第十三單元　矩陣

1.設 A、B、C 皆為 3×3 矩陣，則下列敘述那些正確的？(86 自然)

(1) AB＝BA 恆成立　(2) (AB)C＝A (BC)　(3)若 AB＝O，則 A＝O 或 B＝O

(4)若 det(A)≠0，且 AB＝AC，則 B＝C　(5) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 成立

解：(1)矩陣的乘法不具交換性，∴AB≠BA

(2)矩陣的乘法具結合性，∴(AB)C＝A (BC)

(3)例如 $AB=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=$，但是 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\neq O$，$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\neq O$

(4)若 det(A)≠0，則 A^{-1} 存在

$\Rightarrow A^{-1}(AB)=A^{-1}(AC)$，∴B＝C

(5)∵AB≠BA，∴$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2\neq A^2+2AB+B^2$

答：(2)(4)

2.下列各方陣中何者之秩為 2？(88 自然)

(1) $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\0&0&0\end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&2\end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{bmatrix}$　(5) $\begin{bmatrix}1&2&3\\1&4&9\\1&8&27\end{bmatrix}$

解：(1) $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，∴秩＝1

(2) $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，∴秩＝1

(3) $\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$，∴秩＝3

(4) $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$，∴秩＝2

(5) $\begin{bmatrix}1&2&3\\1&4&9\\1&8&27\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&2&6\\0&0&6\end{bmatrix}$，∴秩＝3

答：(4)

3.有一 4 階方陣，其中每一$(i,\ j)$元不是 0 就是 1，則其秩可能是：(89 自然)

(1) 0　(2) 1　(3) 2　(4) 3　(5) 4

解：4 階方陣的秩可能是 0 或 1 或 2 或 3 或 4

答：(1)(2)(3)(4)(5)

4.設 M 為一 3×2 矩陣，而且 $M\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\2&0\\1&0\end{bmatrix}$，$M\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&2\\0&3\end{bmatrix}$，則 $M\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=$________。(90 自然 4)

解 1：∵M 為一 3×2 矩陣，∴設 $M=\begin{bmatrix}a&d\\b&e\\c&f\end{bmatrix}$，又∵$M\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+M\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=M\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}3&0\\2&0\\1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\0&2\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&d\\b&e\\c&f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$，$\Rightarrow\begin{bmatrix}3&1\\2&2\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d&a\\e&b\\f&c\end{bmatrix}$，∴得知 $M=\begin{bmatrix}a&d\\b&e\\c&f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\2&2\\3&1\end{bmatrix}$

解 2：∵M 為一 3×2 矩陣，∴設 M $=\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$

(1)∵ $M\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，∴$a=3$，$b=2$，$c=1$

(2)∵ $M\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & d \\ 0 & e \\ 0 & f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$，∴$d=1$，$e=2$，$f=3$

(3)得知 M $=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$，∴ $M\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

答：$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

5.所謂「轉移矩陣」必須滿足下列兩個條件：(91 指考數甲 3)

(甲)該矩陣的每一個位置都是一個非負的實數　　(乙)該矩陣的每一行的數字相加都等於 1

以 2×2 矩陣為例，$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.8 & 0.7 \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} 0.9 & 0.6 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$滿足(甲)(乙)這兩個條件，因此都是轉移矩陣。

今設 A、B 是兩個 $n\times n$ 的轉移矩陣，請問下列哪些敘述是正確的？

(1) A^2是轉移矩陣　(2) AB 不滿足條件(乙)　(3) $\frac{1}{2}(A+B)$是轉移矩陣　(4) $\frac{1}{4}(A^2+B^2)$是轉移矩陣

解：設 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$與 $B=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$皆為 2×2 的轉移矩陣，∴$a+c=b+d=1$，$e+g=f+h=1$

(1) $A^2=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix}$是轉移矩陣，理由如下：

第 1 行：$a^2+bc+ac+cd=(a^2+ac)+(bc+cd)=a(a+c)+c(b+d)=a\times 1+c\times 1=1$

第 2 行：$ab+bd+bc+d^2=(ab+bd)+(bc+bc)=b(a+d)+c(b+d)=b\times 1+c\times 1=1$

(2) $AB=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$是轉移矩陣，理由如下：

第 1 行：$ae+bg+ce+dg=(ae+ce)+(bg+dg)=e(a+c)+g(b+d)=e\times 1+g\times 1=1$

第 2 行：$af+bh+cf+dh=(af+cf)+(bh+dh)=f(a+c)+h(b+d)=f\times 1+h\times 1=1$

(3) $\frac{1}{2}(A+B)=\frac{1}{2}(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix})=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$是轉移矩陣，理由如下：

第 1 行：$\frac{1}{2}(a+e+c+g)=\frac{1}{2}[(a+c)+(e+g)]=\frac{1}{2}(1+1)=1$

第 2 行：$\frac{1}{2}(b+f+d+h)=\frac{1}{2}[(b+d)+(f+h)]=\frac{1}{2}(1+1)=1$

(4)∵ $A^2=\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix}$，$B^2=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^2+fg & ef+fh \\ eg+gh & gf+h^2 \end{bmatrix}$

$\frac{1}{4}(A^2+B^2)=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} a^2+bc+e^2+fg & ab+bd+ef+fh \\ ac+cd+eg+gh & bc+d^2+gf+h^2 \end{bmatrix}$不是轉移矩陣，

∵第 1 行：$\frac{1}{4}(a^2+bc+e^2+fg+ac+cd+eg+gh)=\frac{1}{2}\neq 1$

答：(1)(3)

6.某國政府長期追蹤全國國民的經濟狀況，依訂定的標準將國民分為高收入和低收入兩類。統計發現高收入的人口一直是低收入人口的兩倍，且知在高收入的人口中，每年有四成會轉變為低收入。請問在低收入的人口中，每年有幾成會轉變為高收入？請選出正確的選項。(1) 6 成　(2) 7 成　(3) 8 成　(4) 9 成　(98 指考數甲 2)

解：設低收入的人口中，每年有 $t\ (0\le t\le 1)$轉變為高收入，則轉移矩陣為 $A=\begin{bmatrix}0.6 & t\\ 0.4 & 1-t\end{bmatrix}$

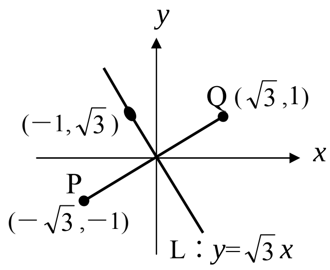
又設 $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$，$\because x+y=1$ 且 $x=2y$，$\therefore \begin{cases}x=\frac{2}{3}\\ y=\frac{1}{3}\end{cases}$，$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$由 $AX=X$，得 $\begin{bmatrix}0.6 & t\\ 0.4 & 1-t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}$，即$\frac{2}{5}+\frac{1}{3}t=\frac{2}{3}$，知 $t=0.8$

答：(3)

7.A 和 B 是兩個二階方陣，方陣中每一位置的元素都是實數。就二階方陣所對應的平面變換來說，A 在平面上的作用是對直線 L：$y+\sqrt{3}x=0$ 的鏡射，且知 $AB=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$。請選出正確的選項。(說明：A 將 P 點對應到 Q 點，則 L 為線段$\overline{PQ}$的垂直平分線) (92 指考數甲多選 1)

(1) AB＝BA　　(2) A＋B＝0　　(3) B 所對應的平面變換是旋轉　　(4)－A 是 B 的(乘法)反方陣



解：(1)設 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，$\therefore \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-a+\sqrt{3}b=-1\\ -c+\sqrt{3}d=\sqrt{3}\end{cases}$ …(*)

(2)如右圖，A 將點 P($-\sqrt{3}$，－1)對應到點 Q($\sqrt{3}$，1)

$\Rightarrow\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\sqrt{3}\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{3}a-b=\sqrt{3}\\ -\sqrt{3}c-d=1\end{cases}$ …(**)

由(*)與(**)，解得 $a=-\frac{1}{2}$，$b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$c=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$d=\frac{1}{2}$，$\therefore A=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

(3)$\because AB=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，$\therefore B=A^{-1}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$\Rightarrow BA=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=AB$

(4) $A+B=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=O$

(5) $B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 60^0 & \sin 60^0\\ \sin 60^0 & -\cos 60^0\end{bmatrix}$不是旋轉矩陣

(6)$(-A)B=(-1)\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$\therefore(-A)$是 B 的反矩陣

答：(1)(2)(4)

8.彩票公司每天開獎一次，從 1、2、3 三個號碼中隨機開出一個。開獎時，如果開出的號碼和前一天相同，就要重開，直到開出與前一天不同的號碼為止。如果在第一天開出的號碼是 3，則在第五天開出號碼同樣是 3 的機率是_____(以最簡分數表示）(92 指考數甲填 2)

解：1.根據題意，其轉移矩陣為 $P=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$

設 A_n 為第 n 天開出號碼的機率矩陣，又第一天開出的號碼是 3，$\therefore A_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

2. $A_2=PA_1=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix}$，$A_3=PA_2=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，同理 $A_4=PA_3=\begin{bmatrix}\frac{3}{8}\\ \frac{3}{8}\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix}$，$A_5=PA_4=\begin{bmatrix}\frac{5}{16}\\ \frac{5}{16}\\ \frac{3}{8}\end{bmatrix}$

$\therefore$第 5 天開出號碼同樣是 3 的機率為 $\frac{3}{8}$

答：$\frac{3}{8}$

9.(題組)使用圓球和球袋作機率實驗。球只有黑白兩色，袋中裝有兩顆球，因此只有三種可能情況：把雙白球稱為狀態 1，一白球一黑球稱為狀態 2，雙黑球稱為狀態 3。對這袋球做如下操作：自袋中隨機移走一球後，再隨機移入一顆白球或黑球(移入白球或黑球的機率相等)。每次操作可能會改變袋中球的狀態。(93 指考甲 6，7，8)

A.如果現在袋子內的球是一白一黑(即狀態 2)，請問經過一次操作後，袋中會變成兩顆黑球(狀態 3)的機率是多少？(單選)

(1) $\frac{1}{4}$　(2) $\frac{1}{3}$　(3) $\frac{1}{2}$　(4) $\frac{2}{3}$

B.把從狀態 j 經過一次操作後會變成狀態 i 的機率記為 P_{ij}(例如上題的機率就是 P_{32})，由此構成一 3×3 矩陣 P。針對矩陣 P，下列選項有哪些是正確的？(多選題)

(1)矩陣 P 滿足 $P_{ij}=P_{ji}$　(2) P 是轉移矩陣(即每行之和皆為 1)　(3) P 的行列式值為正　(4) $P_{11}=P_{33}$

C.把矩陣 P 連續自乘 k 次後的矩陣記為 P^k。已知矩陣 P^k 中(i, j)位置的值，等於從狀態 j 經過 k 次操作後，變成狀態 i 的機率。針對多次操作，下列選項有哪些是正確的？(多選題)

(1)從一白一黑(狀態 2)開始，經過 k 次操作後，變成雙白(狀態 1)的機率與變成雙黑(狀態 3)的機率相等。

(2)從雙白(狀態 1)開始，經過 k 次操作後，回到雙白(狀態 1)的機率，比變成雙黑(狀態 3)的機率大。

(3)從雙白(狀態 1)開始，經過 k 次操作後，回到雙白(狀態 1)的機率，會隨著次數 k 的增加而遞減。

(4)不論從哪種狀態開始，經過 k 次操作後，變成任何一種狀態的機率，會隨著 k 趨近於無窮大而趨近於 $\frac{1}{3}$

解 A：(一白一黑) → 兩黑：即取出一顆白球，移入一顆黑球，$\because$機率$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

答：(1)

解 B：操作前後的狀態與機率如下表：

後＼前	2 白	1 白 1 黑	2 黑
2 白	取出白，移入白 $P_{11}=\frac{2}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$	取出黑，移入白 $P_{12}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$	不可能 $P_{13}=0$
1 白 1 黑	取出白，移入黑 $P_{21}=\frac{2}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$	取出黑，移入白 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 取出白，移入黑 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ $P_{22}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$	取出黑，移入白 $P_{23}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$
2 黑	不可能 $P_{31}=0$	取出白，移入黑 $P_{32}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$	取出黑，移入黑 $P_{33}=\frac{2}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
合計	1	1	1

$\therefore$矩陣 $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

(1) P_{ij} 與 P_{ji} 未完全相等，如 $P_{12}\neq P_{21}$

(2)det(P)$=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=0$

(3) $P_{11}=P_{33}=\frac{1}{2}$

答：(2)(4)

解 C：(1) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2白\\1黑1白\\2黑\end{bmatrix}$，$\therefore$P(2 白)$=\frac{1}{4}=$P(2 黑)

$\Rightarrow\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix}$，$\therefore$P(2 白)$=\frac{1}{4}=$P(2 黑)

$\Rightarrow\cdots\quad\Rightarrow\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^k\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix}$，$\therefore$P(2 白)$=\frac{1}{4}=$P(2 黑)

(2) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2白\\1黑1白\\2黑\end{bmatrix}$，$\therefore$P(2 白)$=\frac{1}{2}$，P(2 黑)$=0$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{8}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{8}\end{bmatrix}$，$\therefore$P(2 白)$=\frac{3}{8}$，P(2 黑)$=\frac{1}{8}$

$\Rightarrow\cdots\quad\Rightarrow$ P(2 白)$>$P(2 黑)

(3)由(2)得知 P(2 白)：$\frac{1}{2}>\frac{3}{8}>\cdots\cdots$

(4)由(1)得知，若由 1 白 1 黑開始，則經 $k\to\infty$ 時，P(2 白)$=\frac{1}{4}=$P(2 黑)

答：(1)(2)(3)

10.A 是 2×2 方陣，設 $A^2=A．A$，$A^3=A．A．A$，以此類推。已知 $A．\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，$A．\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$，若有 a，b 使得 $A^4．\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$，下列敘述何者正確？(94 指考甲 8)

(1) $a=-3$ (2) $b=2$ (3) $A^2\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ (4) A 是一旋轉方陣

解：(1)由 $A\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$與 $A\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$，得 $A\cdot\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 90^\circ&-\sin 90^\circ\\\sin 90^\circ&\cos 90^\circ\end{bmatrix}$，為一旋轉方陣

(2)故 $A^2=\begin{bmatrix}\cos 180^\circ&-\sin 180^\circ\\\sin 180^\circ&\cos 180^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$；$A^4=\begin{bmatrix}\cos 360^\circ&-\sin 360^\circ\\\sin 360^\circ&\cos 360^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\because A^4\cdot\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$，得知$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$

答：(2)(3)(4)

11.一實驗室培養兩種菌，令$\langle a_n\rangle$和$\langle b_n\rangle$分別代表兩種培養菌在時間點 n 的數量，彼此有如下的關係：

$a_{n+1}=2(a_n+b_n)$，$b_{n+1}=2b_n$，$n=0, 1, 2, \cdots$，若二階方陣 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$滿足$\begin{bmatrix}a_{n+3}\\b_{n+3}\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}$，$n=0, 1, 2, \cdots$，

則 $a=$____，$b=$____，$c=$____，$d=$____。(94 指考乙 E)

解 1：$\because a_{n+1}=2(a_n+b_n)$，$b_{n+1}=2b_n$，$\therefore\begin{bmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}a_{n+2}\\b_{n+2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}a_{n+3}\\b_{n+3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{n+2}\\b_{n+2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&24\\0&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}$

得知 $A=\begin{bmatrix}8&24\\0&8\end{bmatrix}$，$\therefore a=8$，$b=24$，$c=0$，$d=8$

解 2：$\because a_{n+1}=2(a_n+b_n)$，$b_{n+1}=2b_n$，

$\Rightarrow a_{n+2}=2(a_{n+1}+b_{n+1})=2[2(a_n+b_n)+2b_n]=4a_n+8b_n$，$b_{n+2}=2b_{n+1}=4b_n$

$\Rightarrow a_{n+3}=2(a_{n+2}+b_{n+2})=2(4a_n+8b_n+4b_n)=4a_n+24b_n$，$b_{n+3}=2b_{n+2}=8b_n$

$\therefore\begin{bmatrix}a_{n+3}\\b_{n+3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&24\\0&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}$

答：$(a, b, c, d)=(8, 24, 0, 8)$

12.設實係數二階方陣A滿足$A\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}9\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$。若$A=\begin{bmatrix}2&1\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}$，則$a=$____，$b=$____，$c=$____，$d=$____。

解：由 $A\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}9\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$，得知 $A\begin{bmatrix}7&9\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&5\end{bmatrix}$，$\Rightarrow\begin{bmatrix}2&1\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&9\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&5\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&1\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&9\\3&4\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&9\\3&4\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}4&-9\\-3&7\end{bmatrix}$

($\because\det\begin{vmatrix}2&1\\1&5\end{vmatrix}=9\neq 0$，$\therefore$為一可逆矩陣，$\begin{bmatrix}2&1\\1&5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&1\\1&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$)

答：$a=4$，$b=-3$，$c=-9$，$d=7$。(95 指考甲 C)

13.下列哪些選項中的矩陣經過一系列的列運算後可以化成$\begin{bmatrix}1&2&3&7\\0&1&1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$？(96 學測 8)

(1)$\begin{bmatrix}1&2&3&7\\0&1&1&2\\0&2&3&5\end{bmatrix}$　(2)$\begin{bmatrix}-1&3&-1&0\\-1&1&1&0\\3&1&-7&0\end{bmatrix}$　(3)$\begin{bmatrix}1&1&2&5\\1&-1&1&2\\1&1&2&5\end{bmatrix}$　(4)$\begin{bmatrix}2&1&3&6\\-1&1&1&0\\-2&2&2&1\end{bmatrix}$　(5)$\begin{bmatrix}1&3&2&7\\0&1&1&2\\0&1&0&1\end{bmatrix}$

解 1：根據題意, $\begin{bmatrix}1&2&3&7\\0&1&1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$對應的方程組為$\begin{cases}x+2y+3z=7\\ \quad y+z=2\\ \quad z=1\end{cases}$, 解得$\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}$

(1)$\begin{bmatrix}1&2&3&7\\0&1&1&2\\0&2&3&5\end{bmatrix}$對應的方程組為$\begin{cases}x+2y+3z=7\\ \quad y+z=2\\ \quad 2y+3z=5\end{cases}$, 將$\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}$代入, ∴正確

(2)$\begin{bmatrix}-1&3&-1&0\\-1&1&1&0\\3&1&-7&0\end{bmatrix}$對應的方程組為$\begin{cases}-x+3y-z=0\\-x+y+z=0\\3x+y-7z=0\end{cases}$, 將$\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}$代入, ∴不正確

(3)$\begin{bmatrix}1&1&2&5\\1&-1&1&2\\1&1&2&5\end{bmatrix}$對應的方程組為$\begin{cases}x+y+2z=5\\x-y+z=2\\x+y+2z=5\end{cases}$, 將$\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}$代入, ∴不正確

(4)$\begin{bmatrix}2&1&3&6\\-1&1&1&0\\-2&2&2&1\end{bmatrix}$對應的方程組為$\begin{cases}2x+y+3z=6\\-x+y+z=0\\-2x+2y+2z=1\end{cases}$, 將$\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}$代入, ∴不正確

(5)$\begin{bmatrix}1&3&2&7\\0&1&1&2\\0&1&0&1\end{bmatrix}$對應的方程組為$\begin{cases}x+3y+2z=7\\ \quad y+z=2\\ \quad y \quad =1\end{cases}$, 將$\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}$代入, ∴正確

解 2：根據題意, $\begin{bmatrix}1&2&3&7\\0&1&1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$對應的方程組為$\begin{cases}x+2y+3z=7\\ \quad y+z=2\\ \quad z=1\end{cases}$, 解得$\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}$ (1 解)

(1)$\begin{bmatrix}1&2&3&7\\0&1&1&2\\0&2&3&5\end{bmatrix}\times(-2)\Rightarrow\begin{bmatrix}1&2&3&7\\0&1&1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$, ∴正確

(2)$\begin{bmatrix}-1&3&-1&0\\-1&1&1&0\\3&1&-7&0\end{bmatrix}$對應的方程組為$\begin{cases}-x+3y-z=0\\-x+y+z=0\\3x+y-7z=0\end{cases}$, 必有$\begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\end{cases}$解, ∴不正確

(3)$\begin{bmatrix}1&1&2&5\\1&-1&1&2\\1&1&2&5\end{bmatrix}$對應的方程組為$\begin{cases}x+y+2z=5\\x-y+z=2\\x+y+2z=5\end{cases}$, 1, 3 列成比例, 為無限多解, ∴不正確

(4)$\begin{bmatrix}2&1&3&6\\-1&1&1&0\\-2&2&2&1\end{bmatrix}$對應的方程組為$\begin{cases}2x+y+3z=6\\-x+y+z=0\\-2x+2y+2z=1\end{cases}$, 1, 3 列不成比例, ∴無解, ∴不正確

(5)$\begin{bmatrix}1&3&2&7\\0&1&1&2\\0&1&0&1\end{bmatrix}$對應的方程組為$\begin{cases}x+3y+2z=7\\ \quad y+z=2\\ \quad y \quad =1\end{cases}$, 解得$\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}$, ∴正確

解 3：利用矩陣列運算比較之。

答：(1)(5)

14.有關矩陣 A＝$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$與矩陣 B＝$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，試問下列哪些選項是正確的？(96 指考數甲 7)

(1)AB＝BA　(2)$A^2B=BA^2$　(3)$A^{11}B^3=B^6A^5$　(4)$AB^{12}=A^7$　(5)$(ABA)^{15}=AB^{15}A$

解：(1)$AB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，而 $BA=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，$\Rightarrow AB\neq BA$

(2)$A^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$，$\Rightarrow A^2B=B$，而 $BA^2=BI=B$，$\Rightarrow A^2B=BA^2$

(3)$\because B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 60^0 & -\sin 60^0\\ \sin 60^0 & \cos 60^0\end{bmatrix}$，$\Rightarrow B^3=\begin{bmatrix}\cos 180^0 & -\sin 180^0\\ \sin 180^0 & \cos 180^0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=-I$，且 $B^6=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$

$\Rightarrow A^{11}B^3=(A^2)^5A\,B^3=A(-I)=-A$，而 $B^6A^5=I(A^2)^2A=A$，$\Rightarrow A^{11}B^3=-A\neq B^6A^5=A$

(4)$AB^{12}=A(B^2)^6=AI=A$，而 $A^7=(A^2)^3A=A$，$\Rightarrow AB^{12}=A^7=A$

(5)$(ABA)^{15}=\underbrace{(ABA)(ABA)\cdots(ABA)}_{15個}=ABA^2\,BA^2\cdots A^2\,BA=ABB\cdots BA=AB^{15}A$

答：(2)(4)(5)

15.下面每一個選項都是以行列式表達坐標平面上的方式，請問哪些選項代表橢圓？(96 指考乙 5)

(1) $\begin{vmatrix}x & y & x\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$　(2) $\begin{vmatrix}x^2 & 2y^2 & x\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$　(3) $\begin{vmatrix}x^2 & y^2 & 2x\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$

(4) $\begin{vmatrix}x^2+y^2 & y & x^2\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$　(5) $\begin{vmatrix}x^2-y^2 & y & x\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$

解：上述選項的行列式之一般式為 $\begin{vmatrix}a & b & c\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$，展開得 $a+2b-5c=0$

(1) $x+2y-5x=0$，$\Rightarrow 2x-y=0$ 表示一直線方程式
(2) $x^2+4y^2-5x=0$ 表示一橢圓方程式
(3) $x^2+2y^2-10x=0$ 表示一橢圓方程式
(4) $(x^2+y^2)+2y-5x^2=0\Rightarrow\ -4x^2+y^2+2y=0$ 表示一雙曲線方程式
(5) $x^2-y^2+2y-5x=0$ 表示一雙曲線方程式

答：(2)(3)

16.解下列聯立方程式時，$\begin{cases}x+2y=3\\ 4x-5y=-1\end{cases}$將相關的係數與常數以矩陣 A 表達如下：$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -5 & -1\end{bmatrix}$，對矩陣 A 進行高斯消去法的一個步驟：第一列不改變，並將第二列減去第一列的四倍成為新的第二列。試問下列哪一個選項中的矩陣乘積代表對 A 進行上述步驟？(97 指考乙 3)

(1)$\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -5 & -1\end{bmatrix}$　(2)$\begin{bmatrix}0 & 0\\ -4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -5 & -1\end{bmatrix}$　(3)$\begin{bmatrix}1 & 0\\ -4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -5 & -1\end{bmatrix}$

(4)$\begin{bmatrix}0 & 0\\ -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -5 & -1\end{bmatrix}$　(5)$\begin{bmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -5 & -1\end{bmatrix}$

解 1：$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4-1\times4 & -5-2\times4 & -1-3\times4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -4\times1+1\times4 & -4\times2+1\times5 & -4\times3+1\times(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -5 & -1\end{bmatrix}$＝(5)

解 2：$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -5 & -1\end{bmatrix}_{(-4)}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -13 & -13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -5 & -1\end{bmatrix}$＝(5)

答：(5)

17.從集合$\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & c\end{bmatrix} \mid a, b, c\text{ 為 }0, 1, 2\text{ 或 }3\right\}$中隨機抽取一個矩陣，其行列式為 0 的機率等於_____。(化為最簡分數)

解：(1)樣本空間 $n(S)=n(0,\ 1,\ 2,\ 3$ 任取一數為 $a,\ b,\ c)=4\times4\times4=64$

(2)令 A＝$\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & c\end{bmatrix}$，det (A)＝$\begin{vmatrix}a & b\\ 0 & c\end{vmatrix}=ac=0$，$\Rightarrow a=0$ 或 $c=0$

∴事件為「$a=0$ 或 $c=0$，b 為(0，1，2，3)任一數」

(i) $a=0$ 時，a，b，c 排列數有 $1\times4\times3=12$

(ii) $c=0$ 時，a，b，c 排列數有 $3\times4\times1=12$

(iii) $a=c=0$ 時，a，b，c 排列數有 $1\times4\times1=4$，則 n(事件)＝12＋12＋4＝28

由(1)(2)得知所求的機率＝$\dfrac{28}{64}=\dfrac{7}{16}$

答：$\dfrac{7}{16}$ (97 指考數乙 B)

18.設 a，b，c 為實數，下列有關線性方程組$\begin{cases}x+2y+az=1\\ 3x+4y+bz=-1\\ 2x+10y+7z=c\end{cases}$的敘述哪些是正確的？(98 學測 10)

(1)若此線性方程組有解，則必定恰有一組解
(2)若此線性方程組有解，則 $11a-3b\neq7$
(3)若此線性方程組有解，則 $c=14$
(4)若此線性方程組無解，則 $11a-3b=7$
(5)若此線性方程組無解，則 $c\neq14$

解 1：(1)∵方程組的方程式均為空間中的平面，∴令 E_1：$x+2y+az=1$，E_2：$3x+4y+bz=-1$，E_3：$2x+10y+7z=c$
⇒若方程組有解，可能有一組解、無限多組解、無解

(2)∵$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & a\\ 3 & 4 & b\\ 2 & 10 & 7\end{vmatrix}=22a-6b-14$，則

(i)若方程組有一組解時，$\Delta=22a-6b-14\neq0$，∴$11a-3b\neq7$
(ii)若方程組有無限多組解、無解時，$\Delta=22a-6b-14=0$，∴$11a-3b=7$

(3) (i)若方程組有一組解，$\Delta=22a-6b-14\neq0$，∴$11a-3b\neq7$

(ii)若方程組有無限多組解，則$\Delta_z=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & -1\\ 2 & 10 & c\end{vmatrix}=28-2c=0$，∴$c=14$

(4)由(2)知方程組有無解時，$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & a\\ 3 & 4 & b\\ 2 & 10 & 7\end{vmatrix}=22a-6b-14=0$，∴$11a-3b=7$

(5)若方程組有無限多組解時，$\Delta_z=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & -1\\ 2 & 10 & c\end{vmatrix}=28-2c=0$，∴$c=14$

解 2：利用增廣矩陣列運算

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&a&1\\3&4&b&-1\\2&10&7&c\end{array}\right]\begin{array}{l}\\-3\\-2\end{array}\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&a&1\\0&-2&b-3a&-4\\0&6&7-2a&c-2\end{array}\right]\begin{array}{l}\\\\3\end{array}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&a&1\\0&-2&b-3a&-4\\0&0&7-11a+3b&c-14\end{bmatrix}$$

(1)若方程組有解，可能有一組解、無限多組解、無解

(2)若方程組有解，則

(i)有一組解時，則 $7-11a+3b\neq0$，$\therefore 11a-3b\neq7$

(ii)無限多組解時，則 $7-11a+3b=0$，且 $c-14=0$，$\therefore 11a-3b=7$ 且 $c=14$

(3)若方程組無解，則 $7-11a+3b=0$，且 $c-14\neq0$，$\therefore 11a-3b=7$ 且 $c\neq14$

答：(4)(5)

19.對矩陣$\begin{bmatrix}4&9&a\\3&7&b\end{bmatrix}$作列運算若干次後得到$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$，則$(a,b)=$_____　(98 指考數甲 B)

解 1：增廣矩陣$\begin{bmatrix}4&9&a\\3&7&b\end{bmatrix}$所代表的方程組$\begin{cases}4x+9y=a\\3x+7y=b\end{cases}$，而列運算得解之增廣矩陣$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$代表的解為$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

$\Rightarrow$代入方程組得$\begin{cases}a=13\\b=10\end{cases}$

解 2：利用增廣矩陣的列運算

$$\begin{bmatrix}4&9&a\\3&7&b\end{bmatrix}\times\tfrac{1}{4}\rightarrow\begin{bmatrix}1&\frac{9}{4}&\frac{a}{4}\\3&7&b\end{bmatrix}\times(-3)\rightarrow\begin{bmatrix}1&\frac{9}{4}&\frac{a}{4}\\0&\frac{1}{4}&b-\frac{3a}{4}\end{bmatrix}\times4\rightarrow\begin{bmatrix}1&\frac{9}{4}&\frac{a}{4}\\0&1&4b-3a\end{bmatrix}\times(\tfrac{-9}{4})\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&-9b+7a\\0&1&4b-3a\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow\begin{cases}7a-9b=1\\-3a+4b=1\end{cases}$，得$\begin{cases}a=13\\b=10\end{cases}$

答：(13，10)

20.設有 A、B 兩支大瓶子，開始時，A 瓶裝有 a 公升的純酒精，B 瓶裝有 b 公升的礦泉水。每一輪操作都是先將 A 瓶的溶液倒出一半到 B 瓶，然後再將 B 瓶的溶液倒出一半回 A 瓶，(不考慮酒精與水混合後體積的縮小)。設 n 輪操作後，A 瓶有 a_n 公升的溶液，B 瓶有 b_n 公升的溶液。已知二階方陣$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$滿足$\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$。(98 指考數乙二)

(1)求二階方陣$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$

(2)當 $a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{1}{3}$時，求 a_{100} 及 b_{100}

(3)當 $a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{1}{3}$時，在第二輪操作後，A 瓶溶液中有百分之多少的酒精？

解：(1)設原來 $a=a_1$，$b=b_1$

第 1 輪：$a_2=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}(b+\frac{1}{2}a)=\frac{3}{4}a+\frac{1}{2}b$　　　$b_2=\frac{1}{2}(b+\frac{1}{2}a)=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}a_2\\b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$，$\therefore$得知$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

(2)當 $a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{1}{3}$時，$a_2=\frac{3}{4}a+\frac{1}{2}b=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$b_2=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$，得知 $a_{100}=\frac{2}{3}$；$b_{100}=\frac{1}{3}$

(3)$\because$第二輪$\begin{bmatrix}a_3\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{11}{16}&\frac{5}{8}\\\frac{5}{16}&\frac{3}{8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

$\therefore$A 瓶溶液有$\frac{2}{3}$公升，其中含酒精$\frac{11}{16}\times\frac{2}{3}=\frac{11}{24}$，酒精佔有$\dfrac{\frac{11}{24}}{\frac{2}{3}}\times 100\%=\frac{11}{16}\times 100\%=68.75\%$

答：(1)$\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$；(2) $a_{100}=\frac{2}{3}$；$b_{100}=\frac{1}{3}$ (3)68.75%

21.已知 a，b 為整數且行列式$\begin{vmatrix}5 & a\\ b & 7\end{vmatrix}=4$，則絕對值$|a+b|$為何？(99 學測 2)

(1) 16　(2) 31　(3) 32　(4) 39　(5)條件不足，無法確定

解：$\because\begin{vmatrix}5 & a\\ b & 7\end{vmatrix}=35-ab=4$，$\therefore ab=31$，又 a，b 為整數，得知$\begin{cases}a=1\\ b=31\end{cases}$或$\begin{cases}a=31\\ b=1\end{cases}$或$\begin{cases}a=-1\\ b=-31\end{cases}$或$\begin{cases}a=-31\\ b=-1\end{cases}$，則$|a+b|=32$

答：(3)

22.設實數 $a>0$。若 x、y 的方程組$\begin{cases}2x-y=1\\ x-2y=a\\ x-ay=122\end{cases}$有解，則 $a=$ ________。(99 學測 D)

解：$\begin{cases}2x-y=1\\ x-2y=a\\ x-ay=122\end{cases}$有解，即$\begin{cases}2x-y-1=0\\ x-2y-a=0\\ x-ay-122=0\end{cases}$有解，條件為行列式$\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & -2 & -a\\ 1 & -a & -122\end{vmatrix}=0$

$\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & -2 & -a\\ 1 & -a & -122\end{vmatrix}=-2a^2+2a+364=0$，除以 2 得 $a^2-a-182=0$，分解為$(a-14)(a+13)=0$，$\therefore a=14$ 或-13(不合)

答：14

補充解：利用降階求三階行列式之方法

$\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & -2 & -a\\ 1 & -a & -122\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}2 & 2 & 2\\ 1 & 4 & 2a\\ 1 & 2a & 244\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 2a-1\\ 1 & 2a-1 & 243\end{vmatrix}=3^6-(2a-1)^2=0$

$\therefore 2a-1=27$，得 $a=14$

23.考慮矩陣 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & -a\end{bmatrix}$，其中 a，b，c 為實數且行列式 $\det A=1$。試問行列式 $\det(A-A^{-1})$之值為下列哪一個選項？

(1) 0　(2) 1　(3) 2　(4) 4　(5) 16　(99 指考數甲 3)

解：$\because\det A=\begin{vmatrix}a & b\\ c & -a\end{vmatrix}=1$，又 $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix}-a & -b\\ -c & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$，$\therefore A-A^{-1}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & -a\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-a & -b\\ -c & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a & 2b\\ 2c & -2a\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\det(A-A^{-1})=\begin{vmatrix}2a & 2b\\ 2c & -2a\end{vmatrix}=2\times 2\begin{vmatrix}a & b\\ c & -a\end{vmatrix}=4\det A=4\times 1=4$

答：(4)

24.設實係數二階方陣 A 滿足 $A\begin{bmatrix}7\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}9\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 5\end{bmatrix}$，若 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}$，則 $a=$___，$b=$___，$c=$___，$d=$___

解：根據題意，$A\begin{bmatrix}7 & 9\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix}$，$\therefore A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 9\\ 3 & 4\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -9\\ -3 & 7\end{bmatrix}$，$\Rightarrow a=4$，$b=-3$，$c=-9$，$d=7$

答：$a=4$，$b=-3$，$c=-9$，$d=7$　(99 指考數甲 C)

25.設 $A=\begin{bmatrix}4 & a\\ 9 & b\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}6 & 7\\ c & d\end{bmatrix}$。已知 $AB=\begin{bmatrix}3 & 10\\ -2 & 15\end{bmatrix}$且 A 的行列式之值為 2，試問下列哪些選項是正確的？

(1) $9a-4b=-2$　(2) $ac=-24$　(3) $d=-15$　(4)$\begin{bmatrix}b & -a\\ -9 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & a\\ 9 & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$　(100 指考數甲 5)

解：(1)∵$\det A=\begin{vmatrix}4 & a\\ 9 & b\end{vmatrix}=2$，⇒$4b-9a=2$，即 $9a-4b=-2$

(2)(3)$AB=\begin{bmatrix}4 & a\\ 9 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 7\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24+ac & 28+ad\\ 54+bc & 63+bd\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 10\\ -2 & 15\end{bmatrix}$，$\Rightarrow\begin{cases}24+ac=3\\ 28+ad=10\\ 54+bc=-2\\ 63+bd=15\end{cases}$，$\Rightarrow\begin{cases}ac=-21 & \cdots(1)\\ ad=-18 & \cdots(2)\\ bc=-56 & \cdots(3)\\ bd=-48 & \cdots(4)\end{cases}$

由 $\frac{(1)}{(3)}=\frac{a}{b}=\frac{3}{8}$，得 $a=\frac{3}{8}b$，代入 $9a-4b=-2$，⇒$b=\frac{16}{5}$，$a=\frac{6}{5}$，代回(1)，得 $c=\frac{-35}{2}$，代回(2)，得 $d=-15$

(4)解 1：$\begin{bmatrix}b & -a\\ -9 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & a\\ 9 & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{16}{5} & -\frac{6}{5}\\ -9 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & \frac{6}{5}\\ 9 & \frac{16}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

解 2：∵$\begin{bmatrix}4 & a\\ 9 & b\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}b & -a\\ -9 & 4\end{bmatrix}$，∴$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}b & -a\\ -9 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b & -a\\ -9 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，得$\begin{bmatrix}b & -a\\ -9 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b & -a\\ -9 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

答：(1)(3)

26.設 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$為二階實係數方陣。(100 指考數乙二)

(1)當 A 為轉移矩陣時，試敘述實數 a，b，c，d 須滿足的條件。

(2)試證：當 A 為轉移矩陣時，A^2 也是轉移矩陣(式中 A^2 代表 A 與 A 的乘積)。

解：(1)條件為 $a+c=b+d=1$，$0\le a$，b，c，$d\le 1$，a，b，c，$d\in R^+\cup\{0\}$

(2) $A^2=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{pmatrix}$

第一行：$a^2+bc+ac+cd=(a^2+ac)+(bc+cd)=a(a+c)+c(b+d)=a\times1+c\times1=a+c=1$

第二行：$ab+bd+bc+d^2=(ab+bc)+(bd+d^2)=b(a+c)+d(b+d)=b\times1+d\times1=b+d=1$

又∵$0\le a$，b，c，$d\le 1$，∴$0\le a^2+bc\le 1$，$0\le ac+cd\le 1$，$0\le ab+bd\le 1$，$0\le bc+d^2\le 1$

故 A^2 也是轉移矩陣

27.設 n 為正整數，符號$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}^n$代表矩陣$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$自乘 n 次。令$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{bmatrix}$，請選出正確的選項。(102 學測 7)

(1) $a_2=1$　　(2) a_1，a_2，a_3為等比數列　　(3) d_1，d_2，d_3為等比數列

(4) b_1，b_2，b_3為等差數列　　(5) c_1，c_2，c_3為等差數列

解：當 $n=1$ 時，$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}^1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{bmatrix}$

當 $n=2$ 時，$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{bmatrix}$

當 $n=3$ 時，$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 7\\ 0 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_3 & b_3\\ c_3 & d_3\end{bmatrix}$

(1) $a_2=1$，正確

(2) $a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=1$ 是公比為 1 的等比數列，正確

(3) $d_1=2$，$d_2=4$，$d_3=8$ 是公比為 2 的等比數列，正確

(4) $b_1=1$，$b_2=3$，$b_3=7$ 不為等差數列

(5) $c_1=0$，$c_2=0$，$c_3=0$ 是公差為 0 的等差數列

答：(1)(2)(3)(5)