35＝0.6385。根據 log4.34 和 log4.35 的查表值以內插法求 log4.342，設求得的值為 p，則下列哪一個選項是正確的？(98 指甲 1)

(1) $p=\dfrac{1}{2}(0.6375+0.6385)$　(2) $p=0.2\times0.6375+0.8\times0.6385$　(3) $p=0.8\times0.6375+0.2\times0.6385$

(4) $p=0.6375+0.002$　(5) $p=0.6385—0.002$

解：利用分點公式，如右圖



$p=\dfrac{2\times0.6385+8\times0.6375}{2+8}=0.2\times0.6385+0.8\times0.6375$

答：(3)

47.在密閉的實驗室中，開始時有某種細菌 1 千隻，並且以每小時增加 8%的速率繁殖。如果依此速率持續繁殖，則 100 小時後細菌的數量最接近下列哪一個選項？(99 學測 5)

(1) 9 千隻　(2) 108 千隻　(3) 2200 千隻　(4) 3200 千隻　(5) 32000 千隻

解：設 100 小時後細菌的數量為 x 千隻，$\therefore x=1\times(1+8\%)^{100}=(1+8\%)^{100}$，

兩邊取 log，$\log x=\log(1+8\%)^{100}=100\times\log(\dfrac{108}{100})=100(\log 2^2\times3^3-\log 100)$

$100\times(2\times0.3010+3\times0.4771-2)=100\times0.0333=3+0.33$

$x=10^{3.33}=10^{3+0.33}=10^3\times10^{0.33}$　2200，其中 $10^{0.33}=y$，$0.33=\log y$　log 2.2

答：(3)

48.設 $(a_{n+1})^2=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(a_n)^2$，$n$ 為正整數，且知 a_n 皆為正。令 $b_n=\log a_n$，則數列 b_1，b_2，b_3，…為　(100 學測 3)

(1)公差為正的等差數列　(2)公差為負的等差數列　(3)公比為正的等比數列

(4)公比為負的等比數列　(5)既非等差亦非等比數列

解 1：關係式 $(a_{n+1})^2=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(a_n)^2$，兩邊取 log 得 $\log(a_{n+1})^2=\log\dfrac{1}{\sqrt{10}}+\log(a_n)^2$

$\therefore 2\log a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}+2\log a_n$， $\Rightarrow 2b_{n+1}=-\dfrac{1}{2}+2b_n$

$\therefore b_{n+1}=-\dfrac{1}{4}+b_n$，得 $b_{n+1}-b_n=-\dfrac{1}{4}$， $\therefore <b_n>$ 公差為負的等差數列

解 2：關係式 $(a_{n+1})^2=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(a_n)^2$， $\therefore a_{n+1}=(10^{-\frac{1}{4}})a_n$

$\therefore a_2=(10^{-\frac{1}{4}})a_1$， $a_3=(10^{-\frac{1}{2}})a_1$， $a_4=(10^{-\frac{3}{4}})a_1$， $a_5=(10^{-1})a_1$， $\cdots$

得 $b_1=\log a_1$， $b_2=\log a_2=-\dfrac{1}{4}+\log a_1$， $b_3=\log a_3=-\dfrac{1}{2}+\log a_1$，

$b_4=\log a_4=-\dfrac{3}{4}+\log a_1$， $b_5=\log a_5=-1+\log a_1$， $\cdots$

$\Rightarrow$ 公差 $d=b_2-b_1=-\dfrac{1}{4}=b_3-b_2=b_4-b_3=\cdots$

答：(2)

49.請問下面哪一個選項是正確的？(100 學測 5)

(1) $3^7<7^3$ (2) $5^{10}<10^5$ (3) $2^{100}<10^{30}$ (4) $\log_2 3=1.5$ (5) $\log_2 11<3.5$

解：(1) ╳× $3^7=3^6\cdot 3=9^3\cdot 3>7^3$

另解：$3^7=2187$， $7^3=343$， $\therefore 3^7>7^3$

另解：$7\log 3\approx 3.3397>3\log 7\approx 2.5353$

(2) $5^{10}=25^5>10^5$

另解：$10\cdot\log 5\approx 6.990>5\log 10=5$

(3) $2^{100}=(2^{10})^{10}=1024^{10}>(10^3)^{10}=1000^{10}$

另解：$100\cdot\log 2\approx 30.10>30\cdot\log 10=30$

(4) $1.5=\log_2 2^{1.5}=\log_2\sqrt{8}<\log_2 3$

另解：若 $\log_2 3=1.5$，則 $2^{1.5}=\sqrt{8}=3$(不合)

(5) $3.5=\log_2 2^{3.5}=\log_2\sqrt{128}>\log_2 11=\log_2\sqrt{121}$

另解：若 $\log_2 11<3.5$，則 $2^{3.5}=\sqrt{128}>11$ (合)

答：(5)

50.設(π, r)為函數 $y=\log_2 x$ 圖形上之一點，其中π為圓周率，r 為一實數。請問下列哪些選項是正確的？(100 數乙 5)

(1)(r, π)為函數 $y=2^x$ 圖形上之一點

(2) $(-r, \pi)$為函數 $y=(\dfrac{1}{2})^x$ 圖形上之一點

(3)$(\dfrac{1}{\pi}, r)$為函數 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 圖形上之一點

(4) $(\pi, 2r)$為函數 $y=4^x$ 圖形上之一點

解：(1)$\because(\pi, r)$為函數 $y=\log_2 x$ 圖形上之一點， $\therefore r=\log_2\pi$， 得知 $\pi=2^r$

可知(r, π)為函數 $y=2^x$ 圖形上之一點

另：$\because$ 函數 $y=\log_2 x$ 與函數 $y=2^x$ 互為反函數， $\therefore$ 圖形對稱 $y=x$

即若(π, r)為 $y=\log_2 x$ 圖形上之一點，則(r, π)為 $y=2^x$ 圖形上之一點

(2) $(-r, \pi)$代入 $y=(\dfrac{1}{2})^x$， 得 $\pi=(\dfrac{1}{2})^{-r}=2^r$， 成立

另：$\because$ 函數 $y=2^x$ 與函數 $y=(\dfrac{1}{2})^x=2^{-x}$ 對稱 y 軸，

$\therefore$ 由(1)(r, π)為 $y=2^x$ 圖形上之一點，則$(-r, \pi)$為 $y=(\dfrac{1}{2})^x$ 圖形上之一點

(3)由(1)知，$r=\log_2\pi$， $\therefore(\dfrac{1}{\pi}, r)$代入 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$， 得 $r=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\pi}=\log_2\pi$， 成立

(4) $(r, 2\pi)$代入 $y=4^x$， 得 $2\pi=4^r$， 即 $\pi=\dfrac{4^r}{2}\neq 2^r$ 與(1)$\pi=2^r$ 不同義

答：(1)(2)(3)

51.考慮坐標平面上滿足 $2^x=5^y$ 的點 P(x，y)，試問下列哪一個選項是錯誤的？(100 數甲 1)

(1)(0，0)是一個可能的 P 點　　(2)(log 5，log 2)是一個可能的 P 點

(3)點 P(x，y)滿足 $xy\geq 0$　　(4)所有可能的點 P(x，y)構成的圖形為一直線

(5)點 P 的 x，y 坐標可以同時為正整數

解：(1) (x，y)＝(0，0)滿足 $2^x=5^y$，故(0，0)是一個可能的 P 點，正確

(2)將 $2^x=5^y$ 兩邊取 log，得 $x\log 2=y\log 5$，∴(x，y)＝(log 5，log 2)是一個可能的 P 點

(3)由(2)得 $x\log 2=y\log 5$，知 x 與 y 同號，即滿足 $xy\geq 0$

(4) P(x，y)滿足 $2^x=5^y$，得 $(\log 2)x-(\log 5)y=0$，其圖形為一直線

(5)當 x 為正整數時，2^x 為偶數；當 y 為正整數時，5^y 為奇數，除 $x=y=0$ 時，滿足 $2^x=5^y$

但是 x，y 同時為正整數時，不滿足 $2^x=5^y$

答：(5)

出處：第二冊(Ch1 指數與對數)

52.下表為常用對數表 $\log_{10}$N 的一部份：(101 學測 3)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0292	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900

請問 $10^{3.032}$ 最接近下列哪一個選項？

(1) 101　(2) 201　(3) 1007　(4) 1076　(5) 2012

解：設 $k=10^{3.032}$，取 $\log_{10}k=\log_{10}10^{3.032}=3.032=3+0.032$

其中 $\log_{10}1.07<0.032<\log_{10}1.08$，∴$3+\log_{10}1.07<\log_{10}k<3+\log_{10}1.08$

即 $\log_{10}10^3+\log_{10}1.07<\log_{10}k<\log_{10}10^3+\log_{10}1.08$

$\Rightarrow\log_{10}1070<\log_{10}k<\log_{10}1080$，得 $1070<k<1080$

答：(4)

53.若正實數 x，y 滿足 $\log_{10}x=2.8$，$\log_{10}y=5.6$，則 $\log_{10}(x^2+y)$ 最接近下列哪一個選項的值？(101 學測 5)

(1) 2.8　(2) 5.6　(3) 5.9　(4) 8.4　(5) 11.2

解：∵ $\log_{10}x=2.8$，∴$x=10^{2.8}$，$x^2=(10^{2.8})^2=10^{5.6}$

$\log_{10}y=5.6$，∴$y=10^{5.6}$

則 $x^2+y=2\cdot 10^{5.6}$，∴ $\log_{10}(x^2+y)=\log_{10}2\cdot 10^{5.6}=\log_{10}2+\log_{10}10^{5.6}=0.3010+5.6=5.9010$

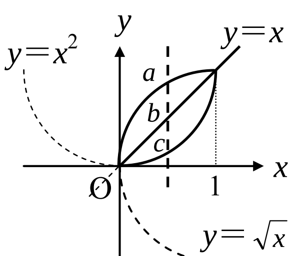
答：(3)

54.設 $0<x<1$。請選出正確的選項。(101 數乙 6)

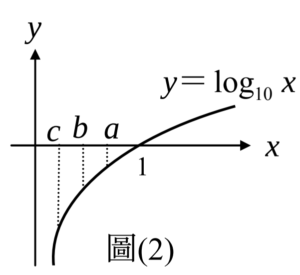
(1) $x^2<\sqrt{x}<x$　　(2) $\log_{10}(x^2)<\log_{10}x<\log_{10}\sqrt{x}$

(3) $\log_2(x^2)<\log_{10}(x^2)<\log_2 x$　　(4) $\log_{10}(x^2)<\log_2\sqrt{x}<\log_{10}x$

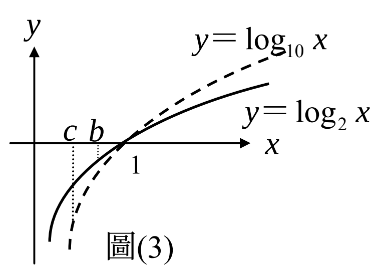
解：(1)如下圖(1)得知 $a=\sqrt{x}>b=x>c=x^2$，即 $\sqrt{x}>x>x^2$，不正確



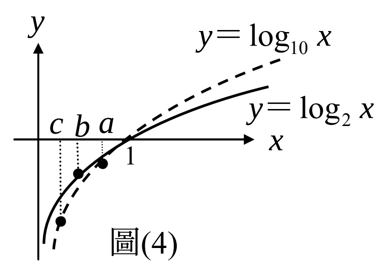
圖(1)



圖(2)



圖(3)



圖(4)

(2)如圖(2)，得知 $\log_{10}(x^2)<\log_{10}x<\log_{10}\sqrt{x}$，正確

(3)如圖(3)，得知 $\log_{10}(x^2)<\log_2(x^2)<\log_2 x$，不正確

(4)如圖(4)，得知 $\log_{10}(x^2)<\log_2\sqrt{x}<\log_{10}x$，正確

答：(2)(4)

55.觀察 2 的次方所形成的等比數列：2，2^2，2^3，2^4，⋯，設其中出現的第一個 13 位數為 2^n，則 n＝______。
($\log_{10}2\approx 0.3010$)(101 數乙 C)

解：∵出現的第一個 13 位數為 2^n，∴得知 $\log 2^n=12+k$，$0\le k<1$，k 為尾數

$\Rightarrow 12\le \log 2^n<13$，$\Rightarrow 12\le n\log 2<13$，$\Rightarrow \dfrac{12}{\log 2}\le n<\dfrac{13}{\log 2}$

$\Rightarrow 39.86\cdots\le n<43.18\cdots$，$n=40$，41，42，43

答：40

56.作某項科學實驗共有三種可結果 A、B、C，其發生的機率分別為 $P_A=\log_2 a$、$P_B=\log_4 a$、$P_C=\log_8 a$；其中 a 為一正數，試問 P_A 為下列哪一個選項？(101 數甲 3)

(1) $\frac{5}{9}$　(2) $\frac{6}{11}$　(3) $\frac{7}{13}$　(4) $\frac{8}{15}$　(5) $\frac{9}{17}$

解：∵ $P_A+P_B+P_C=1$，∴ $\log_2 a+\log_4 a+\log_8 a=\log_2 a+\frac{1}{2}\log_2 a+\frac{1}{3}\log_2 a=1$，$\Rightarrow \log_2 a=\frac{6}{11}$，故 $P_A=\frac{6}{11}$

答：(2)

57.當$(x,\ y)$在直線 $2x+3y=3$ 上變動時，關於 $K=9^x+3^y$ 的敘述，試問下列哪個選項是正確的？(101 數甲 5)

(1) K 有最大值 28，最小值 $6\sqrt{3}$　(2) K 有最大值 28，但沒有最小值
(3) K 沒有最大值，但有最小值 12　(4) K 沒有最大值，但有最小值 $6\sqrt{3}$
(5) K 沒有最大值也沒有最小值

解：根據算幾不等式，$K=9^x+3^y=3^{2x}+3^y\ge 2\sqrt{3^{2x}\cdot 3^y}=2\sqrt{3^{2x+y}}=2\sqrt{3^3}=6\sqrt{3}$

答：(4)

58.令 $a=2.6^{10}-2.6^9$，$b=2.6^{11}-2.6^{10}$，$c=\dfrac{2.6^{11}-2.6^9}{2}$。請選出正確的大小關係。(102 學測 2)

(1) $a>b>c$　(2) $a>c>b$　(3) $b>a>c$　(4) $b>c>a$　(5) $c>b>a$

解：$a=2.6^{10}-2.6^9=2.6^9(2.6-1)=2.6^9\times\underline{1.6}$

$b=2.6^{11}-2.6^{10}=2.6^{10}(2.6-1)=2.6^{10}\times 1.6=2.6^9\times\underline{4.16}$

$c=\dfrac{2.6^{11}-2.6^9}{2}=\dfrac{2.6^9\times(2.6^2-1)}{2}=\dfrac{2.6^9\times 5.76}{2}=2.6^9\times\underline{2.88}$

∴得知 $b>c>a$

答：(4)

59.設 $a>1>b>0$，關於下列不等式，請選出正確的選項。(102 學測 8)

(1) $(-a)^7>(-a)^9$　(2) $b^{-9}>b^{-7}$　(3) $\log_{10}\frac{1}{a}>\log_{10}\frac{1}{b}$　(4) $\log_a 1>\log_b 1$　(5) $\log_a b\ge\log_b a$

解：(1) $(-a)^7=-a^7$，$(-a)^9=-a^9$，$\Rightarrow$∵$a>1$，∴$a^7>a^9$，$\Rightarrow -a^7<-a^9$，即 $(-a)^7>(-a)^9$

(2) $b^{-9}=\dfrac{1}{b^9}$，$b^{-7}=\dfrac{1}{b^7}$，$\Rightarrow$∵$1>b>0$，$b^7<b^9$，∴$\dfrac{1}{b^7}>\dfrac{1}{b^9}$，即 $b^{-9}>b^{-7}$

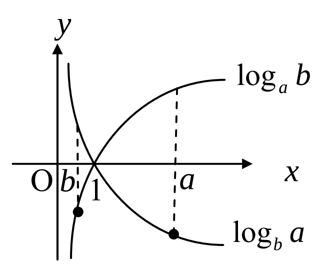
(3) $\log_{10}\dfrac{1}{a}=-\log_{10}a$，$\log_{10}\dfrac{1}{b}=-\log_{10}b$，

$\Rightarrow$∵$a>b$，$\log_{10}a>\log_{10}b$，即 $\log_{10}\dfrac{1}{a}<\log_{10}\dfrac{1}{b}$

(4) $\log_a 1=0$，$\log_b 1=0$，∴$\log_a 1=\log_b 1$

(5)如右圖，當 a，b 與 1 距離不等時，不等式不成立

例：取 $a=2$，$b=\frac{1}{4}$，則 $\log_2\frac{1}{4}=-2<\log_{\frac{1}{4}}2=-\frac{1}{2}$



答：(1)(2)

60.已知 $\log 2 \approx 0.3010$， $\log 3 \approx 0.4771$

(1)請以對數律計算 $\log 1.5$ (不必四捨五入)。(3 分)

(2)請以對數律計算 $\log(1.5)^{60}$ (不必四捨五入)。(3 分)

(3)請問 $(1.5)^{60}$ 的整數部分是幾位數？請說明理由。(3 分)

(4)請問 $(1.5)^{60}$ 的整數部分中，最左邊的數字是幾？請說明理由。(3 分) (102 數乙一)

解：(1) $\log 1.5 = \log\frac{3}{2} = \log 3 - \log 2 \approx 0.4771 - 0.3010 = 0.1761$

(2) $\log(1.5)^{60} = 60\times \log 1.5 = 60\times 0.1761 = 10.566$

(3) $\because \log(1.5)^{60} = 10.566 = 10 + 0.566$， 首數為 10， 得知 $(1.5)^{60}$ 整數部分是 11 位數

(4)尾數＝0.566 且 $\log 3 < 0.566 < \log 4$， 即 $0.566 \approx \log 3.\cdots$， 得知最左邊的數字是 3

答：(1) 0.1761， (2) 10.566， (3) 11， (4) 3

61.坐標平面上，直線 $x=2$ 分別交函數 $y=\log_{10} x$， $y=\log_2 x$ 的圖形於 P、Q 兩點；直線 $x=10$ 分別交函數 $y=\log_{10} x$， $y=\log_2 x$ 的圖形於 R、S 兩點．試問四邊形 PQRS 的面積最接近下列哪一個選項？($\log_{10} 2 \approx 0.3010$)(102 數甲 2)

(1)10　(2)11　(3)12　(4)13　(5)14

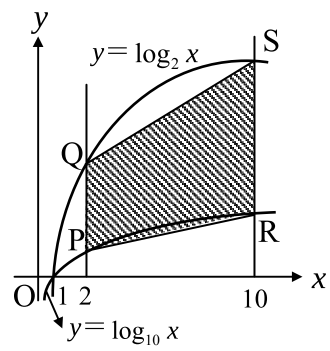
解：根據題意，如右圖斜線區域四邊形 PQRS， $\because \overline{PQ} // \overline{RS}$， $\therefore$ 四邊形 PQRS 為梯形

P(2， $\log_{10} 2$)， Q(2， 1)， R(10， 1)， S(10， $\log_2 10$)

$\Rightarrow \overline{PQ} = 1 - \log_{10} 2$， $\overline{RS} = \log_2 10 - \log_{10} 2$

$\Rightarrow$ PQRS 面積 $= \frac{1}{2}[(1-\log_{10} 2)+(\log_2 10 - 1)]\times 8$

$= 4(\log_2 10 - \log_{10} 2) = 4(\frac{1}{0.3010} - 0.3010) \approx 12.085$



答：(3)

62.請問下列哪一個選項等於 $\log\left(2^{(3^5)}\right)$？(103 學測 1)

(1) $5\log\left(2^3\right)$　(2) $3\times 5\log 2$　(3) $5\log 2\times\log 3$　(4) $5(\log 2\times\log 3)$　(5) $3^5 \log 2$

解：利用性質 $\log a^k = k\log a$， 故 $\log\left(2^{(3^5)}\right) = 3^5 \log 2$

答：(5)

63.坐標平面上滿足 $10^x\cdot 100^y = 1000$ 的所有點(x, y)所形成的圖形為下列哪個選項？(103 指考數乙 1)

(1)一個點　(2)一直線　(3)兩直線　(4)一個二次多項式的函數圖形　(5)一個圓

解： $10^x\cdot 100^y = 1000$， $\Rightarrow 10^x\cdot 10^{2y} = 10^{x+2y} = 10^3$， $\Rightarrow x+2y=3$， 得知圖形為一直線

答：(2)

64.請問指數方程式 $2^{10^x} = 10^6$ 的解 x 最接近下列哪一個選項？（log 2≈0.3010、log3≈0.4771、log7≈0.8451）

(1) 1.1　(2) 1.2　(3) 1.3　(4) 1.4　(5) 1.5

解： $\because \log(2^{10^x}) = \log(10^6)$， $\Rightarrow 10^x(\log 2) = 6$， $\Rightarrow 10^x = \frac{6}{\log 2} \approx 19.93$

又 $\because \log(10^x) \approx \log(19.93) = \log(1.993\times 10^1) = 1 + \log(1.993) \approx 1 + 0.3010 = 1.301$， $\Rightarrow x \approx 1.301$

答：(3)　(103 指考數甲 3)

65.考慮 x， y， z 的方程組 $\begin{cases} 2^x - 3^y + 5^z = -1 \\ 2^{x+1} + 3^y - 5^z = 4 \\ 2^{x+1} + 3^{y+1} + a5^z = 8 \end{cases}$ ， 其中 a 為實數。請選出正確的選項：(103 指考數甲 8)

(1)若(x, y, z)為此方程組的解， 則 $x=0$　(2)若(x, y, z)為此方程組的解， 則 $y>0$

(3)若(x, y, z)為此方程組的解， 則 $y<z$　(4)當 $a\neq 3$ 時， 恰有一組(x, y, z)滿足此方程組

(5)當 $a=-3$ 時，滿足此方程組的所有解$(x,\ y,\ z)$會在一條直線上

解：(1)由$\begin{cases}2^x-3^y+5^z=-1\\2^{x+1}+3^y-5^z=4\end{cases}$相加，得知$2^x+2^{x+1}=3$，$\Rightarrow 3\cdot 2^x=3$，$\therefore 2^x=1$，得 $x=0$

(2)由 $x=0$ 代回$2^x-3^y+5^z=-1$，得$3^y=5^z+2>2>3^0$，$\Rightarrow y>0$

(3)由$3^y=5^z+2$ 中，令 $z=0$ 時，$3^y=3$，得 $y=1$，$\Rightarrow y>z$

(4)由 $x=0$ 代回方程組，得$\begin{cases}3^y-5^z=2\\3\cdot 3^y+a\,5^z=6\end{cases}$，得$(a+3)\,5^z=0$，則當 $a\neq 3$ 時，$5^z=0$，z 為無解

(5)當 $a=-3$ 時，$3^y-5^z=2$，但已知其解為 $x=0$，$y>0$，$\therefore(x,\ y,\ z)$在 yz 平面上

答：(1)(2)