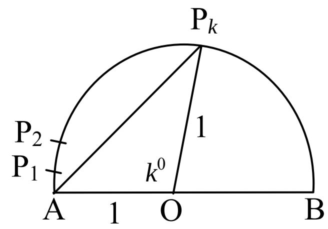
第 8 單元　三角函數

1.半徑為 1 之半圓周 AB 等分 180 份，等分點 P_1，P_2，…，P_{179}，則 $\sum_{k=1}^{179}\overline{AP_k}^2=$______。(81 社)

解：(1)如右圖，在ΔAOP_k中，$\overline{AP_k}^2=1^2+1^2-2\times1\times1\cos k^0$



(2)$\sum_{k=1}^{179}\overline{AP_k}^2=(1^2+1^2-2\times1\times1\cos 1^0)+(1^2+1^2-2\times1\times1\cos 2^0)$

$+\cdots\cdots+(1^2+1^2-2\times1\times1\cos 179^0)$

$=179+179-2(\cos 1^0+\cos 2^0+\cdots+179^0)=358-2\times0=358$

答：358

2.已知 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$，且 $\sin\theta$及 $\cos\theta$為 $2x^2+px+q=0$ 的兩個根，則判別式 $p^2-8q=$____。(82 推甄)

解：(1)∵$\sin\theta$及 $\cos\theta$為 $2x^2+px+q=0$ 的兩個根，∴$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{p}{2}$，$\sin\theta\cos\theta=\frac{q}{2}$

(2)由$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta$，⇒ $\frac{1}{3}=1-q$，得 $q=\frac{2}{3}$

由$(\sin\theta-\cos\theta)^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2-4\sin\theta\cos\theta$，⇒ $\frac{1}{3}=(-\frac{p}{2})2-4(\frac{q}{2})$，∴$p^2=\frac{20}{3}$

∴$p^2-8q=\frac{20}{3}-8(\frac{2}{3})=\frac{4}{3}$

答：$\frac{4}{3}$

3.若 $f(x)=2\cos(\frac{\pi}{3}-x)-2\cos x-3$ 的最大值是 M，則 M＝______。(82 社)

解：$f(x)=2(\cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x)-2\cos x-3=\sqrt{3}\sin x-\cos x-3$

又∵$-2\le\sqrt{3}\sin x-\cos x\le 2$，∴$-2-3\le f(x)\le 2-3$，得知$-5\le f(x)\le-1$，故 $f(x)$的最大值是 M＝－1

答：－1

4.若 z 為複數，且滿足 $z+\frac{1}{z}=1$，則 $z^{101}+\frac{1}{z^{101}}=$_____。(82 社)

解 1：∵$z+\frac{1}{z}=1$，⇒$z^2-z+1=0$，得 $z=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}$

$\therefore z^{101}+\frac{1}{z^{101}}=(\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3})^{101}+(\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3})^{-101}=2\cos\frac{101\pi}{3}=1$

解 2：利用公式⇒∵$z+\frac{1}{z}=1=2\cos\theta$，得知 $\theta=\frac{\pi}{3}$，$\therefore z^{101}+\frac{1}{z^{101}}=2\cos\frac{101\pi}{3}=1$

答：1

5.若$\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$且 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，則 $\cos\theta=$______。(83 推甄)

解：$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5} & \cdots(1)\\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1 & \cdots(2)\end{cases}$，由(1)得知 $\sin\theta=\frac{1}{5}-\cos\theta$代入(2)

⇒$(\frac{1}{5}-\cos\theta)^2+\cos^2\theta=1$，化簡得 $25\cos^2\theta-5\cos\theta-12=0$，⇒$(5\cos\theta+3)(5\cos\theta-4)=0$，∴$\cos\theta=-\frac{3}{5}$或$\frac{4}{5}$

∵$\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$，取 $\cos\theta=\frac{4}{5}$

答：$\frac{4}{5}$

6.若 $\sin\theta$ 為 $4x^2+4x-3=0$ 之一根，則 $\cos 2\theta=$_______。(83 社)

解：(1)$4x^2+4x-3=(2x+3)(2x-1)=0$，$\therefore x=-\dfrac{3}{2}$ 或 $\dfrac{1}{2}$，但 $-1\le\sin\theta\le 1$，$\therefore$ 得知 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

(2) $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2(\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{1}{2}$

答：$\dfrac{1}{2}$

7.$\dfrac{1+i\tan\frac{\pi}{8}}{1-i\tan\frac{\pi}{8}}$ 之值等於_______。(83 社)

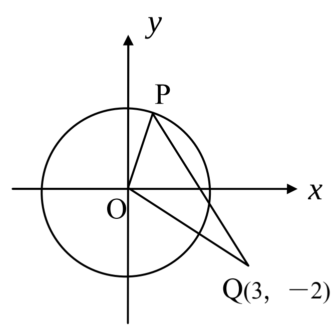
(1)$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$　(2)$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　(3)$\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}i$　(4)$\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$　(5)$\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

解：$$\frac{1+i\tan\frac{\pi}{8}}{1-i\tan\frac{\pi}{8}}=\frac{1+i\dfrac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}}{1-i\dfrac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}}=\frac{\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}}=\frac{\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}}{\cos(-\frac{\pi}{8})+i\sin(-\frac{\pi}{8})}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

答：(5)

8.設 P 為單位圓 $x^2+y^2=1$ 上的任一點，令 O 為原點(0，0)，Q 為點(3，－2)，則ΔPOQ 面積的最大值為______。

解：(1)$\because$P 在單位圓 $x^2+y^2=1$ 上，$\therefore$設 P($\cos\theta$，$\sin\theta$)，如右圖



(2) ΔPOQ 面積$=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}0 & 0\\ 3 & -2\\ \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & 0\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}\left|3\sin\theta+2\cos\theta\right|$

$\because -\sqrt{13}\le 3\sin\theta+2\cos\theta\le\sqrt{13}$，$\therefore$最大面積為 $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

答：$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$　(83 社)

9. $\cos 74^0\cos 14^0$ 等於下列那些式子？(84 **推甄**)

(1) $\cos 60^0$　(2) $2\sin 30^0\sin 44^0$　(3) $2\cos 30^0\cos 44^0$　(4) $\sin 16^0-\sin 76^0$　(5) $\sin 164^0+\cos 166^0$

解：(1) $\cos 74^0\cos 14^0=-2\sin\dfrac{74^0+14^0}{2}\sin\dfrac{74^0-14^0}{2}=-2\sin 44^0\sin 30^0=-\sin 44^0$，$\Rightarrow$ (1) (2) (3)皆錯誤

(2) $\cos 74^0\cos 14^0=\cos(90^0-16^0)\cos(90^0-76^0)=\sin 16^0-\sin 76^0$，$\therefore$(4)正確

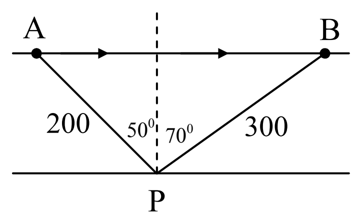
(3) $\sin 164^0+\cos 166^0=\sin 164^0-\sin 76^0=2\cos\dfrac{164^0+76^0}{2}\sin\dfrac{164^0-76^0}{2}=2\cos 120^0\sin 44^0=-\sin 44^0$

答：(4)(5)

10.一汽艇在湖上沿直線前進，有人用儀器在岸上先測得汽艇在正前方偏左 50°，距離 200 公尺。一分鐘後，於原地再測，如汽艇駛到正前方偏右 70°，距離為 300 公尺。那麼，汽艇在這一分鐘內行駛了______公尺。(84 推甄)

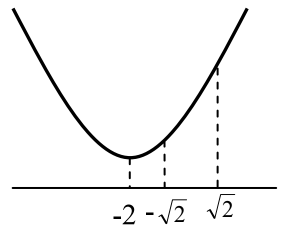
解：如圖，$\overline{AB}^2=200^2+300^2-2\times 200\times 300\cos 120^0=19\times 100^2$

$\therefore \overline{AB}=100\sqrt{19}$



答：$100\sqrt{19}$

11.設 $f(x)=(\sin x+\cos x)^2+4(\sin x+\cos x)$，則 $f(x)$的最小值為_______。(84 推甄)

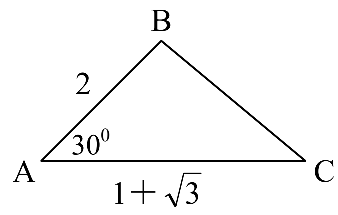


解：(1)令 $\sin x+\cos x=k$，$\therefore -\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$，$\Rightarrow f(x)=k^2+4k=(k+2)^2-4$

(2)如右圖，知當 $k=-\sqrt{2}$ 時，$f(x)$有最小值$=(-\sqrt{2}+2)^2-4=2-4\sqrt{2}$

答：$2-4\sqrt{2}$

12.設ΔABC 中，$\overline{AB}=2$，$\overline{AC}=1+\sqrt{3}$，$\angle A=30^0$，則$\overline{BC}$的長度為______，∠C 的大小為_______度。(84 自)



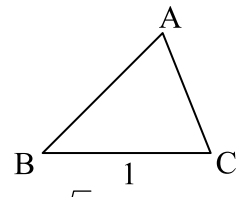
解：(1)如圖，$\overline{BC}^2=22+(1+\sqrt{3})2-2\times2\times(1+\sqrt{3})\cos30^0=2$，$\therefore \overline{BC}=\sqrt{2}$

(2)$\cos\angle C=\dfrac{\sqrt{2}^2+(1+\sqrt{3})^2-2^2}{2\times\sqrt{2}\times(1+\sqrt{3})}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\therefore \angle C=45^0$

答：$\overline{BC}=\sqrt{2}$ ；$\angle C=45^0$

13.在ΔABC 中，已知$\overline{BC}=1$，$\sin A<\sin B$，且 $\sin A$ 與 $\sin B$ 為 $8x^2-4\sqrt{3}x+1=0$ 的兩根，則ΔABC 的外接圓半徑等於：

(1)$\sqrt{3}-1$　(2)$2\sqrt{3}-1$　(3)$\sqrt{3}+1$　(4)$\sqrt{3}+2$　(5) $2\sqrt{3}+1$　(84 社)



解：(1)$\because 8x^2-4\sqrt{3}x+1=0$ 的兩根為$\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$、$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$且 $\sin A<\sin B$,

$\therefore$令 $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

(2)如圖，設ΔABC 的外接圓半徑為 R，$\therefore 2R=\dfrac{1}{\sin A}=2(\sqrt{3}+1)$，得知外接圓半徑為 $R=\sqrt{3}+1$

答：(3)

14.設 $z_1=2+ai$，$z_2=2b+(2-b)i$，其中 a、b 為實數，$i=\sqrt{-1}$，若 $|z_1|=\sqrt{2}|z_2|$，且$\dfrac{z_1}{z_2}$的輻角為$\dfrac{\pi}{4}$，

則數對$(a,\ b)$=__________。(85 自)

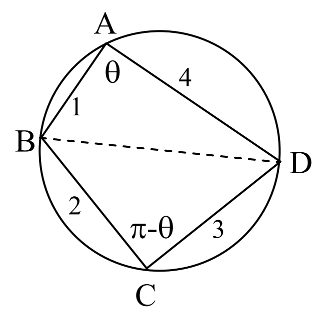
解：$\because \dfrac{z_1}{z_2}=\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})=\sqrt{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i)=1+i$，$\therefore z_1=(1+i)z_2$

$\Rightarrow 2+ai=(1+i)[2b+(2-b)i]=(3b-2)+(b+2)i$

$\Rightarrow 2=3b-2$ 且 $a=b+2$，$\therefore$得知 $a=\dfrac{10}{3}$，$b=\dfrac{4}{3}$

答：$(\dfrac{10}{3},\ \dfrac{4}{3})$

15.已知圓內接四邊形的各邊長為$\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=2$，$\overline{CD}=3$，$\overline{DA}=4$，則對角線$\overline{BD}$的長度為______。(86 推甄)



解：(1)如圖，設∠A＝θ，則∠C＝π－θ，連接$\overline{BD}$

(2)在ΔABD 中，$\overline{BD}^2=1^2+4^2-2\times1\times4\cos\theta=17-8\cos\theta$

在ΔBCD 中，$\overline{BD}^2=2^2+3^2-2\times2\times3\cos(\pi-\theta)=13+12\cos\theta$

$\Rightarrow 17-8\cos\theta=13+12\cos\theta$，$\therefore \cos\theta=\dfrac{1}{5}$

(3)$\overline{BD}^2=17-8\cos\theta=\dfrac{77}{5}$，$\therefore \overline{BD}=\sqrt{\dfrac{77}{5}}$

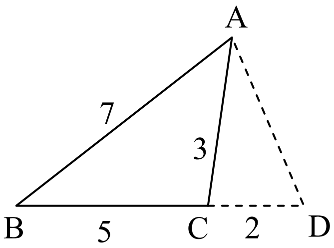
答：$\sqrt{\dfrac{77}{5}}$

16.若複數 z 與$\sqrt{3}+i$ 之積為$-2\sqrt{3}+2i$，則 z 的主輻角為____。(86 自)

解：$\because z(\sqrt{3}+i)=-2\sqrt{3}+2i$，$\therefore z=\dfrac{-2\sqrt{3}+2i}{\sqrt{3}+i}=\dfrac{4(\cos150^0+i\sin150^0)}{2(\cos30^0+i\sin30^0)}=2(\cos120^0+i\sin120^0)$

答：120^0

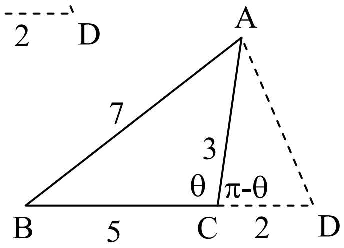
17.已知ΔABC 三邊分別為 $\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=5$，$\overline{AC}=3$，延長 $\overline{BC}$ 至 D，如下圖所示，使得 $\overline{CD}=2$，則 $\overline{AD}=$____。



解 1：(1)在ΔABC 中，$\cos B=\dfrac{5^2+7^2-3^2}{2\times5\times7}=-\dfrac{1}{2}$

(2)在ΔABD 中，$\overline{AD}^2=7^2+7^2-2\times7\times7\cos B=7$，$\therefore \overline{AD}=\sqrt{7}$

解 2：(1)如右圖，在ΔABC 中，$\cos\theta=\dfrac{5^2+3^2-7^2}{2\times5\times3}=-\dfrac{1}{2}$



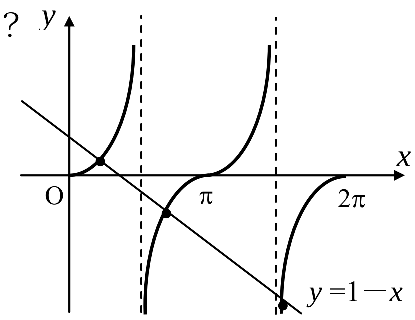
$\therefore\theta=120^0$，$\cos(\pi-\theta)=\cos 60^0=\dfrac{1}{2}$

(2)在ΔACD 中，$\overline{AD}^2=2^2+3^2-2\times2\times3\cos 60^0=7$，$\therefore \overline{AD}=\sqrt{7}$

答：$\sqrt{7}$ (86 社)

18.當 x 介於 0 與 2π 之間，直線 $y=1-x$，與函數 $y=\tan x$ 的圖形，共有幾個交點？

(1) 0　(2) 1　(3) 2　(4) 3　(5) 4



解：如圖，有 3 個交點

答：(4) (87 推甄)

19.下列敘述何者為真？(87 推甄)

(1) $\sin 50^0<\cos 50^0$　(2) $\tan 50^0<\cot 50^0$　(3) $\tan 50^0<\sec 50^0$

(4) $\sin 230^0<\cos 230^0$　(5) $\tan 230^0<\cot 230^0$

解：(1) $\sin 50^0>\cos 50^0=\sin 40^0$

(2) $\tan 50^0>\cot 50^0=\tan 40^0$

(3) $\tan 50^0=\dfrac{\sin 50^0}{\cos 50^0}<\dfrac{1}{\cos 50^0}=\sec 50^0$

(4) $\sin 230^0=\sin(180^0+50^0)=-\sin 50^0$

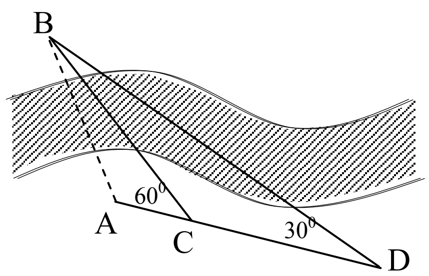
$\cos 230^0=\cos(180^0+50^0)=-\cos 50^0=-\sin 40^0$，$\therefore\sin 230^0<\cos 230^0$

(5) $\tan 230^0=\tan(180^0+50^0)=\tan 50^0$

$\cot 230^0=\cot(180^0+50^0)=\cot 50^0=\tan 40^0$，$\therefore\tan 230^0>\cot 230^0$

答：(3)(4)

20.如右圖，A、B 兩點分別位於一河口的兩岸邊。某人在通往 A 點的筆直公路上，距離 A 點 50 公尺的 C 點與距離 A 點 200 公尺的 D 點，分別測得∠ACB＝60^0，∠ADB＝30^0，則 A 與 B 的距離為____公尺。(87 推甄)



解：(1)如圖，∵∠ACB 是ΔBCD 的一外角，$\therefore \overline{BC}=\overline{CD}=150$

(2)在ΔABC 中，$\overline{AB}^2=50^2+150^2-2\times50\times150\cos60^0=17500$

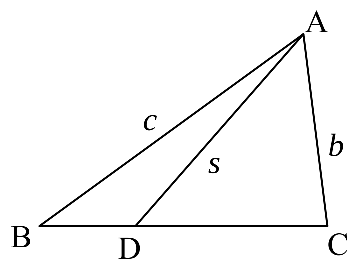
$\therefore \overline{AB}=50\sqrt{7}$

答：$50\sqrt{7}$

21.設ΔABC 之∠A＝60°，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$。今在 $\overline{BC}$ 上取一點 D，使得 $\overline{BD}=\dfrac{1}{3}\overline{BC}$，令 $s=\overline{AD}$，則 s^2 等於　(87 自)

(1)$\dfrac{1}{9}(b^2+4c^2+4bc)$　(2)$\dfrac{1}{9}(b^2+4c^2+2bc)$　(3)$\dfrac{1}{9}(b^2+4c^2-2bc)$

(4)$\dfrac{1}{9}(4b^2+c^2+2bc)$　(5)$\dfrac{1}{9}(4b+c^2-2bc)$



解：(1)在ΔABC 中，如右圖

$\because \overline{BD}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}$ 根據分點公式，$\therefore \overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

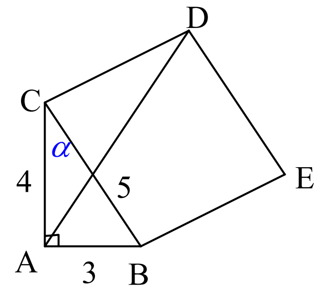
且$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60°=bc\cos 60°=\frac{1}{2}bc$

(2) $s^2=\overline{AD}^2=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})$

$=\frac{4}{9}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{9}|\overrightarrow{AC}|^2=\frac{4}{9}c^2+\frac{4}{9}\times\frac{1}{2}bc+\frac{1}{9}b^2=\frac{1}{9}(b^2+4c^2+2bc)$

答：(2)

22.設ΔABC 為一直角三角形，四邊形 BCDE 是以$\overline{BC}$為一邊向外作出的正方形。若$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=4$，$\overline{AB}=3$，試求：(1) cos (∠ACD)　(2) ΔACD 的面積。(87 社)



解：(1)如右圖，令∠ACB＝α，∠ACD＝α＋90°，得知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，

∴$\cos(\angle ACD)=\cos(\alpha+90°)=-\sin\alpha=\frac{3}{5}$

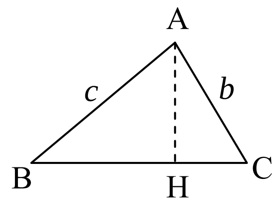
(2)∵$\sin(\angle ACD)=\sin(\alpha+90°)=\cos\alpha=\frac{4}{5}$

∴ΔACD 面積＝$\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{CD}\sin(\alpha+90°)=\frac{1}{2}\times4\times5\times\frac{4}{5}=8$

答：(1) $-\frac{3}{5}$　(2) 8

23.設ΔABC 的三頂點 A，B，C 所對邊的邊長分別為 a，b，c，$\overline{AH}$為高，則$\overline{AH}$之長為　(88 推甄)

(1) $b\cdot\sin B$　(2) $c\cdot\sin C$　(3) $b\cdot\sin C$　(4) $c\cdot\sin B$　(5) $a\cdot\sin A$



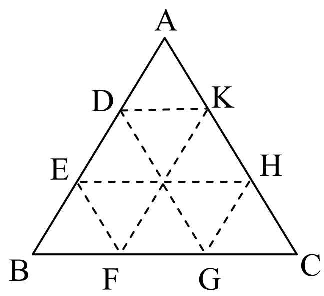
解：如右圖，

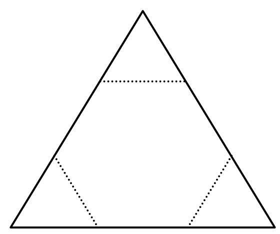
(1)在ΔABH 中，$\overline{AH}=c\cdot\sin B$

(2)在ΔACH 中，$\overline{AH}=b\cdot\sin C$

答：(3)(4)

24.一個正三角形的面積為 36，今截去三個角(如右圖)，使成為正六邊形，此正六邊形的面積為______。(88 推甄)





解：如右圖，連接$\overline{DG}$、$\overline{EH}$、$\overline{FK}$

則ΔABC 可分成 9 個相等之小正三角形

∴每個小正三角形面積＝$\frac{36}{9}=4$

⇒正六邊形 DEFGHK 面積＝6 個小正三角形面積＝4×6＝24

答：24

25.設 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$，且 $2+\sqrt{3}$ 為 $x^2-(\tan\theta+\cot\theta)x+1=0$ 的一根，則 $\tan\theta=$___。(88 推甄)

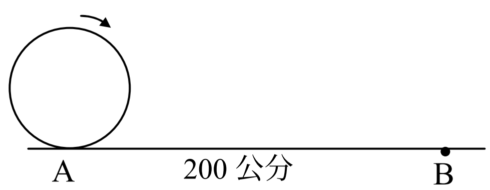
解：(1)設另一根為 k，由兩根積＝$(2+\sqrt{3})\times k=1$，得知 $k=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

(2)由兩根和＝$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=\tan\theta+\cot\theta=\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$，∴$4=\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$，

⇒ $\tan^2\theta-4\tan\theta+1=0$，得知 $\tan\theta=2+\sqrt{3}$ 或 $2-\sqrt{3}$，但是 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$，∴$\tan\theta=2-\sqrt{3}<1$

答：$2-\sqrt{3}$

26.有一輪子，半徑 50 公分，讓它在地上滾動 200 公分的長度，問輪子繞軸轉動_____度。(度以下四捨五入) (88 推甄)



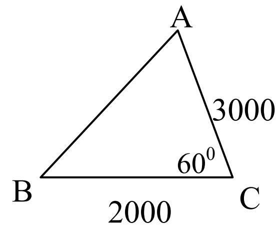
解：如右圖，輪子從 A 到 B 共轉了 $\frac{200}{2\times50\pi}=\frac{2}{\pi}$圈

$\frac{2}{\pi}$圈＝$\frac{2}{\pi}\times3600\approx229$ 度

答：229 度

27.在ΔABC 中，已知∠C＝60^0，$\overline{AC}$＝3000 公尺，$\overline{BC}$＝2000 公尺，則∠A 為____度。

(度以下四捨五入)(參考資料：$\sqrt{3}=1.732$, $\sqrt{7}=2.646$, $\sqrt{21}=4.583$)(88 推甄)



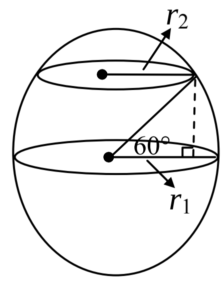
解：(1)∵ $\overline{AB}^2$＝2000^2＋3000^2－2×2000×3000cos60^0＝7000000，∴ $\overline{AB}$＝$1000\sqrt{7}$

(2)∵ $\dfrac{2000}{\sin A}=\dfrac{1000\sqrt{7}}{\sin 60^0}$，∴sin A＝$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$＝0.6547

(3) sin 30^0＝0.5
sin A＝0.6547
sin 45^0＝0.707　　∴ $\dfrac{45^0-30^0}{45^0-A}=\dfrac{0.707-0.5}{0.707-0.6547}$，A＝$41.2^0$

答：41 度

28.假設某一球形的地球儀其赤道長為 100 公尺，則北緯 60°的緯線長為______公分。(88 自)



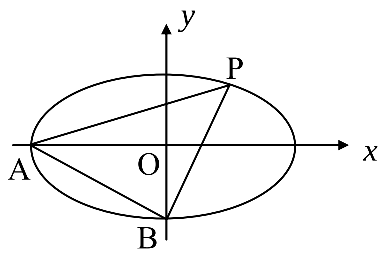
解：如右圖，設赤道半徑為 r_1，北緯 60°的半徑為 r_2，緯線長為 x cm

由三角函數得知$\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{2}{1}$，∴$\dfrac{2\pi\ r_1}{2\pi\ r_2}=\dfrac{100}{x}$，⇒ $\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{100}{x}=\dfrac{2}{1}$，得 $x=50$

答：50 cm

29.如下圖，A，B 為橢圓$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 之兩頂點，其中 a，b 皆為正數。若 P 為第一象限的橢圓弧上之一點，

則ΔABP 最大的面積為何？(88 自)



解：設 P(x，y)，A(－a，0)，B(0，－b)

(2) ΔABP 面積＝$\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-a & 0\\ 0 & -b\\ x & y\\ -a & 0\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}\left|ab+bx+ay\right|$

或ΔABP 面積＝$\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}x & y & 1\\ -a & 0 & 1\\ 0 & -b & 1\end{vmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}x & y & 1\\ -a-x & -y & 0\\ -x & -b-y & 0\end{vmatrix}=\dfrac{1}{2}|\,bx+ay+ab\,|$

(3)利用柯西不等式：∴$[(\dfrac{x}{a})^2+(\dfrac{y}{b})^2\,][(ab)^2+(\,ab\,)^2]\ge(bx+ay)^2$，⇒ $1\times2(ab)^2\ge(bx+ay)^2$

⇒ $-\sqrt{2}\,ab\le bx+ay\le\sqrt{2}\,ab$　同加上 ab，得 $ab-\sqrt{2}\,ab\le bx+ay+ab\le\sqrt{2}\,ab+ab$

⇒ $(1-\sqrt{2}\,)\,ab\le bx+ay+ab\le(\sqrt{2}+1)\,ab$

⇒ $\dfrac{1}{2}|\,bx+ay+ab\,|\le\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}ab$，∴ΔABP 面積的最大值為$\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}ab$

答：$\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}ab$

30.假設 cosθ＋3 sinθ＝2，且 $0^0<\theta<90^0$，求 cosθ＋sinθ 之值。(88 自)

解：由 cosθ＋3 sinθ＝2 且 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

得$(2-3\sin\theta)^2+\sin^2\theta=1$，⇒ $10\sin^2\theta-12\sin\theta+3=0$，∴$\sin\theta=\dfrac{6\pm\sqrt{6}}{10}$

(i)當 $\sin\theta=\dfrac{6+\sqrt{6}}{10}$，則 $\cos\theta=2-3\sin\theta=\dfrac{2-3\sqrt{6}}{10}<0$(不合，∵$0^0<\theta<90^0$)

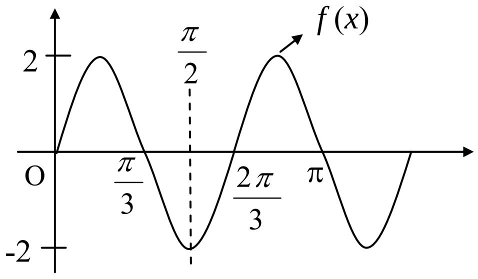
(ii)當 $\sin\theta=\dfrac{6-\sqrt{6}}{10}$，則 $\cos\theta=2-3\sin\theta=\dfrac{2+3\sqrt{6}}{10}$，∴$\cos\theta+\sin\theta=\dfrac{6-\sqrt{6}}{10}+\dfrac{2+3\sqrt{6}}{10}=\dfrac{4+\sqrt{6}}{5}$

答：$\dfrac{4+\sqrt{6}}{5}$

31.考慮函數 $f(x)=2\sin 3x$，試問下列選項何者為真？(88 社)

(1) $-2\le f(x)\le 2$　　(2) $f(x)$在 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 時有最大值　　(3) $f(x)$的週期為 $\dfrac{2\pi}{3}$

(4) $y=f(x)$的圖形對稱於直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$　　(5) $f(2)>0$



解：(1)∵ $-1\le \sin 3x\le 1$，∴ $-2\le 2\sin 3x\le 2$

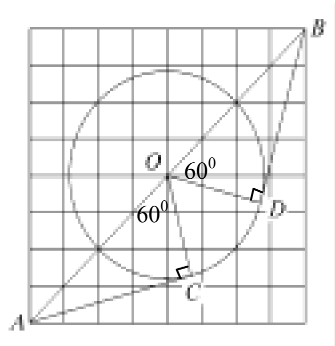
(2)當 $f(x)$有最大值時，即 $2\sin 3x=2$，∴ $\sin 3x=1$，得知 $x=\dfrac{\pi}{6}$

(3)如右圖，$f(x)$的週期為 $\dfrac{2\pi}{3}$，以直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 為對稱軸

(4) $f(2)=2\sin 6\approx 2\sin(6\times 57.3^0)=2\sin(343^0)<0$

答：(1)(2)(3)(4)

32.如下圖所示，每個小方格的邊長為 1，圓 O 的圓心為 O，半徑為 $\dfrac{1}{2}\overline{AO}$，$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 均為圓 O 的切線，切點分別為 C 點與 D 點。(1)試求∠COD　　(2)求線段 $\overline{AC}$，圓弧 $\overset{\frown}{CD}$ 及線段 $\overline{DB}$ 的長度之和　　(88 社)



解：(1) ∵C、D 點為切點，∴ $\overline{OC}\perp\overline{AC}$，$\overline{OD}\perp\overline{BD}$，

且 $\overline{OC}=\overline{OD}=\dfrac{1}{2}\overline{AO}$，則∠AOC＝∠BOD＝$60^0$

$\Rightarrow$ ∠COD＝$180^0-60^0-60^0=60^0$

(2)在直角ΔOAC 中，

∵ $\overline{AO}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$，∴圓半徑 $\overline{OC}=\overline{OD}=2\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ $\overline{AC}=\overline{DB}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{6}$

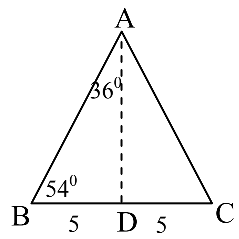
(3)圓弧 $\overset{\frown}{CD}=2\sqrt{2}\times\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}$

(4) $\overline{AC}+\overset{\frown}{CD}+\overline{DB}=2\sqrt{6}+\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}+2\sqrt{6}=4\sqrt{6}+\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}$

答：$4\sqrt{6}+\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}$

33.有一等腰三角形底邊為 10，頂角 72^0。下列何者可以表示腰長？(89 推甄)

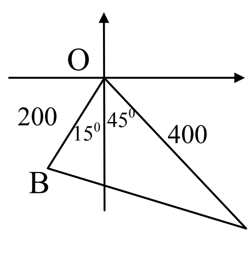
(1) $5\sin36^0$　　(2) $5\tan36^0$　　(3) $5\cot36^0$　　(4) $5\sec36^0$　　(5) $5\csc36^0$



解：如右圖，在ΔABD 中，∵ $\sin36^0=\dfrac{5}{\overline{AB}}$，∴腰長 $\overline{AB}=5\csc36^0$

答：(5)

34.氣象局測出在 20 小時期間，颱風中心的位置由恆春東南方 400 公里直線移動到恆春南15°西的 200 公里處，試求颱風移動的平均速度。(整數以下，四捨五入) 答：___公里/時。(89 推甄)



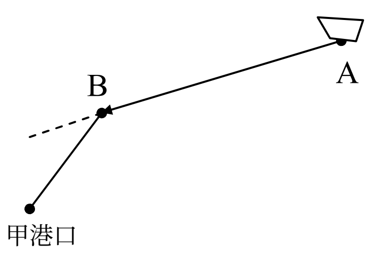
解：(1)如圖，設恆春為 O 點，颱風由 A 點到 B 點

∴ $\overline{AB}^2$＝2002＋4002－2×200×400cos 600＝12×1002，⇒ $\overline{AB}=200\sqrt{3}$

(2)平均速度＝$\dfrac{\overline{AB}}{20}=10\sqrt{3}\approx 17$ (公里/小時)

答：17

35.如下圖所示，有一船位於甲港口的東方 27 公里北方 8 公里 A 處，直朝位於港口的東方 2 公里北方 3 公里 B 處的航標駛去，到達航標後即修正航向以便直線駛入港口。試問船在航標處的航向修正應該向左轉多少度?(整數以下，四捨五入)答：______度。(89 推甄)



解：(1)如右下圖，座標化，取甲港口 O(0，0)，A(27，8)，B(2，3)，向左轉θ

(2)連接 $\overline{OA}$，在ΔOAB 中

$\overline{AB}=\sqrt{(27-2)^2+(8-3)^2}=\sqrt{650}$ ；

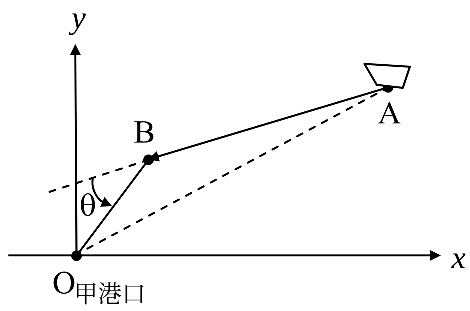
$\overline{OB}=\sqrt{(2-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{13}$

$\overline{OA}=\sqrt{(27-0)^2+(8-0)^2}=\sqrt{793}$

$\because \overline{OA}^2=\overline{AB}^2+\overline{OB}^2-2\,\overline{AB}\times\overline{OB}\cos(\pi-\theta)$

$\therefore 793=650+13-2\times\sqrt{650}\times\sqrt{13}\,(-\cos\theta)$

$\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，得知$\theta=45^0$

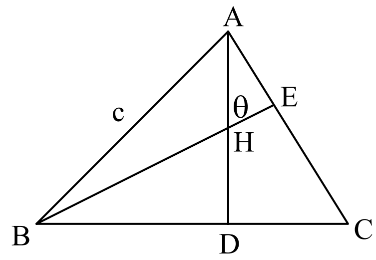


答：45^0

36.設 H 為銳角三角形 ABC 的垂心(三高之交點)，若以 c 表線段$\overline{AB}$之長，則線段$\overline{AH}$之長等於：(89 自)

(1) $c$cosA sinC　(2) $c$cosA cosC　(3) $c$cosA tanC

(4) $c$cosA secC　(5) $c$cosA cscC



解：(1)如右圖，在ΔABE 中，$\overline{AE}=c\cos A$

(2)∵ΔACD 與ΔAHE 相似，∴∠C＝∠AHE＝θ

在ΔAHE 中，$\overline{AH}=\overline{AE}\csc\theta=c\cos A\csc\theta=c\cos A\csc C$

答：(5)

37.設$(p,\ 0)$ 為橢圓$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$的長軸上一定點，且$0<p<\dfrac{3}{2}$。若點$(a,\ b)$為橢圓上距離$(p,\ 0)$最近之點，則 $a=$____。(以 p 的函數表示)(89 自)

解：(1)設 $P(p,\ 0)$，$Q(a,\ b)$，∵$Q(a,\ b)$在橢圓上，$\therefore \dfrac{a^2}{4}+b^2=1$

(2) $\overline{PQ}^2=(p-a)^2+b^2=(p-a)^2+(1-\dfrac{a^2}{4})=p^2-2ap+\dfrac{3}{4}a^2+1$

$=\dfrac{3}{4}[a^2-\dfrac{8}{3}ap+(\dfrac{4}{3}p)^2]+1-\dfrac{1}{3}p^2=\dfrac{3}{4}(a-\dfrac{4}{3}p)^2+1-\dfrac{p^2}{3}\ge 1-\dfrac{p^2}{3}$

$\because 0<p<\dfrac{3}{2}$，$\therefore \dfrac{1}{4}<1-\dfrac{p^2}{3}<1$，則$\overline{PQ}^2\ge 1-\dfrac{p^2}{3}>\dfrac{1}{4}$

且等號成立時，$a-\dfrac{4}{3}p=0$，即當 $a=\dfrac{4}{3}p$ 時，$\overline{PQ}$有最小值(距離最小)

答：$\dfrac{4}{3}p$

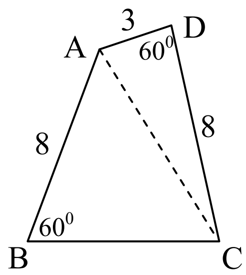
38.已知四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=8$，$\overline{CD}=8$，$\overline{AD}=3$ 且∠ABC＝∠ADC＝60°，試求$\overline{BC}$之長。(89 社)

解：(1)如圖，在ΔADC 中，$\overline{AC}^2=3^2+8^2-2\times3\times8\cos 60^0=49$

(2)在ΔABC 中，設$\overline{BC}=x$，$\overline{AC}^2=8^2+x^2-2\times8\times x\cos 60^0=49$

$\Rightarrow$ 整理 $x^2-8x+15=0$，$(x-5)(x-3)=0$，$x=5$ 或 3

$\Rightarrow \therefore \overline{BC}=5$ 或 3

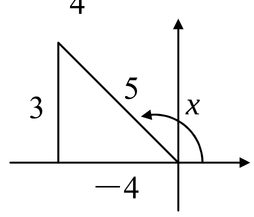


答：5 或 3

39.若 $\sin x=\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$，則下列選項何者為真？(90 推甄)

(1) $\cos x=\dfrac{4}{5}$　(2) $\tan x=\dfrac{3}{4}$　(3) $\cot x=-\dfrac{4}{3}$　(4) $\sec x=-\dfrac{5}{4}$　(5) $\csc x=\dfrac{5}{3}$

解：如右圖，$\cos x=-\dfrac{4}{5}$；$\tan x=-\dfrac{3}{4}$；



答：(3)(4)(5)

40.令 z 為複數且 $z^6=1$，$z\neq 1$，則下列選項何者為真？(90 推甄)

(1) $|z|=1$　(2) $z^2=1$　(3) $z^3=1$ 或 $z^3=-1$　(4) $|z^4|=1$　(5) $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5=0$

解：(1) $\because z^6=1$，$\therefore |z^6|=1$，$\Rightarrow |z|^6=1$，但是 $|z|\geq 0$，故 $|z|=1$

(2) $\because z^6-1=(z^2)^3-1=(z^2-1)(z^4+z^2+1)=0$，$\Rightarrow$ $z^2=1$ 或 $1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

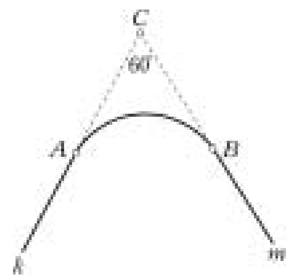
(3) $\because z^6-1=(z^3+1)(z^3-1)=0$，$\therefore z^3=1$ 或 $z^3=-1$

(4) $\because |z|=1$，$\therefore |z^4|=|z|^4=1$

(5) $\because z^6-1=(z-1)(z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)=0$，$\therefore z=1$ 或 $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$

答：(1)(3)(4)(5)

41.兩條公路 k 及 m，如果筆直延伸將交會於 C 處成 60^0 角，如下圖所示。為銜接此二公路，規劃在兩公路各距 C 處 450 公尺的 A，B 兩點間開拓成圓弧形公路，使 k，m 分別在 A，B 與此圓弧相切，試求此圓弧長。(公尺以下四捨五入，$\sqrt{3}=1.732$，$\pi=3.142$) (90 推甄)



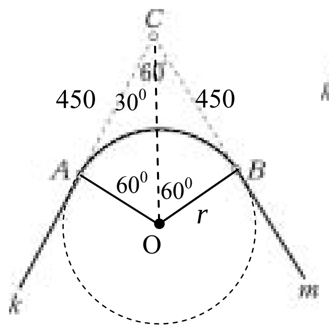
解：(1)如右下圖，設所求圓弧之圓心為 O，半徑為 r

$\because$ 公路 k 及 m 在 A，B 與此圓弧相切，$\therefore \angle OBC=\angle OAC=90°$

(2) $\angle AOB=180^0-60^0-90^0-90^0=120^0=\frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ 在直角三角形 ΔAOC 中，$r=\overline{OA}=450\tan 30^0=\frac{450}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow$ AB 弧長 $=r\theta=\frac{450}{\sqrt{3}}\times\frac{2\pi}{3}=100\sqrt{3}\pi$　544



答：$100\sqrt{3}\pi=544$

42.在坐標平面的 x 軸上有 A(2，0)，B(－4，0)兩觀測站，同時觀察在 x 軸上方的一目標 C 點，測得∠BAC 及∠ABC 之值後，通知在 D($\frac{5}{2}$，－8)的砲台此兩個角的正切值分別為 $\frac{8}{9}$ 及 $\frac{8}{3}$。那麼砲台 D 至目標 C 的距離為____。

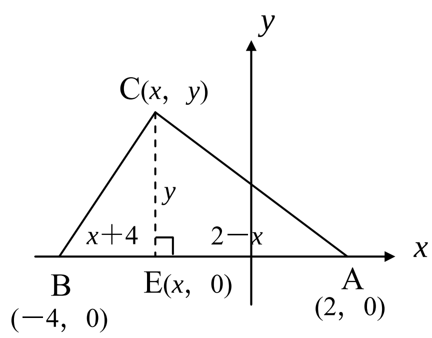
解：(1)如圖，設 C(x，y)，作 $\overline{CE}\perp\overline{AB}$ 於 E

(2)在 ΔBCE 中，$\tan B=\frac{y}{x+4}=\frac{8}{3}$，$\Rightarrow 8x+32=3y$

在 ΔACE 中，$\tan A=\frac{y}{2-x}=\frac{8}{9}$，$\Rightarrow -8x+16=9y$

$\therefore$ 得 $x=-\frac{5}{2}$，$y=4$，即 C($-\frac{5}{2}$，4)

(3) $\overline{CD}=\sqrt{(\frac{5}{2}+\frac{5}{2})^2+(4+8)^2}=13$



答：13(90 推甄)

43.包裝七根半徑皆為 1 的圓柱，其截面如下圖所示。試問外圍粗黑線條的長度為____。(90 社)

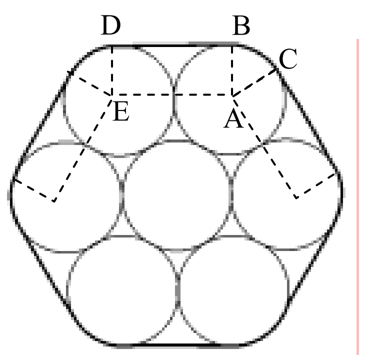
解：(1)如右下圖，在扇形 ABC 中，

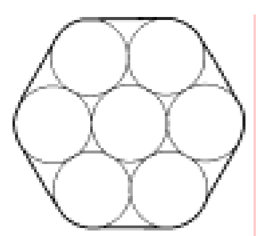
$\angle BAC=360^0-90^0-90^0-120^0=60^0=\frac{\pi}{3}$

$\therefore$ 弧 BC 長 $=1\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$

(2) $\overline{BD}=\overline{AE}=2$

(3)外圍粗黑線條的長 $=6(2+\frac{\pi}{3})=12+2\pi$

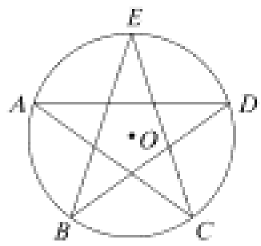




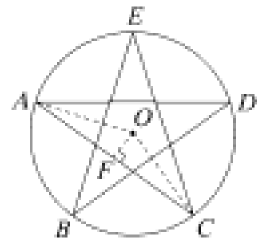
答：12＋2π

44.已知正五角星(即 ABCDE 為正五邊形)內接於一圓 O，如下圖所示。若 $\overline{AC}=1$，

則圓 O 的半徑長為＿＿＿＿＿。(90 社)($\sin 18°=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，$\cos 18°=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$)



解：(1)如右圖，$\angle AOC=\dfrac{360°}{5}\times 2=144°$，則$\angle OAC=\angle OCA=18°$



(2)在ΔOAC 中，∵ $\overline{AC}=1$，∴ $\overline{AF}=\dfrac{1}{2}$，$\Rightarrow \cos 18°=\dfrac{\overline{AF}}{\overline{OA}}$，$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\overline{OA}}$

得知$\overline{OA}=\dfrac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\dfrac{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{2\times 5}=\dfrac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}$

答：$\dfrac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}$

45.在ΔABC 中，下列哪些選項的條件有可能成立？(91 學測)

(1) $\sin A=\sin B=\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $\sin A$，$\sin B$，$\sin C$ 均小於$\dfrac{1}{2}$

(3) $\sin A$，$\sin B$，$\sin C$ 均大於$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(4) $\sin A=\sin B=\sin C=\dfrac{1}{2}$

(5) $\sin A=\sin B=\dfrac{1}{2}$，$\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解：(1)取$\angle A=\angle B=\angle C=60^0$，滿足(A)條件且$\angle A+\angle B+\angle C=180^0$

(2)取$\angle A$、$\angle B$ 小於 30^0，$\angle C>150^0$，滿足(B)條件

(3)∵ $\sin A$，$\sin B$，$\sin C$ 均大於$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，則$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 均大於 60^0，與$\angle A+\angle B+\angle C=180^0$ 不合

(4)∵ $\sin A=\sin B=\sin C=\dfrac{1}{2}$，則$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 均為 30^0 或 150^0，與$\angle A+\angle B+\angle C=180^0$ 不合

(5)取$\angle A=\angle B=30^0$，$\angle C=120^0$，滿足(E)條件且$\angle A+\angle B+\angle C=180^0$。

答：(1)(2)(5)

46.某人隔河測一山高，在 A 點觀測山時，山的方位為東偏北 60^0，山頂的仰角為 45^0，某人自 A 點向東行 600 公尺到達 B 點，山的方位變成在西偏北 60^0，則山有多高？

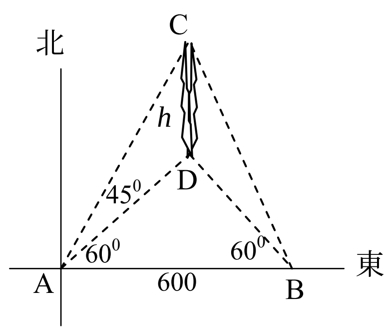
答：＿＿公尺。(91 學測)

解：根據題意，概略圖形如右，設山高 $\overline{CD}=h$ 公尺

(1)在ΔABD 中，∵$\angle DAB=\angle DBA=60^0$，∴ $\overline{AD}=\overline{AB}=600$

(2)在ΔACD 中，∵$\angle CAD=45^0$，∴$\tan 45^0=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$

$\Rightarrow 1=\dfrac{h}{600}$，得知 $h=600$

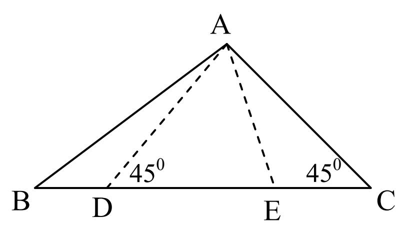


答：600 公尺

47.如圖，ΔABC 中，BC 邊上兩點 D、E 分別與 A 連線。假設$\angle ACB=\angle ADC=45^0$，三角形 ABC、ABD、ABE 的外接圓直徑分別為 c、d、e。試問下列何者為真？(91 學測補)

(1) $c<e<d$　(2) $d<e<c$　(3) $e<c$，$d<c$

(4) $d=c<e$　(5) $d=c>e$



解：根據題意，利用正弦定理，設 $\overline{AB}=k$

在ΔABC 中，$\dfrac{\overline{AB}}{\sin(\angle C)}=\dfrac{k}{\sin 45^0}=c$

在ΔABD 中，$\dfrac{\overline{AB}}{\sin(\angle ADB)}=\dfrac{k}{\sin 135^0}=\dfrac{k}{\sin 45^0}=d$

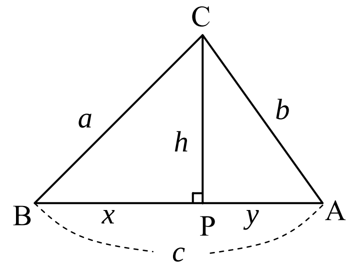
在ΔABE 中，$\dfrac{\overline{AB}}{\sin(\angle AEB)}=\dfrac{k}{\sin\theta}=e$，θ＝∠AED＞$45^0$　(ΔAEC 的外角關係)

∵在 0^0＜θ＜90^0 範圍內，sin θ為遞增函數，故 sin (∠AED)＞sin 45^0

∴ $\dfrac{k}{\sin(\angle AEB)}<\dfrac{k}{\sin 45^0}$，⇒　$e<c=d$

答：(5)

48.如右圖，ΔABC 的對邊分別為 a，b，c，P 為 C 點的垂足，h 為高，BP＝x，AP＝y，則下列選項哪些必定為真？(91 學測補)



(1) cos C＝$\dfrac{h}{a}+\dfrac{h}{b}$　　(2) cos C＝$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$　　(3) cos C＝cos (A＋B)

(4) cos C＝$\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$　　(5) cos C＝$\dfrac{h^2-xy}{ab}$

解：(1) cos C＝cos [π－(A＋B)]＝－cos (A＋B)

$=-\cos A\cos B+\sin A\sin B=-\dfrac{y}{b}\times\dfrac{x}{a}+\dfrac{h}{b}\times\dfrac{h}{a}=\dfrac{h^2-xy}{ab}$

(2)根據餘弦定理 cos C＝$\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

答：(4)(5)

49.函數 $f(x)=\dfrac{1}{2}(\cos 10x-\cos 12x)$，$x$ 為實數。則下列選項哪些為真？(91 學測補)

(1) $f(x)=\sin 11x\cdot\sin x$　　(2) $|f(x)|\le 1$ 恆成立　　(3) $f(x)$的最大值是 1

(4) $f(x)$的最小值是－1　　(5) $f(x)=0$ 的解有無窮多個

解：(1)利用和差化積公式

$f(x)=\dfrac{1}{2}(\cos 10x-\cos 12x)=\dfrac{1}{2}[-2\sin(\dfrac{10x+12x}{2})\sin(\dfrac{10x-12x}{2})]=\dfrac{1}{2}[-2\sin 11x\cdot\sin(-x)]=\sin 11x\cdot\sin x$

(2) $|f(x)|=|\sin 11x\cdot\sin x|\le|\sin 11x|\times|\sin x|\le 1$　(∵$|\sin\theta|\le 1$)

(3)若 $f(x)=\sin 11x\cdot\sin x=1$，則 $\sin x=1$ 且 $\sin 11x=1$ 或 $\sin x=-1$ 且 $\sin 11x=-1$ (不合)

當 $\sin x=1$ 時，$x=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$n\in Z$，代入 $\sin 11x=1$

得 $\sin 11(2n\pi+\dfrac{\pi}{2})=\sin(22n\pi+\dfrac{11\pi}{2})=\sin\dfrac{11\pi}{2}=-1$(不合)　(∵$\sin 11x=1$)

亦即 $f(x)=\sin 11x\cdot\sin x\ne 1$，∴$f(x)=\sin 11x\cdot\sin x<1$，故 $f(x)$的最大值不是 1

(4)若 $f(x)=\sin 11x\cdot\sin x=-1$，則 $\sin x=1$ 且 $\sin 11x=-1$ 或 $\sin x=-1$ 且 $\sin 11x=1$

當 $\sin x=1$ 時，$x=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$n\in Z$，代入 $\sin 11x=-1$，由(3)得知正確

當 $\sin x=-1$ 時，$x=2n\pi-\dfrac{\pi}{2}$，$n\in Z$，代入 $\sin 11x=1$，亦正確，∴ $f(x)=\sin 11x\cdot\sin x$ 的最小值是－1

(5)若 $f(x)=\sin 11x\cdot\sin x=0$，則 $\sin x=0$ 或 $\sin 11x=0$

當 $\sin x=0$ 時，則 $x=n\pi$，$n\in Z$ 或 當 $\sin 11x=0$ 時，則 $11x=n\pi$，$n\in Z$

∴$f(x)=0$ 時，解有無窮多個

答：(1)(2)(4)(5)

50.當 x 的範圍被限制在$-\dfrac{\pi}{2}$和$\dfrac{\pi}{2}$之間時，亦即$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$，有關函數 $f(x)=\cos x+\dfrac{4}{\cos x}$的敘述，哪些是正確的？

(1) $f(x)=f(-x)$　　(2) $f(x)\ge 4$　　(3) $f(x)$ 的最小值是 4　　(4) $f(x)$ 有最大值

解：(1) $f(-x)=\cos(-x)+\dfrac{4}{\cos(-x)}=\cos x+\dfrac{4}{\cos x}=f(x)$

(2)∵$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$，∴$\cos x>0$，根據算幾不等式，⇒$f(x)=\cos x+\dfrac{4}{\cos x}\ge 2\sqrt{(\cos x)(\dfrac{4}{\cos x})}=4$

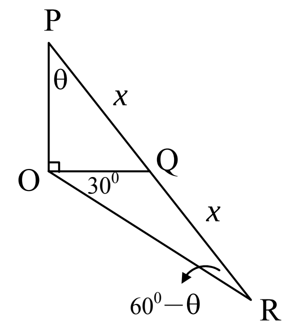
(3)若 $f(x)$ 的最小值是 4，則 $\cos x=\dfrac{4}{\cos x}$，$\Rightarrow$ $\cos x=2$ (不合，$\because -1\le \cos x\le 1$)

但當 $\cos x=1$ 時，$f(x)=5$ 為最小值

(4)$\because$ 當 $|x|\to\dfrac{\pi}{2}$ 時，$\dfrac{1}{\cos x}\to\infty$，$\therefore$ $f(x)$ 沒有最大值。

答：(1)(2) (91 指考甲)

51.某人在 O 點測量到遠處有一物作等速直線運動。開始時該物位置在 P 點，一分鐘後，其位置在 Q 點，且∠POQ＝90^0。再過一分鐘後，該物位置在 R 點，且∠QOR＝30^0。請以最簡分數表示 $\tan^2$(∠OPQ)＝______。



解：(1)如圖，$\because$ 等速直線運動，$\therefore$ 設 $\overline{PQ}=\overline{QR}=x$，∠OPQ＝θ

$\Rightarrow$ $\overline{OQ}=x\sin\theta$，∠ORQ＝$180^0-120^0-\theta=60^0-\theta$

(2)在ΔORQ 中，根據正弦定理

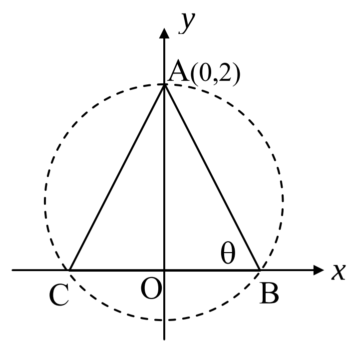
$\dfrac{x}{\sin 30^0}=\dfrac{x\sin\theta}{\sin(60^0-\theta)}$，$\Rightarrow$ $\dfrac{1}{2}\sin\theta=\sin(60^0-\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\dfrac{1}{2}\sin\theta$

$\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$，得 $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore\tan^2\theta=\tan^2(\angle OPQ)=\dfrac{3}{4}$

答：$\dfrac{3}{4}$(91 指考甲)

52.設 n 為正整數，坐標平面上有一等腰三角形，它的三個頂點分別是(0，2)、($\dfrac{1}{n}$，0)、($-\dfrac{1}{n}$，0)。

假設此三角形的外接圓直徑長等於 D_n，則 $\lim\limits_{n\to\infty} D_n$＝_______。(91 指考甲)



解 1：(1)如圖，$\overline{AB}=\overline{AC}=\sqrt{(\frac{1}{n}-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{\frac{1}{n^2}+4}$

(2)在ΔAOB 中，$\sin\theta=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{AB}}=\dfrac{2n}{\sqrt{1+4n^2}}$

(3)根據正弦定理：外接圓直徑長 $D_n=\dfrac{\overline{AC}}{\sin\theta}=\dfrac{4+\frac{1}{n^2}}{2}=2+\dfrac{1}{2n^2}$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}D_n=\lim\limits_{n\to\infty}(2+\dfrac{1}{2n^2})=2+0=2$

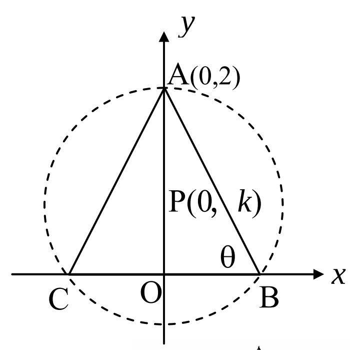
解 2：(1)如圖，$\because$ ΔABC 為等腰三角形，$\therefore$ 外心在 $\overline{OA}$ 上

設外心 P(0，k)，則 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$ ($\because$ 外心到三頂點等距離)

(2)由 $\overline{PA}=\overline{PB}$，$\therefore(k-2)^2=\dfrac{1}{n^2}+k^2$，得知 $k=1-\dfrac{1}{4n^2}$

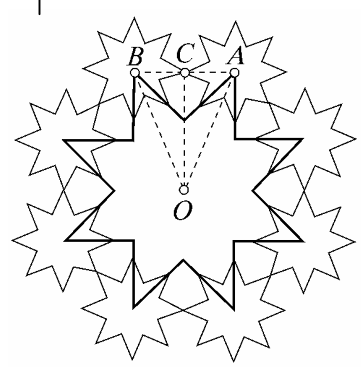
$\therefore$ 外接圓半徑＝$\overline{PA}=2-k=1+\dfrac{1}{4n^2}$，$\therefore D_n=2+\dfrac{1}{2n^2}$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}D_n=\lim\limits_{n\to\infty}(2+\dfrac{1}{2n^2})=2+0=2$



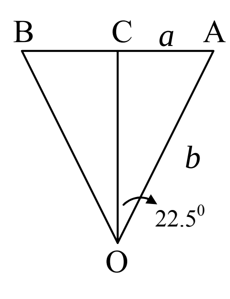
答：2

53.如下圖所示，一個大的正八角星的頂點為周圍八個全等的小正八角星中心，相鄰的兩個小八角星有一個共同的頂點。觀察圖中虛線部分，設小八角星頂點 C 到其中心 A 的距離為 a，大八角星頂點 A 到其中心的距離 O 為 b。試問 $a：b$ 的比值為______。(91 指考乙)



解：(1)如右圖，在ΔAOB 中，∠AOB＝$\dfrac{360^0}{8}=45^0$，$\Rightarrow$∠ AOC＝$\dfrac{1}{2}$∠AOB＝22.5^0

(2)在ΔAOC 中，$\dfrac{a}{b}=\sin 22.5^0=\sqrt{\dfrac{1-\cos 45^\circ}{2}}=\sqrt{\dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$



答：$\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

54.若$(4+3i)(\cos\theta+i\sin\theta)$為小於 0 的實數，則θ是第幾象限角？(92 學測)

(1)第一象限角 (2)第二象限角 (3)第三象限角 (4)第四象限角 (5)條件不足，無法判斷

解 1：$(4+3i)(\cos\theta+i\sin\theta)=(4\cos\theta-3\sin\theta)+i(3\cos\theta+4\sin\theta)$

依題意：實數部份 $4\cos\theta-3\sin\theta<0$，$\Rightarrow 4\cos\theta<3\sin\theta$

虛數部份 $3\cos\theta+4\sin\theta=0$，$\Rightarrow 3\cos\theta=-4\sin\theta$，得 $\tan\theta=-\dfrac{3}{4}$，$\therefore \theta\in$ II

解 2：(1)$\because(4+3i)(\cos\theta+i\sin\theta)$為小於 0 的實數，

即令$(4+3i)(\cos\theta+i\sin\theta)=k<0$，∴得知$(4+3i)(\cos\theta+i\sin\theta)$的主幅角(Arg)為π

(2)設 $4+3i$ 的主幅角為φ，$\therefore 0<\phi<\dfrac{\pi}{2}$

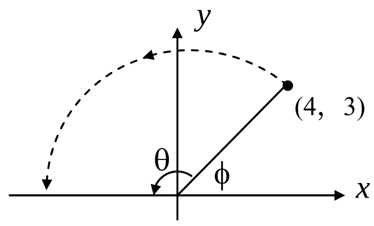
則$(4+3i)(\cos\theta+i\sin\theta)$的幅角為$\theta+\phi$，且$\theta+\phi=2n\pi+\pi$，$n$ 是整數，$\Rightarrow \theta=2n\pi+\pi-\phi$

$\Rightarrow 2n\pi+\dfrac{\pi}{2}<\theta<2n\pi+\pi$，故θ為第二象限角

解 3：如圖，$(4+3i)(\cos\theta+i\sin\theta)$

表示「在複數平面上，將點(4，3)逆時針旋轉 θ」

$\because(4+3i)(\cos\theta+i\sin\theta)<0$，$\therefore \theta\in$ II



答：(2)

55.下列哪些函數的最小正週期為π？(92 學測)

(1) $\sin x+\cos x$ (2) $\sin x-\cos x$ (3) $|\sin x+\cos x|$ (4) $|\sin x-\cos x|$ (5) $|\sin x|+|\cos x|$

解 1：(1) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$，∴週期＝2π

(2) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\dfrac{\pi}{4})$，∴週期＝2π

(3) $|\sin x+\cos x|=|\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})|$，∴週期$=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

(4) $|\sin x-\cos x|=|\sqrt{2}\sin(x-\dfrac{\pi}{4})|$，∴週期$=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

(5)令 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$，則 $f(x+\dfrac{\pi}{2})=|\sin(x+\dfrac{\pi}{2})|+|\cos(x+\dfrac{\pi}{2})|=|\cos x|+|-\sin x|=|\sin x|+|\cos x|=f(x)$

得知 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ 的週期$=\dfrac{\pi}{2}$

解 2：(1)令 $f_1(x)=\sin x+\cos x$，$\because f_1(x+\pi)=\sin(x+\pi)+\cos(x+\pi)=-\sin x-\cos x\neq f_1(x)$，$\therefore f_1(x)$的週期不是π

(2)令 $f_2(x)=\sin x-\cos x$，$\because f_2(x+\pi)=\sin(x+\pi)-\cos(x+\pi)=-\sin x+\cos x\neq f_2(x)$，$\therefore f_2(x)$的週期不是π

(3)令 $f_3(x)=|\sin x+\cos x|$，$\because f_3(x+\pi)=|\sin(x+\pi)+\cos(x+\pi)|=|-\sin x-\cos x|=|\sin x+\cos x|=f_3(x)$，

$\therefore f_3(x)$的週期是π

(4)令 $f_4(x)=|\sin x-\cos x|$，$\because f_4(x+\pi)=|\sin(x+\pi)-\cos(x+\pi)|=|-\sin x+\cos x|=|\sin x-\cos x|=f_4(x)$

$\therefore f_4(x)$的週期是π

(5)令 $f_5(x)=|\sin x|+|\cos x|$，$\because f_5(x+\dfrac{\pi}{2})=|\sin(x+\dfrac{\pi}{2})|+|\cos(x+\dfrac{\pi}{2})|=|\cos x|+|-\sin x|$

$=|\sin x|+|\cos x|=f_5(x)$，$\therefore f_5(x)$的週期是$\dfrac{\pi}{2}$

註：$\because f_5(x+\pi)=|\sin(x+\pi)|+|\cos(x+\pi)|=|-\sin x|+|-\cos x|=|\sin x|+|\cos x|=f_5(x)$

∴會誤判週期為π，但是$\pi=2(\dfrac{\pi}{2})$，週期應該為$\dfrac{\pi}{2}$

答：(3)(4)

56.下列選項當中何者的值最大？(92 學測補)

(1) $\sin 20^0\cos 20^0$ (2) $\sin 35^0\cos 35^0$ (3) $\sin 50^0\cos 50^0$ (4) $\sin 65^0\cos 65^0$ (5) $\sin 80^0\cos 80^0$

解：利用 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta\Rightarrow\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$

(1) $\sin20^0\cos20^0=\dfrac{1}{2}\sin 40^0$

(2) $\sin 35^0 \cos 35^0 = \frac{1}{2}\sin 70^0$

(3) $\sin 50^0 \cos 50^0 = \frac{1}{2}\sin 100^0 = \frac{1}{2}\sin 80^0$

(4) $\sin 65^0 \cos 65^0 = \frac{1}{2}\sin 130^0 = \frac{1}{2}\sin 50^0$

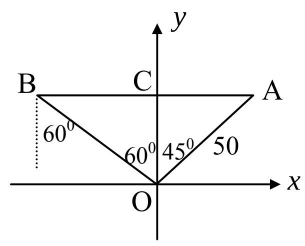
(5) $\sin 80^0 \cos 80^0 = \frac{1}{2}\sin 120^0 = \frac{1}{2}\sin 20^0$

$\because \sin\theta$在第一象限為遞增函數，$\therefore \frac{1}{2}\sin 80^0$ 最大

答：(3)

57.某君在一廣場上從某一點出發，先往東北方前進 50 公尺後轉往正西方向行進，一段時間後測得原出發點在他的南偏東 60^0 方向；則此時他距原出發點大約：(92 學測補)

(1) 35 公尺　(2) 43 公尺　(3) 50 公尺　(4) 71 公尺　(5) 87 公尺



解：(1)如圖，在ΔOAC 中，$\overline{OC} = 25\sqrt{2}$ 公尺

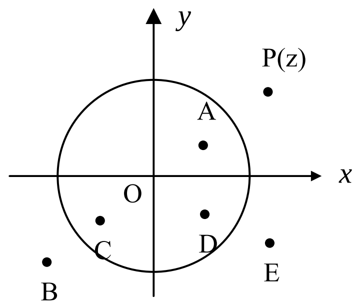
(2)在ΔOBC 中，$\overline{OB} = 2\overline{OC} = 50\sqrt{2} \approx 70$ 公尺

答：(4)

58.如右圖，複數 z 在平面上對應的點 P 在單位圓 O 的外部，

問複數$\frac{1}{z}$對應的點大概是哪一點？(92 學測補)

(1) A　(2) B　(3) C　(4) D　(5) E



解：根據圖形，設複數 $z = a + bi$，$a > 1$，$b > 0$

$\therefore \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$

其中 $0 < \frac{a}{a^2+b^2} < 1$；$0 < \frac{b}{a^2+b^2} < 1$，$\therefore \frac{1}{z}$在第四象限，且位於單位圓 O 的內部，故選 D 點

答：(4)

59.平面上有 A、B、C 三點。已知 B、C 之間的距離是 200 公尺，B、A 之間的距離是 1500 公尺，∠ACB 等於 60°。請問 A、C 之間距離的最佳近似值是哪一個選項？(92 指考甲)

(1) 1500 公尺　(2) 1600 公尺　(3) 1700 公尺　(4) 1800 公尺

解：如右圖，設 $\overline{AC} = x$ 公尺

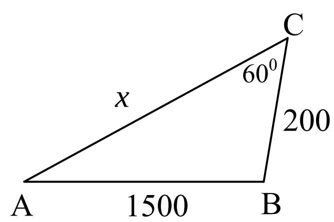
根據餘弦定理：$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC} \times \overline{BC}\cos 60^0$

$\Rightarrow 1500^2 = x^2 + 200^2 - 2x \times 200 \times \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x^2 - 200x - 1700 \times 1300 = 0$，$x = 100 \pm 100\sqrt{222}$

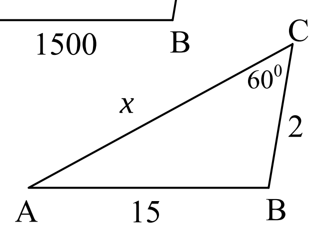
但是，$\because 14^2 = 196 < 222 < 225 = 15^2$，且 222 較接近 225

$\therefore$取 $x = 100 + 100 \times 15 = 1600$



註：若覺得本題數字太大，可以採用百公尺為單位計算，如右圖

$\therefore 15^2 = x^2 + 2^2 - 2x \times 2 \times \frac{1}{2}$，$\Rightarrow x^2 - 2x - 221 = 0$



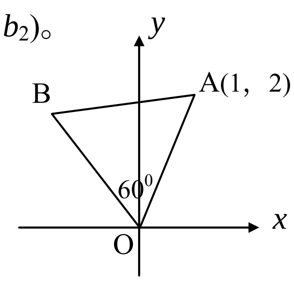
答：(2)

60.如圖所示在坐標平面上，ΔOAB 為一正三角形，其中點 A 的坐標為(1，2)，點 B 為(b_1，b_2)。試問下列何者為真？(92 指考乙)

(1) $b_1 + ib_2 = (\cos 60^0 + i\sin 60^0)(1+2i)$

(2) $b_1 + ib_2 = (\cos 60^0 - i\sin 60^0)(1+2i)$

(3) $(b_1, b_2) = (-1, 2)$



(4) $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60^0 & -\sin 60^0 \\ \sin 60^0 & \cos 60^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60^0 & \sin 60^0 \\ \sin 60^0 & -\cos 60^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

解：(1)∵ΔOAB 為一正三角形，∴$\overline{OB}=\overline{OA}$且∠AOB＝$60^0$

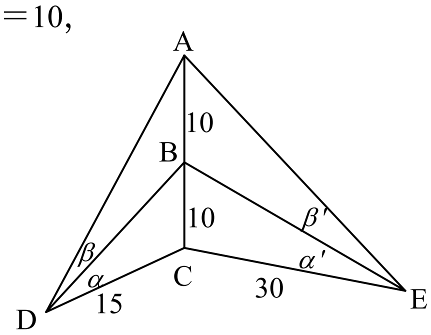
點 A(1＋2i)繞原點逆時針旋轉 60^0 到點 B(b_1＋ib_2)

⇒ $b_1+b_2i=(1+2i)(\cos 60^0+i\sin 60^0)$

(2)由(1)以矩陣表示：$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60^0 & -\sin 60^0 \\ \sin 60^0 & \cos 60^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}+1 \end{bmatrix}$

答：(1)(4)

61.如圖所示的立體示意圖，線段$\overline{AC}$垂直於過 D、C、E 這三點的平面。設$\overline{AB}=\overline{BC}=10$，$\overline{DC}=15$，$\overline{CE}=30$，∠CDB＝$\alpha$，∠BDA＝$\beta$，∠CEB＝$\alpha'$，∠BEA＝$\beta'$。



試問下列何者為真？(92 指考乙)

(1) $\alpha=\beta$　　(2) $\alpha=\alpha'+\beta'$　　(3) $\alpha=2\alpha'$

(4) $\alpha+\beta>\frac{\pi}{3}$　　(5) $\alpha'+\beta'<\frac{\pi}{6}$

解：(1)在ΔBCD 中，$\tan\alpha=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$，

在ΔACD 中，$\tan(\alpha+\beta)=\frac{20}{15}=\frac{4}{3}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3}+\tan\beta}{1-\frac{2}{3}\tan\beta}=\frac{4}{3}$，∴$\tan\beta=\frac{6}{17}$，得知 $\tan\alpha\neq\tan\beta$，∴$\alpha\neq\beta$

(2)在ΔACE 中，$\tan(\alpha'+\beta')=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}=\tan\alpha$，故$\alpha=\alpha'+\beta'$

(3)在ΔBCE 中，$\tan\alpha'=\frac{1}{3}$，$\tan 2\alpha'=\frac{2\tan\alpha'}{1-(\tan\alpha')^2}=\frac{3}{4}\neq\tan\alpha$，所以 $2\alpha'\neq\alpha$

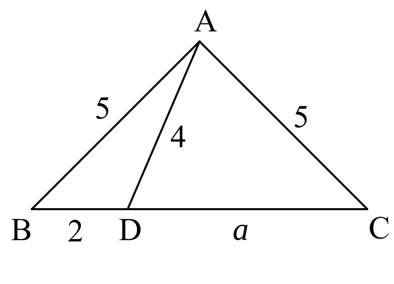
(4)∵$\tan(\alpha+\beta)=\frac{4}{3}<\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{3}$，∴$\alpha+\beta<\frac{\pi}{3}$

(5)∵ $\tan(\alpha'+\beta')=\frac{2}{3}>\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\frac{\pi}{6}$，∴$\alpha'+\beta'>\frac{\pi}{6}$

答：(2)

62.如圖所示 ΔABC 中，D 為邊$\overline{BC}$上一點，且$\overline{AB}=\overline{AC}=5$，$\overline{AD}=4$，$\overline{BD}=2$，$\overline{DC}=a$。則 a＝_____。(92 指考乙)

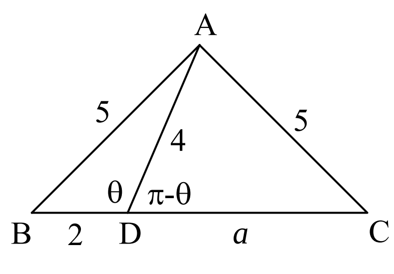
解 1：(1)在ΔABD 中，$\cos B=\frac{5^2+2^2-4^2}{2\times5\times2}=\frac{13}{20}$



(2)在ΔABC 中，$\cos B=\frac{5^2+(2+a)^2-5^2}{2\times5\times(2+a)}=\frac{13}{20}$

⇒ $10(a+2)(2a-9)=0$，∴$a=-2$(不合)或 $a=\frac{9}{2}$

解 2：(1)如右圖，在ΔABD 中，$\cos\theta=\frac{2^2+4^2-5^2}{2\times2\times4}=-\frac{5}{16}$



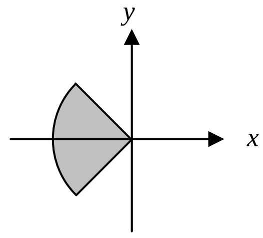
∴$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=\frac{5}{16}$

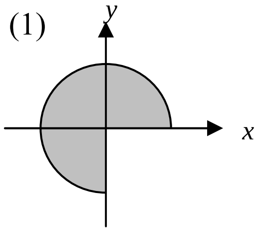
(2)在ΔACD 中，$\cos(\pi-\theta)=\frac{a^2+4^2-5^2}{2\times a\times4}=\frac{5}{16}$

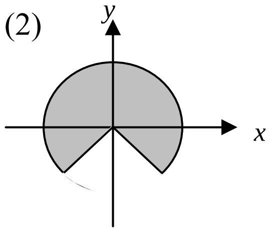
⇒ $2a^2-5a-18=0$，∴$(a+2)(2a-9)=0$，得知 $a=-2$(不合)或 $a=\frac{9}{2}$

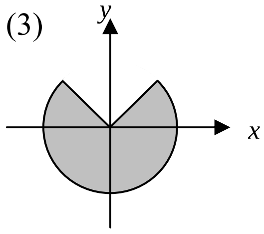
答：$\frac{9}{2}$

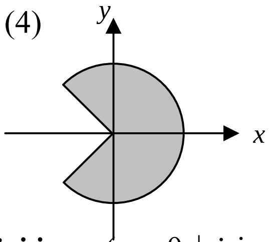
63.右圖陰影部分所示為複數平面上區域 $A=\{z：z=r(\cos\theta+i\sin\theta)，0\le r\le 1，\frac{3\pi}{4}\le\theta\le\frac{5\pi}{4}\}$之略圖。
令 $D=\{w：w=z^3，z\in A\}$，試問下列選項中之略圖，何者之陰影部分與區域 D 最接近？(93 學測)

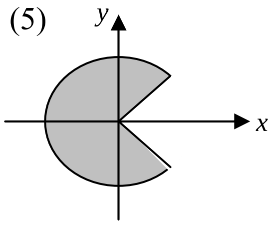


(1)


(2)


(3)


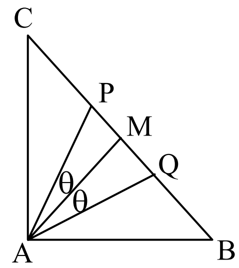
(4)


(5)


解：$\because z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$\therefore w=z^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$

$0\le r\le 1$，$\therefore 0\le r^3\le 1$；又 $\frac{3\pi}{4}\le\theta\le\frac{5\pi}{4}$，$\frac{9\pi}{4}\le 3\theta\le\frac{15\pi}{4}$，故與區域 D 最接近為(5)

答：(5)



64.設ΔABC 為一等腰直角三角形，∠BAC＝90°。若 P、Q 為斜邊 $\overline{BC}$ 的三等分點，
則 tan∠PAQ＝_______。(化成最簡分數)(93 學測)

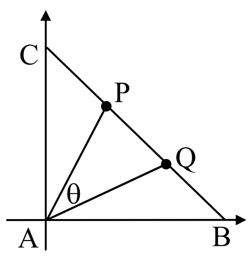
解 1：(1)如圖，作 $\overline{AM}\perp\overline{BC}$ 於 M，∵ΔABC 為一等腰直角三角形，

$\therefore$M 為 $\overline{BC}$ 之中點，且 $\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}$，$\overline{PM}=\overline{QM}$

(2)取 $\overline{PM}=\overline{QM}=1$，則 $\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}=1+2=3$

(3)設∠PAM＝∠QAM＝θ，∴∠PAQ＝2θ

在ΔAPM 中，$\tan\theta=\frac{\overline{PM}}{\overline{AM}}=\frac{1}{3}$，∴tan∠PAQ＝tan 2θ＝$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-(\frac{1}{3})^2}=\frac{3}{4}$



解 2：(1)如圖，座標化，取 A(0，0)，B(3，0)，C(0，3)，則 P(1，2)，Q(2，1)
(2)設∠PAQ＝θ

在ΔPAQ 中，$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AQ}|}=\frac{(1,\ 2)\cdot(2,\ 1)}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$，∴tan∠PAQ＝tan θ＝$\frac{3}{4}$

答：$\frac{3}{4}$

65.設 270°＜A＜360°且 $\sqrt{3}\sin A+\cos A=2\sin 2004°$。若 A＝$m$°，則 m＝_______。(93 學測)

解：(1)利用疊合，$\sqrt{3}\sin A+\cos A=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{1}{2}\cos A)=2(\sin A\cos30°+\cos A\sin30°)=2\sin(A+30°)$

$2\sin 2004°=2\sin(11\times180°+24°)=-2\sin 24°=2\sin(-24°)=2\sin 336°$

(2)∵270°＜A＜360°，∴300°＜A＋30°＜390°，得知 A＋30°＝336°，⇒A＝m°＝306°

答：306

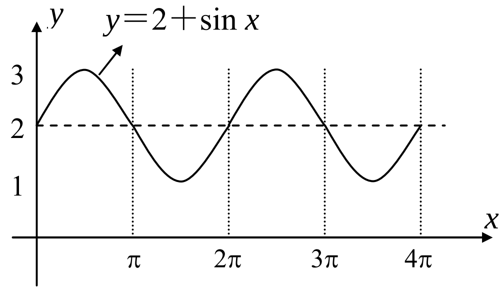
66.設方程式 $x^5=1$ 的五個根為 1，ω_1，ω_2，ω_3，ω_4，則$(3-\omega_1)(3-\omega_2)(3-\omega_3)(3-\omega_4)$＝
(1) 81 (2) 162 (3) 121 (4) 242 (93 指考甲)

解：設 $f(x)=x^5-1$，由題意知 $f(x)=0$ 有五根 1，ω_1，ω_2，ω_3，ω_4，則根據因式定理：
得 $f(x)=x^5-1=(x-1)(x-\omega_1)(x-\omega_2)(x-\omega_3)(x-\omega_4)$
$\therefore f(3)=3^5-1=(3-1)(3-\omega_1)(3-\omega_2)(3-\omega_3)(3-\omega_4)=242$
$\Rightarrow(3-\omega_1)(3-\omega_2)(3-\omega_3)(3-\omega_4)=121$

答：(3)

67.設 $a>0$，令 $A(a)$表示 x 軸、y 軸、直線 $x=a$ 與函數 $y=2+\sin x$ 的圖形所圍成的面積。
下列選項有哪些是正確的？(93 指考甲)
(1) $A(a+2\pi)=A(a)$恆成立　　(2) $A(2\pi)=2A(\pi)$
(3) $A(4\pi)=2A(2\pi)$　　(4) $A(3\pi)-A(2\pi)>A(2\pi)-A(\pi)$

解：如右圖,

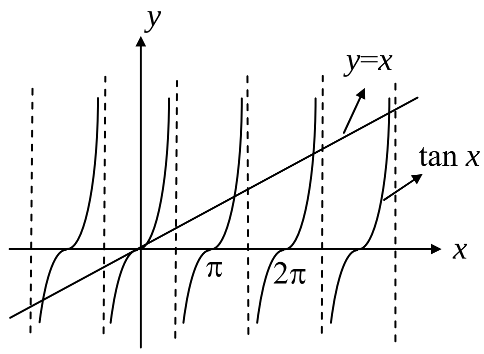


(1) $A(a+2\pi)>A(a)$
(2) $A(2\pi)<2A(\pi)$
(3) $A(4\pi)=2A(2\pi)$
(4) $A(3\pi)-A(2\pi)>A(2\pi)-A(\pi)$

答：(3)(4)

68.將 $\tan x=x$ 的所有正實根由小到大排列，得一無窮數列 x_1，x_2，…，x_n，…
則 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=$______。(四捨五入到小數第二位) (93 指考甲)

解：將 $\tan x=x$ 視為二函數 $\begin{cases} y=x \\ y=\tan x \end{cases}$ 相交情形，如右圖



∵$y=\tan x$ 為遞增之週期函數，且 $y=x$ 亦為遞增函數
∴相交之正實根 x 坐標必趨近於
$y=\tan x$ 之漸近線 $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in N$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{\pi}{2}+(n+1)\pi-(\dfrac{\pi}{2}+n\pi)]=\pi \doteqdot 3.14$

答：3.14

69.若有θ使下述方程組 $\begin{cases} (1+\cos\theta)x-y=0 \\ -x+(1+\sin\theta)y=0 \end{cases}$ 不只有一組解，求 sinθ＋cosθ的值。(93 指考甲)

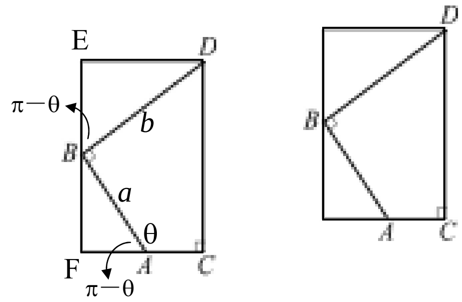
解：(1)∵ x，y 的方程組不只有一組解，∴$\Delta=\begin{vmatrix} 1+\cos\theta & -1 \\ -1 & 1+\sin\theta \end{vmatrix}=0$，$\Rightarrow$ $(\sin\theta+\cos\theta)+\sin\theta\cos\theta=0$

(2)令 $k=\sin\theta+\cos\theta$，$-\sqrt{2}\le k\le\sqrt{2}$，∴$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{k^2-1}{2}$,

代入(1)，$k+\dfrac{k^2-1}{2}=0$，$\Rightarrow$ $k^2+2k-1=0$，∴$k=-1\pm\sqrt{2}$，取 $\sin\theta+\cos\theta=-1+\sqrt{2}$

答：$-1+\sqrt{2}$

70.如下圖∠BAC＝θ，∠ABD＝∠ACD＝90^0，$\overline{AB}=a$，$\overline{BD}=b$。列選項何者可以表示 $\overline{CD}$？
(1) $a\sin\theta+b\cos\theta$　　(2) $a\sin\theta-b\cos\theta$　　(3) $a\cos\theta-b\sin\theta$
(4) $a\cos\theta+b\sin\theta$　　(5) $a\sin\theta+b\tan\theta$



解：(1)如右圖，ΔBDE 與ΔABF 相似，∠BAF＝∠DBE＝π－θ

(2)在ΔBDE 中，$\overline{BE}=b\cos(\pi-\theta)=-b\cos\theta$

在ΔABF 中，$\overline{BF}=a\sin(\pi-\theta)=a\sin\theta$

$\Rightarrow$ $\overline{CD}=\overline{EF}=\overline{BE}+\overline{BF}=a\sin\theta-b\cos\theta$

答：(2) (93 指考乙)

71.若 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$，試問以下哪些選項恆成立？(94 學測)

(1) $\sin\theta<\cos\theta$　(2) $\tan\theta<\sin\theta$　(3) $\cos\theta<\tan\theta$　(4) $\sin 2\theta<\cos 2\theta$　(5) $\tan\frac{\theta}{2}<\frac{1}{2}\tan\theta$

解：(1) $\because 0<\theta<\frac{\pi}{4}$，$0<\sin\theta<\frac{1}{\sqrt{2}}$；$\frac{1}{\sqrt{2}}<\cos\theta<1$，$\therefore \sin\theta<\cos\theta$

(2) $\because 0<\theta<\frac{\pi}{4}$，$\cos\theta<1 \Rightarrow \frac{1}{\cos\theta}>1$，同乘 $\sin\theta>0$，$\therefore \frac{\sin\theta}{\cos\theta}>\sin\theta \Rightarrow \tan\theta>\sin\theta$

(3)當 $\theta=30^0$ 時，$\tan 30^0=\frac{1}{\sqrt{3}}<\cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\theta>\tan\theta$

(4) $\because 0<\theta<\frac{\pi}{4}$，$\therefore 0<2\theta<\frac{\pi}{2}$，則

(i)當 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ 時，$\sin 2\theta<\cos 2\theta$；

(ii)當 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$ 時，$\sin 2\theta>\cos 2\theta$，　故 $\sin 2\theta<\cos 2\theta$ 不一定成立

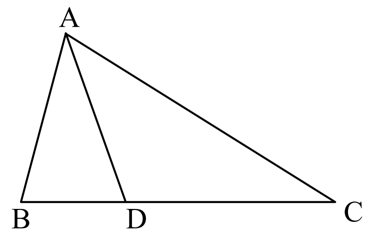
(5) $\tan\theta=\tan(2\times\frac{\theta}{2})=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}>\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1}=2\tan\frac{\theta}{2}$　($\because 0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{8}$，$1-\tan^2\frac{\theta}{2}<1$)

或 $\frac{1}{2}\tan\theta-\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\cdot\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}-\tan\frac{\theta}{2}=\dfrac{\tan^3\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}>0$

($\because 0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{8}$，$1-\tan^2\frac{\theta}{2}>0$ 且 $\tan^3\frac{\theta}{2}>0$)，故 $\tan\frac{\theta}{2}<\frac{1}{2}\tan\theta$

答：(1)(5)

72.如右圖所示，在ΔABC 中，$\angle$BAC 的平分線 AD 交對邊 $\overline{BC}$ 於 D；已知 $\overline{BD}=3$，$\overline{DC}=6$，且 $\overline{AB}=\overline{AD}$，則 $\cos\angle BAD$ 之值為______。(化成最簡分數) (94 學測)

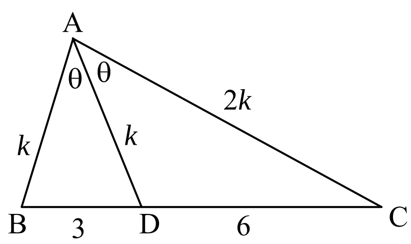


解：(1)如圖，$\because \overline{AD}$ 平分$\angle$BAC，根據內角平分線性質：

$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}=3:6=1:2$，$\therefore$設 $\overline{AB}=\overline{AD}=k$，則 $\overline{AC}=2k$

(2) $\because \overline{AD}$ 平分$\angle$BAC，設$\angle BAD=\angle CAD=\theta$

法 1：利用餘弦定理



在ΔABD 中，$\cos\angle BAD=\dfrac{k^2+k^2-3^2}{2\cdot k\cdot k}$

在ΔCAD 中，$\cos\angle CAD=\dfrac{k^2+(2k)^2-6^2}{2\cdot k\cdot 2k}$

$\therefore \dfrac{k^2+k^2-3^2}{2\cdot k\cdot k}=\dfrac{k^2+(2k)^2-6^2}{2\cdot k\cdot 2k}$，得 $k^2=18$

故 $\cos\angle BAD=\dfrac{k^2+k^2-3^2}{2\cdot k\cdot k}=\dfrac{18+18-3^2}{2\cdot 18}=\dfrac{3}{4}$

法 2：利用面積和與正弦定理

$\because\Delta$ABC 面積$=\Delta$ABD 面積$+\Delta$ACD 面積

$\therefore \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin\theta=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AD}\sin\theta+\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{AD}\sin\theta$，

$\Rightarrow \frac{1}{2}k\cdot 2k\cdot\sin 2\theta=\frac{1}{2}k\cdot k\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}k\cdot 2k\cdot\sin\theta$，得 $\cos\theta=\frac{3}{4}$，故 $\cos\angle BAD=\frac{3}{4}$

答：$\frac{3}{4}$

73. $\dfrac{\sin 3\theta}{\sec 2\theta}-\dfrac{\cos 3\theta}{\csc 2\theta}$ 可化簡為(1) $\sin\theta$　(2) $\cos\theta$　(3) $\tan\theta$　(4) $\cot\theta$　(94 指考甲)

解：$\dfrac{\sin 3\theta}{\sec 2\theta}-\dfrac{\cos 3\theta}{\csc 2\theta}=\sin 3\theta\cos 2\theta-\cos 3\theta\sin 2\theta=\sin(3\theta-2\theta)=\sin\theta$

答：(1)

74.令 $i=\sqrt{-1}$，$\bar{z}$ 表複數 z 的共軛複數。在複數平面上，所有滿足方程式 $(1+i)\,z-(1-i)\,\bar{z}=0$ 的複數 z，會形成下列哪種的圖形？(1)一點　(2)一圓　(3)一直線　(4)兩直線　(94 指考甲)

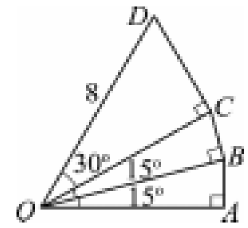
解：設複數 $z=x+y\,i$，x，$y\in\mathrm{R}$，$\therefore \bar{z}=x-y\,i$，代入方程式 $(1+i\,)\,z-(1-i)\,\bar{z}=0$

$\Rightarrow (1+i)(\,x+y\,i)-(1-i)(\,x-yi)=0$，$\Rightarrow (x-y)+(x+y)\,i=(x-y)-(x+y)\,i$，$\Rightarrow\ x+y=0$

答：(3)

75.右圖是由三個直角三角形堆疊而成的圖形，且 $\overline{OD}=8$。問：直角三角形 OAB 的高 $\overline{AB}$ 為何？(95 學測)

(1) 1　(2) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$　(3) $\sqrt{7}-1$　(4) $\sqrt{3}$　(5) 2



解：在ΔDOC 中，$\overline{OC}=\overline{OD}\cos 30^0=8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

在ΔCOB 中，$\overline{OB}=\overline{OC}\cos 15^0=4\sqrt{3}\cos 15^0$

在ΔBOA 中，$\overline{AB}=\overline{OB}\cos 15^0=(4\sqrt{3}\cos 15^0)\sin 15^0=2\sqrt{3}\,(2\cos 15^0\sin 15^0)=\sqrt{3}$

答：(4)

76.下列哪一個數值最接近 $\sqrt{2}$ ？(95 學測)

(1) $\sqrt{3}\cos 44^0+\sin 44^0$　(2) $\sqrt{3}\cos 54^0+\sin 54^0$　(3) $\sqrt{3}\cos 64^0+\sin 64^0$

(4) $\sqrt{3}\cos 74^0+\sin 74^0$　(5) $\sqrt{3}\cos 84^0+\sin 84^0$

解：各選項的模式皆為 $\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta$，利用疊合化簡

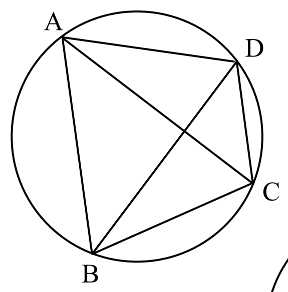
$\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\dfrac{1}{2}\sin\theta)=2(\sin 60^0\cos\theta+\cos 60^0\sin\theta)=2\sin(60^0+\theta)$

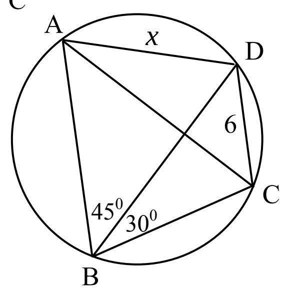
$\therefore$若 $2\sin(60^0+\theta)=\sqrt{2}$ 時，$\sin(60^0+\theta)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，得知 $60^0+\theta=45^0$ 或 135^0，故 $\theta=-15^0$ 或 75^0。

即 $\sqrt{3}\cos 74^0+\sin 74^0$ 最接近 $\sqrt{2}$。

答：(4)

77.如圖所示，ABCD 為圓內接四邊形：若 $\angle\mathrm{DBC}=30^0$，$\angle\mathrm{ABD}=45^0$，$\overline{CD}=6$，則線段 $\overline{AD}=$____。(95 學測)





解 1：設此外接圓半徑為 R，$\overline{AD}=x$，根據正弦定理得知：

在ΔDBC 中，$\dfrac{\overline{CD}}{\sin\angle DBC}=\dfrac{6}{\sin 30^0}=2\mathrm{R}$

在ΔABD 中，$\dfrac{\overline{AD}}{\sin\angle ABD}=\dfrac{x}{\sin 45^0}=2\mathrm{R}$

$\therefore \dfrac{6}{\sin 30^0}=\dfrac{x}{\sin 45^0}\ \Rightarrow\ x=\dfrac{6}{\sin 30^0}\times\sin 45^0=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$

註：$\angle\mathrm{DAC}=\angle\mathrm{DBC}=30^0$，$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{ACD}=45^0$

解 2：(1)∵ABCD 為圓內接四邊形，$\therefore\angle\mathrm{DCB}+\angle\mathrm{DAB}=180^0$，$\sin(\angle\mathrm{DCB})=\sin(180^0-\angle\mathrm{DAB})=\sin(\angle\mathrm{DAB})$

(2)在ΔDBC 中，$\dfrac{\overline{CD}}{\sin\angle DBC}=\dfrac{6}{\sin 30^0}=\dfrac{\overline{BD}}{\sin\angle DBC}$

在ΔABD 中，$\dfrac{\overline{AD}}{\sin\angle ABD}=\dfrac{x}{\sin 45^0}=\dfrac{\overline{BD}}{\sin\angle DAB}=\dfrac{\overline{BD}}{\sin\angle DBC}$，

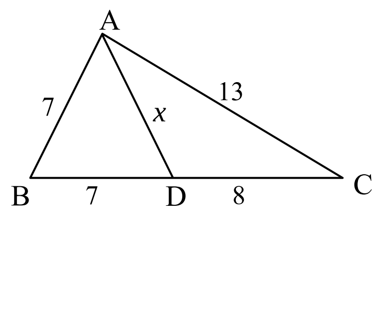
$\therefore \dfrac{6}{\sin 30^0}=\dfrac{x}{\sin 45^0}\Rightarrow\ x=\dfrac{6}{\sin 30^0}\times\sin 45^0=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$

答：$\sqrt{72}=6\sqrt{2}$

78.在三角形 ABC 中，若 D 點在 $\overline{BC}$ 邊上，且 $\overline{AB}=7$，$\overline{AC}=13$，$\overline{BD}=7$，$\overline{CD}=8$，則 $\overline{AD}=$_____。(95 學測)

解：如圖，設 $\overline{AD}=x$，利用餘弦定理

在ΔABD 中，$\cos\mathrm{B}=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-\overline{AD}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BD}}=\dfrac{7^2+7^2-x^2}{2\times 7\times 7}$

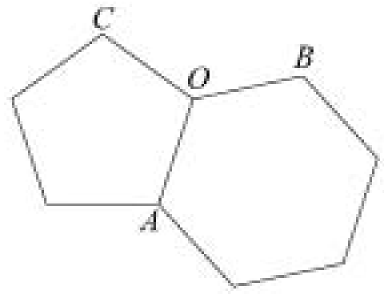


在ΔABC 中，$\cos B=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{BS}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BC}}=\dfrac{7^2+15^2-13^2}{2\times7\times15}$

$\therefore \dfrac{7^2+7^2-x^2}{2\times7\times7}=\dfrac{7^2+15^2-13^2}{2\times7\times15} \Rightarrow \dfrac{98-x^2}{7}=\dfrac{105}{15}$，　$\Rightarrow x^2=49$，取 $x=\overline{AD}=7$

答：$\overline{AD}=7$

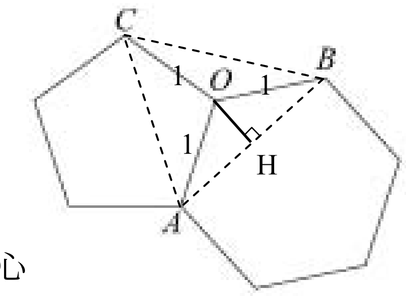
79.嘌呤是構成人體基因的重要物質，它的化學結構式主要是由一個正五邊形與一個正六邊形構成(令它們的邊長均為 1)的平面圖形，如下圖所示：試問以下哪些選項是正確的？(95 指考乙)



(1) $\angle BAC=54^0$　　(2) O 是ΔABC 的外接圓圓心

(3) $\overline{AB}=\sqrt{3}$　　(4) $\overline{BC}=2\sin 66^0$

解：(1)如右圖,



$\because \angle AOB=\dfrac{(6-2)\times180^0}{6}=120^0$；$\angle OAB=\dfrac{180^0-120^0}{2}=\angle OBA=30^0$

$\because \angle AOC=\dfrac{(5-2)\times180^0}{5}=108^0$；$\therefore \angle OCA=\angle OAC=\dfrac{180^0-108^0}{2}=36^0$

$\Rightarrow \angle BAC=30^0+36^0=66^0$

(2)$\because \overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=1$，$\therefore$O 是ΔABC 之外心，亦即 O 是ΔABC 外接圓之圓心

(3)在ΔOAB 中，作$\overline{OH}\perp\overline{AB}$於 H，則$\overline{OH}=\dfrac{1}{2}$，$\overline{AH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\overline{BH}$，$\therefore$得知$\overline{AB}=\sqrt{3}$

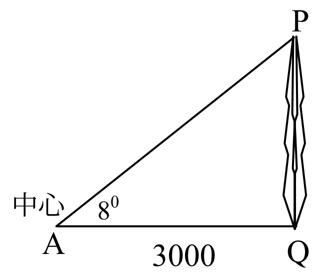
(4)在ΔABC 中，若外接圓半徑為 R，且由(2)知 R＝1

利用正弦定理：$2R=\dfrac{\overline{BC}}{\sin\angle BAC}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin 66^0}=2$，$\therefore \overline{BC}=2\sin 66^0$

答：(2)(3)(4)

80.某機場基於飛航安全考量，限制機場附近建築物從機場中心地面到建築物頂樓的仰角不得超過 8^0。某建築公司打算在離機場中心 3 公里且地表高度和機場中心一樣高的地方蓋一棟平均每樓層高 5 公尺的大樓 在符合機場的限制規定下，該大樓在地面以上最多可以蓋____層樓。

(參考數據：sin8≒0.1392，cos8≒0.9903，tan8≒0.1405) (95 指考乙)



解：如右圖，設蓋 x 層樓，$\therefore$樓高$\overline{PQ}=5x$ 公尺

根據題意知 $\tan8°>\dfrac{5x}{3000}$，$\Rightarrow 0.1405>\dfrac{5x}{3000}$

$\Rightarrow 5x<421.5$，$\therefore x<84.3$，$\therefore$取＝84，即大樓最多可蓋 84 層

答：84

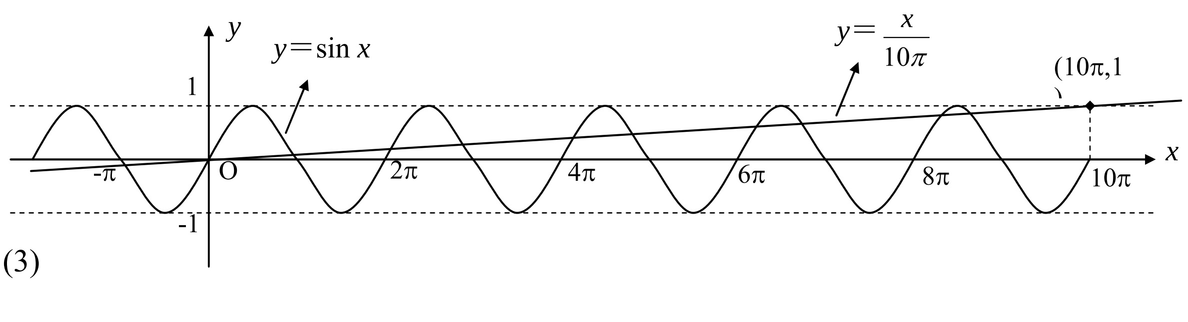
81.關於坐標平面上函數 $y=\sin x$ 的圖形和 $y=\dfrac{x}{10\pi}$ 的圖形之交點個數，下列哪一個選項是正確的？(96 學測)

(1)交點的個數是無窮多　　(2)交點的個數是奇數且大於 20　　(3)交點的個數是奇數且小於 20

(4)交點的個數是偶數且大於或等於 20　　(5)交點的個數是偶數且小於 20

解：如下圖，$\because y=\sin x$ 的圖形與 $y=\dfrac{x}{10\pi}$ 的圖形均對稱於原點，且在 x 軸右方有 9 個交點

$\Rightarrow$ 共有 2×9＋1＝19 個交點

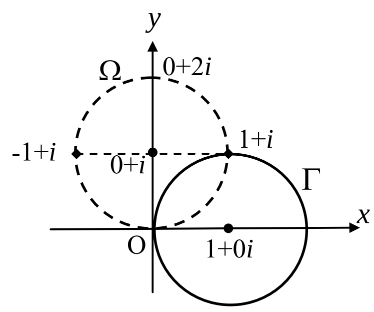


答：(3)

82.若Γ＝{z | z 為複數且| z－1|＝1}，則下列哪些點會落在圖形Ω＝{w| w=iz，z$\in\Gamma$}上？(96 學測)

(1) $2i$　(2)－$2i$　(3) $1+i$　(4) $1-i$　(5)－$1+i$

解 1：如圖,



Γ：| z－1|＝1 表示複數平面上，以(1＋0i)為圓心，半徑＝1 的圓

Ω：w＝iz＝($\cos 90^0+i\sin 90^0$) z,

表示將點 z 依逆時針旋轉 90^0 得到點 w,

其圖形為以(0＋i)為圓心，半徑＝1 的圓，得知 $2i$，$1+i$，$-1+i$ 在圖形Ω上

解 2：∵Ω：w＝iz　⇒ $z=\dfrac{w}{i}$，即將各選項之 w 除以 i，判定是否在 Γ之圖形上

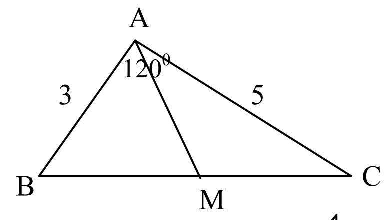
(1)$\dfrac{w}{i}=\dfrac{2i}{i}=2\in\Gamma$　(2)$\dfrac{w}{i}=\dfrac{-2i}{i}=-2\notin\Gamma$　(3)$\dfrac{w}{i}=\dfrac{1+i}{i}=1-i\in\Gamma$

(4)$\dfrac{w}{i}=\dfrac{1-i}{i}=-1-i\notin\Gamma$　(5)$\dfrac{w}{i}=\dfrac{-1+i}{i}=1+i\in\Gamma$

答：(1)(2)(5)

83.在ΔABC 中，M 為$\overline{BC}$邊之中點，若$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=5$，且∠BAC＝120^0，則 tan∠BAM _____。(化成最簡根式)

解 1：如右圖,

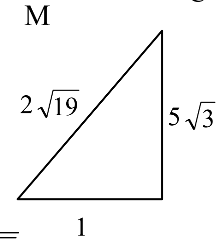


(1)在ΔABC 中，根據餘弦定理$\overline{BC}^2=3^2+5^2-2\times3\times5\times\cos120^0=49$　⇒$\overline{BC}=7$

(2)在ΔABC 中，∵M 為$\overline{BC}$邊之中點，$\overline{BM}=\dfrac{7}{2}$

根據中線定理，$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{BM}^2+\overline{AM}^2)$

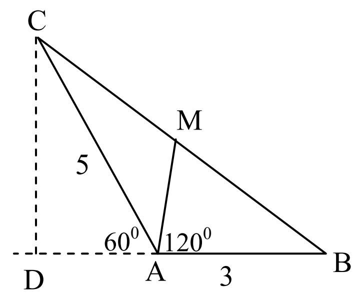
得 $3^2+5^2=2[(\dfrac{7}{2})^2+\overline{AM}^2)]\Rightarrow\overline{AM}=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$



(3)在ΔABM 中，根據餘弦定理 $\cos(\angle BAM)=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AM}^2-\overline{BM}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AM}}=\dfrac{3^2+(\frac{\sqrt{19}}{2})^2-(\frac{7}{2})^2}{2\times3\times\frac{\sqrt{19}}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{19}}$

(4)∴$\tan(\angle BAM)=5\sqrt{3}$

解 2：(1)如右圖，建立座標化：定 A(0，0)，B(3，0)



(2)在ΔACD 中，$\overline{AD}=5\cos60^0=\dfrac{5}{2}$，$\overline{CD}=5\sin60^0=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

∴C($-\dfrac{5}{2}$，$\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$)

(3)∵M 為$\overline{BC}$邊之中點 ⇒ M($\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$)，∴$\tan(\angle BAM)=\dfrac{y\text{分量}}{x\text{分量}}=\dfrac{\frac{5\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{4}}=5\sqrt{3}$

答：5　(96 學測)

84. x 代表實數，請選出正確的選項：(96 指考乙)

(1)當 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$時，$\cos 2x$ 之值恆為正　(2)當 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$時，$\sin 2x$ 之值恆為正

(3)不論 x 為何，$\cos^2 x-\sin^2 x\le\dfrac{1}{2}$恆成立　(4)不論 x 為何，$\sin x\cos x\le\dfrac{1}{2}$恆成立

(5)不論 x 為何，$\sin x+\cos x\le\dfrac{3}{2}$恆成立

解：(1)錯：∵$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，∴$0<2x<\pi$，則若 $2x$ 是第二象限角，$\cos2x<0$

(2)對：∵$0<2x<\pi$，$2x$ 是第一或第二象限角，故 $\sin 2x$ 恆為正

(3)錯：∵當 $x=0$ 時，$\cos^2 0-\sin^2 0=1-0>\dfrac{1}{2}$

(4)對：$\sin x\cos x=\frac{1}{2}(2\sin x\cos x)=\frac{1}{2}\sin 2x\le \frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$

(5)對：$\because \sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\le\sqrt{2}\le\frac{3}{2}$

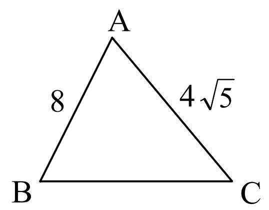
答：(2)(4)(5)

85.若三角形 ABC 的 $\overline{AB}=8$，$\overline{AC}=4\sqrt{5}$ 及 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{\sqrt{5}}$，則 $\sin(\angle ACB)=$_______。(化為最簡分數) (96 指考乙)

解：(1)由餘弦定理知，$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos(\angle BAC)$

$=8^2+(4\sqrt{5})^2-2\times 8\times 4\sqrt{5}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=80$

$\Rightarrow\ \overline{BC}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$



(2)$\because\cos(\angle BAC)=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\therefore\sin(\angle BAC)=\frac{2}{\sqrt{5}}$

利用正弦定理：$\frac{\sin(\angle BAC)}{\overline{BC}}=\frac{\sin(\angle ACB)}{\overline{AB}}$，$\Rightarrow\ \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{4\sqrt{5}}=\frac{\sin(\angle ACB)}{8}$

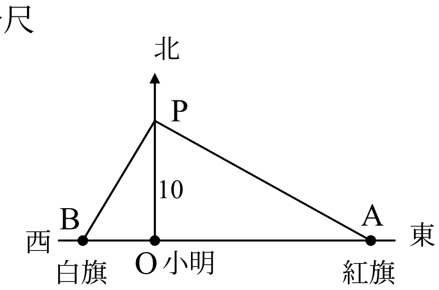
$\therefore\sin(\angle ACB)=\frac{4}{5}$

答：$\frac{4}{5}$

86.廣場上插了一支紅旗與一支白旗，小明站在兩旗子之間。利用手邊的儀器，小明測出他與正東方紅旗間的距離為他與正西方白旗間距離的 6 倍；小明往正北方走了 10 公尺之後再測量一次，發現他與紅旗的距離變成他與白旗距離的 4 倍。試問紅白兩旗之間的距離最接近下列哪個選項？(97 學測 5)

(1) 60 公尺　(2) 65 公尺　(3) 70 公尺　(4) 75 公尺　(5) 80 公尺

解 1：根據題意作圖如右：



設 $\overline{OA}=6a$，$\overline{OB}=a$；$\overline{PA}=4b$，$\overline{PB}=b$，a，b 為正數

在 ΔBOP 中，$b^2=a^2+10^2$ ····①

在 ΔAOP 中，$(4b)^2=(6a)^2+10^2$ ····②

由①②得知 $a=5\sqrt{3}$，$b=5\sqrt{7}$

$\therefore$紅白兩旗之間的距離$=7a=35\sqrt{3}\doteqdot 60.6$

解 2：如右圖，設 $\overline{OA}=6a$，$\overline{OB}=a$；$\overline{PB}=\sqrt{a^2+10^2}$，$\overline{PA}=\sqrt{(6a)^2+10^2}$

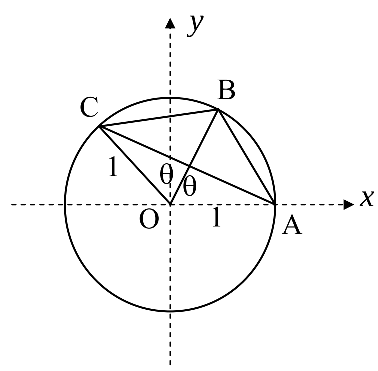
$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{\sqrt{(6a)^2+10^2}}{\sqrt{a^2+10^2}}=\frac{4}{1}$，平方解得 $a=5\sqrt{3}$，

$\therefore$紅白兩旗之間的距離$=7a=35\sqrt{3}\doteqdot 60.6$

答：(1)

87.坐標平面上，以原點 O 為圓心的圓上有三個相異點 A(1，0)，B，C，且 $\overline{AB}=\overline{BC}$。已知銳角三角形 OAB 的面積為 $\frac{3}{10}$，則 ΔOAC 的面積為_____。(化為最簡分數)(97 學測 C)

解：如右圖，不失為一般性



$\because\overline{AB}=\overline{BC}$，設$\angle BOA=\angle BOC=\theta$ (等弦對等弧，等弧對等圓心角)

$\Delta OAB=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\sin\theta=\frac{3}{10}$，$\Rightarrow\sin\theta=\frac{3}{5}\ \Rightarrow\cos\theta=\frac{4}{5}$ (θ為銳角)

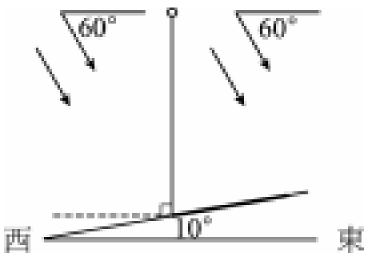
則 $\Delta OAC=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OC}\cdot\sin 2\theta=\sin\theta\cos\theta=\frac{12}{25}$

答：$\frac{12}{25}$

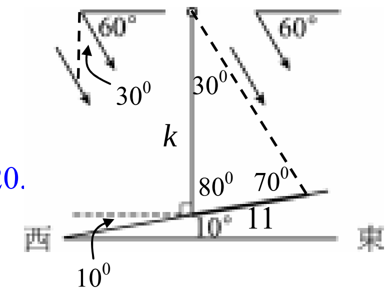
88.在與水平面成10°的東西向山坡上，鉛直(即與水平面垂直)立起一根旗竿。當陽光從正西方以俯角60°平行投射在山坡上時，旗竿的影子長為11公尺，如右圖所示(其中箭頭表示陽光投射的方向，而粗黑線段表示旗竿的影子)。請問旗竿的長度最接近以下哪一選項？(97指甲2)

(1)19.1　(2)19.8　(3)20.7　(4)21.1　(5)21.7　公尺

參考數值：$\sin 10^\circ \approx 0.174$，$\sin 20^\circ \approx 0.342$，$\cos 10^\circ \approx 0.985$，$\cos 20^\circ \approx 0.940$，$\sqrt{3} \approx 1.732$



解：設旗竿的長度為k公尺，如右圖



由正弦定理得$\dfrac{k}{\sin 70^0}=\dfrac{11}{\sin 30^0}$

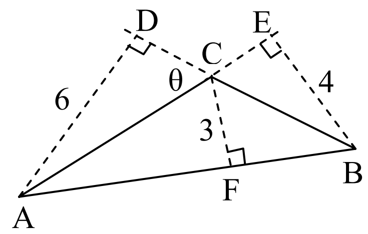
$\therefore k=\dfrac{11}{\sin 30^0}\times\sin 70^0=22\times\cos 20^0=22\times0.940=20.68$　20.

答：(3)

89.設ΔABC的三高分別為$\overline{AD}=6$，$\overline{BE}=4$，$\overline{CF}=3$，

(1)試證：ΔABC是一鈍角三角形　　(2)試求ΔABC的面積　(97指甲二)

解：(1)1.$\because$三高$\overline{AD}=6$，$\overline{BE}=4$，$\overline{CF}=3$，$\therefore$三邊長$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=\dfrac{1}{3}:\dfrac{1}{6}:\dfrac{1}{4}=4:2:3$



得知$\overline{AB}$為最長邊，故$\angle C$為最大角

2.設$\overline{AB}=4k$，$\overline{BC}=2k$，$\overline{CA}=3k$，$k>0$

根據餘弦定理$\cos C=\dfrac{(2k)^2+(3k)^2-(4k)^2}{2\times 2k\times 3k}=-\dfrac{1}{4}<0$

得$\angle C$為鈍角，$\therefore\Delta$ABC是一鈍角三角形

(2)法1：如右圖，在ΔCAD中，$\csc\theta=\csc(180^0-\angle C)=\csc(\angle C)=\dfrac{4}{\sqrt{15}}$

$\overline{AC}=\overline{AD}\csc\theta=6\times\dfrac{4}{\sqrt{15}}=\dfrac{8\sqrt{15}}{5}$，$\therefore\Delta$ABC面積$=\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BE}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{8\sqrt{15}}{5}\times4=\dfrac{16\sqrt{15}}{5}$

法2：由(1)，設$\overline{AB}=4k$，$\overline{BC}=2k$，$\overline{CA}=3k$，$k>0$

$\because\Delta$ABC面積$=\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}\times\sin C=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CF}$，$\therefore\dfrac{1}{2}\times3k\times2k\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{1}{2}\times4k\times3$，得$k=\dfrac{8}{\sqrt{15}}$，

$\Rightarrow\Delta$ABC面積$=\dfrac{1}{2}\times4k\times3=6k=\dfrac{16\sqrt{15}}{5}$

法2：海龍公式

$s=\dfrac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})=\dfrac{1}{2}(4k+2k+3k)=\dfrac{9k}{2}$

ΔABC面積$=\sqrt{s(s-4k)(s-2k)(s-3k)}=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CF}=\dfrac{1}{2}\times4k\times3$

$\Rightarrow\dfrac{3\sqrt{15}}{4}k^2=6k$，$\Rightarrow$得$k=\dfrac{8}{\sqrt{15}}$，$\therefore\Delta$ABC面積$=6k=\dfrac{16\sqrt{15}}{5}$

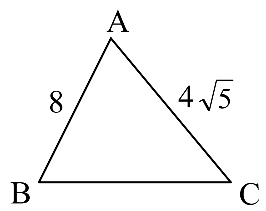
答：(1)略；(2)$\dfrac{16\sqrt{15}}{5}$

90.若三角形ABC的$\overline{AB}=8$，$\overline{AC}=4\sqrt{5}$及$\cos(\angle BAC)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，則$\sin(\angle ACB)=$_______。(化為最簡分數)(97指乙C)

解：(1)由餘弦定理知，$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos(\angle BAC)$

$=8^2+(4\sqrt{5})^2-2\times8\times4\sqrt{5}\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}=80$

$\Rightarrow\overline{BC}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$



(2)$\because\cos(\angle BAC)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\therefore\sin(\angle BAC)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

利用正弦定理：$\dfrac{\sin(\angle BAC)}{\overline{BC}}=\dfrac{\sin(\angle ACB)}{\overline{AB}}$，$\Rightarrow\dfrac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{4\sqrt{5}}=\dfrac{\sin(\angle ACB)}{8}$

$\therefore\sin(\angle ACB)=\dfrac{4}{5}$

答：$\dfrac{4}{5}$

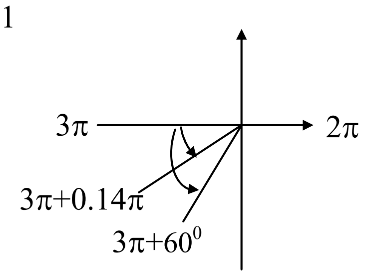
91.令 $a=\cos(\pi^2)$，試問下列哪一個選項是對的？(98 學測 2)

(1) $a=-1$　(2) $-1<a\le -\dfrac{1}{2}$　(3) $-\dfrac{1}{2}<a\le 0$　(4) $0<a\le \dfrac{1}{2}$　(5) $\dfrac{1}{2}<a\le 1$

解：$\because \pi^2=(3.14\cdots)^2 \doteqdot 9.86=6.28+3.48 \doteqdot 3.14\pi$

$\therefore \pi^2$ 在第三象限內，$\Rightarrow 3\pi<\pi^2\le \dfrac{10}{3}\pi$，如右圖

$\therefore -1=\cos 3\pi<\cos \pi^2\le \cos\dfrac{10}{3}\pi=-\dfrac{1}{2}$



答：(2)

92.假設甲、乙、丙三鎮兩兩之間的距離皆為 20 公里。兩條筆直的公路交於丁鎮，其中之一通過甲、乙兩鎮而另一通過丙鎮。今在一比例精準的地圖上量得兩公路的夾角為 45^0，則丙、丁兩鎮間的距離約為　(98 學測 5)

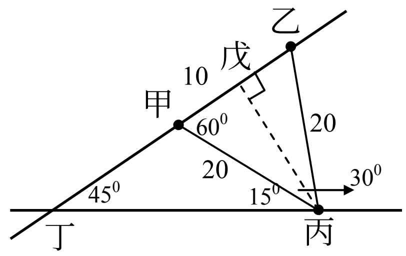
(1) 24.5 公里　(2) 25 公里　(3) 25.5 公里　(4) 26 公里　(5) 26.5 公里

解 1：(1)如右圖，取甲、乙兩鎮的中點戊，連接線段丙戊

$\because \Delta$甲乙丙為正三角形，$\therefore \overline{丙戊}$ 垂直 $\overline{甲乙}$

(2)在直角Δ甲丙戊中，得知 $\overline{丙戊}=10\sqrt{3}$

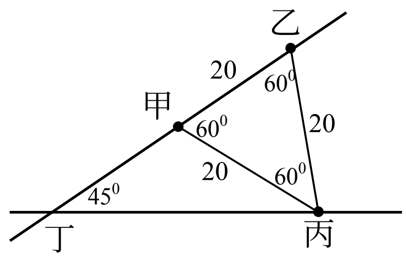
(3)在等腰直角Δ丁丙戊中，$\overline{丙丁}=\sqrt{2}\,\overline{丙戊}=10\sqrt{6}\doteqdot 24.5$



解 2：(1)如右圖，$\because \Delta$甲乙丙為正三角形，$\therefore \angle 乙=60^0$

(2)在Δ乙丙丁中，根據正弦定理：$\dfrac{\overline{乙丙}}{\sin 45^0}=\dfrac{\overline{丙丁}}{\sin 60^0}$

$\Rightarrow \dfrac{20}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{\overline{丙丁}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，$\therefore \overline{丙丁}=10\sqrt{6}\doteqdot 24.5$



解 3：(1)如右圖，過甲作 $\overline{甲戊}$ 垂直 $\overline{丙丁}$ 於戊

在Δ甲丁戊中，設 $\overline{丁戊}=\overline{甲戊}=x$

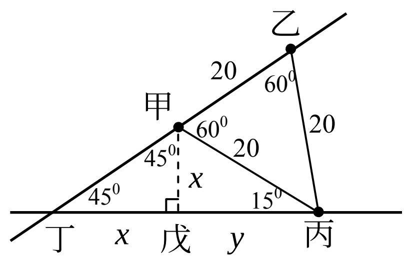
在Δ甲丙戊中，設 $\overline{丙戊}=y$

(2)在Δ甲丙戊中，

$\overline{丁戊}=x=20\sin 15^0=20\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=5\sqrt{6}-5\sqrt{2}$

$\overline{丙戊}=y=20\cos 15^0=20\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=5\sqrt{6}+5\sqrt{2}$

$\Rightarrow \overline{丙丁}=x+y=(5\sqrt{6}-5\sqrt{2})+(5\sqrt{6}+5\sqrt{2})=10\sqrt{6}\doteqdot 24.5$



答：(1)

93.試問下列哪些選項中的數是有理數？(98 學測 7)

(1) 3.1416　(2) $\sqrt{3}$　(3) $\log_{10}\sqrt{5}+\log_{10}\sqrt{2}$

(4) $\dfrac{\sin 15^0}{\cos 15^0}+\dfrac{\cos 15^0}{\sin 15^0}$　(5)方程式 $x^3-2x^2+x-1=0$ 的唯一實根

解：根據題意，即哪些數可以表示為 $\dfrac{q}{p}$ 之型式

(1) $3.1416=\dfrac{31416}{10000}$ 是有理數

(2) $\sqrt{3}$ 為無理數，不可以表示成 $\dfrac{q}{p}$ 之型式

(3) $\log_{10}\sqrt{5}+\log_{10}\sqrt{2}=\log_{10}\sqrt{10}=\dfrac{1}{2}$ 是有理數

(4) $\dfrac{\sin 15^0}{\cos 15^0}+\dfrac{\cos 15^0}{\sin 15^0}=\dfrac{2(\sin^2 15^0+\cos^2 15^0)}{2\sin 15^0\cos 15^0}=\dfrac{2}{\sin 30^0}=4$ 是有理數

或 $\dfrac{\sin 15^0}{\cos 15^0}+\dfrac{\cos 15^0}{\sin 15^0}=\tan 15^0+\cot 15^0=(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=4$

(5)根據實係數多項式方程式有理根檢驗法(牛頓法)得之，方程式可能之有理根為±1

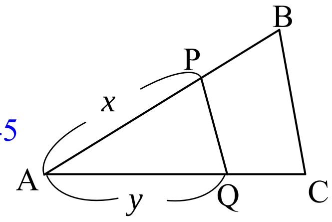
當 $x=1$ 時，不滿足方程式 $x^3-2x^2+x-1=0$

當 $x=-1$ 時，不滿足方程式 $x^3-2x^2+x-1=0$

∴方程式 $x^3-2x^2+x-1=0$ 的唯一實根，不是有理數

答：(1)(3)(4)

94.在ΔABC 中，$\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=9$，$\cos\angle BAC=\dfrac{3}{8}$。設點 P，Q 分別在邊 AB、AC 上使得ΔAPQ 之面積為ΔABC 面積之一半，則 $\overline{PQ}$ 之最小可能值為______。(化成最簡分數) (98 學測 I)



解：(1)如右圖，設 $\overline{AP}=x$，$\overline{AQ}=y$

∵ΔAPQ 面積$=\dfrac{1}{2}$ΔABC 面積，∴$\dfrac{1}{2}\times x\times y\times\sin A=\dfrac{1}{2}\times 10\times 9\times\sin A\times\dfrac{1}{2}$，得知 $xy=45$

(2)根據餘弦定理 $\overline{PQ}^2=x^2+y^2-2xy\cos A=x^2+y^2-2\times 45\times\dfrac{3}{8}=x^2+y^2-\dfrac{135}{4}$

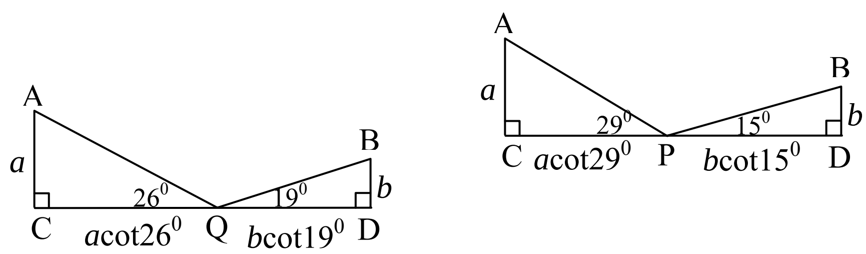
又由算幾不等式得 $x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2y^2}=2xy=90$

$\Rightarrow\ \overline{PQ}^2=x^2+y^2-\dfrac{135}{4}\geq 90-\dfrac{135}{4}=\dfrac{225}{4}$，∴$\overline{PQ}\geq\dfrac{15}{2}$

答：$\dfrac{15}{2}$

95.在 A、B 兩支旗竿底端連線段中的某一點測得 A 旗竿頂端的仰角為29°、B 旗竿頂端的仰角為15°。在底端連線段中的另一點測得 A 旗竿頂端的仰角為26°、B 旗竿頂端的仰角為19°。則 A 旗竿高度和 B 旗竿高度的比值約為______。(四捨五入到小數點後第一位)(98 指甲 A)

θ	15°	19°	26°	29°
$\cot\theta$	3.73	2.90	2.05	1.80



解：根據題意，如右二圖，設 A 旗竿高

$\overline{CP}+\overline{PD}=\overline{CQ}+\overline{QP}$

∴$a\cot 29^0+b\cot 15^0=a\cot 26^0+b\cot 19^0$

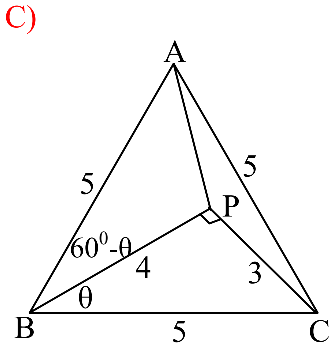
$1.8a+3.73b=2.05a+2.9b$

$\Rightarrow 0.25\,a=0.83\,b$，$\Rightarrow\dfrac{a}{b}=\dfrac{0.83}{0.25}=3.32$

答：3.3

96.ΔABC 為邊長為 5 的正三角形，P 點在三角形內部，若線段長度 $\overline{PB}=4$ 且 $\overline{PC}=3$，則 $\cos\angle ABP=$______

(四捨五入到小數點後第二位，$\sqrt{2}$ 的近似值是 1.414，$\sqrt{3}$ 的近似值是 1.732)。(98 指甲 C)



解：(1)如圖所示，

在ΔBCP 中，$\overline{PB}=4$ 且 $\overline{PC}=3$，$\overline{BC}=5$，得ΔBCP 為直角Δ

設∠PBC＝θ，∴$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$

(2) $\cos\angle ABP=\cos(60^0-\theta)=\cos 60^0\cos\theta+\sin 60^0\sin\theta$

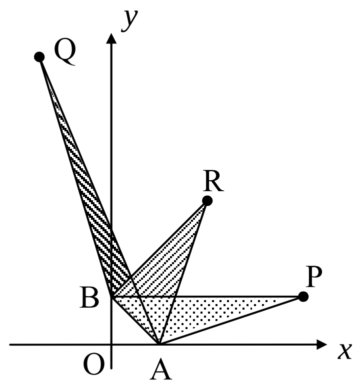
$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{5}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}=\dfrac{9.196}{10}=0.92$

答：0.92

97.坐標平面上給定兩點 A(1，0)與 B(0，1)，又考慮另外三點 P(π，1)、Q($-\sqrt{3}$，6)與 R(2，$\log_4 32$)。令ΔPAB 的面積為 p、ΔQAB 的面積為 q、ΔRAB 的面積為 r。請問下列哪一個選項是正確的？(99 學測 4)

(1) $p<q<r$ (2) $p<r<q$ (3) $q<p<r$ (4) $q<r<p$ (5) $r<q<p$

解 1：$\log_4 32=\log_{2^2} 2^5=\frac{5}{2}$，即 R(2，$\log_4 32$)＝R(2，$\frac{5}{2}$)



如右圖，直線 AB：$x+y-1=0$，且 $\overline{AB}=\sqrt{2}$

d(P，直線 AB)＝$\frac{|\pi+1-1|}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

d(Q，直線 AB)＝$\frac{|-\sqrt{3}+6-1|}{\sqrt{2}}=\frac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

d(R，直線 AB)＝$\frac{|2+2.5-1|}{\sqrt{2}}=\frac{3.5}{\sqrt{2}}$

⇒ΔPAB 的面積為 $p=\frac{1}{2}\overline{AB}\times d$(P，直線 AB)＝$\frac{1}{2}\sqrt{2}\times\frac{\pi}{\sqrt{2}}$　$\frac{3.14}{2}$

ΔQAB 的面積為 $q=\frac{1}{2}\overline{AB}\times d$(Q，直線 AB)＝$\frac{1}{2}\sqrt{2}\times\frac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$　$\frac{3.27}{2}$

ΔRAB 的面積為 $r=\frac{1}{2}\overline{AB}\times d$(R，直線 AB)＝$\frac{3.5}{2}$

∴ $p<q<r$

解 2：利用凸多邊形面積求法，由解 1 得知 R(2，$\log_4 32$)＝R(2，$\frac{5}{2}$)

ΔPAB 的面積為 $p=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1&0\\0&1\\\pi&1\\1&0\end{vmatrix}\right|=\frac{\pi}{2}$　$\frac{3.14}{2}$，ΔQAB 的面積為 $q=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1&0\\0&1\\-\sqrt{3}&6\\1&0\end{vmatrix}\right|=\frac{5-\sqrt{3}}{2}$　$\frac{3.27}{2}$

ΔRAB 的面積為 $r=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1&0\\0&1\\2&2.5\\1&0\end{vmatrix}\right|=\frac{3.5}{2}$

解 3：$\log_4 32=\log_{2^2} 2^5=\frac{5}{2}$，即 R(2，$\log_4 32$)＝R(2，$\frac{5}{2}$)

$\overrightarrow{AB}=(-1,\ 1)$，$\overrightarrow{AP}=(\pi-1,\ 1)$，$\overrightarrow{AQ}=(-\sqrt{3},\ 1)$，$\overrightarrow{AR}=(1,\ \frac{5}{2})$

⇒ΔPAB 的面積為 $p=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-1&1\\\pi-1&1\end{vmatrix}\right|=\frac{\pi}{2}$　$\frac{3.14}{2}$

ΔQAB 的面積為 $q=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-1&1\\-\sqrt{3}-1&6\end{vmatrix}\right|=\frac{5-\sqrt{3}}{2}$　$\frac{3.27}{2}$

ΔRAB 的面積為 $r=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-1&1\\1&2.5\end{vmatrix}\right|=\frac{3.5}{2}$

∴ $p<q<r$

答： (1)

98.設θ_1、θ_2、θ_3、θ_4分別為第一、第二、第三、第四象限角，且都介於 0 與 2π之間。已知 $|\cos\theta_1|=|\cos\theta_2|=|\cos\theta_3|=|\cos\theta_4|=\frac{1}{3}$，請問下列哪些選項是正確的？(99 學測 8)

(1) $\theta_1<\frac{\pi}{4}$　(2) $\theta_1+\theta_2=\pi$　(3) $\cos\theta_3=-\frac{1}{3}$　(4) $\sin\theta_4=\frac{2\sqrt{2}}{3}$　(5) $\theta_4=\theta_3+\frac{\pi}{2}$

解 1：(1) θ_1 為第一象限角，且 $|\cos\theta_1|=\frac{1}{3}$，∴$\cos\theta_1=\frac{1}{3}$

$\cos\theta_1=\frac{1}{3}<\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，且 cos θ在第一象限是遞減函數，∴$\theta_1>\frac{\pi}{4}$，故不正確

(2) θ_2 為第二象限角，且 $|\cos\theta_2|=\frac{1}{3}$，∴$\cos\theta_2=-\frac{1}{3}$

若$\theta_1+\theta_2=\pi$，則 $\cos\theta_2=\cos(\pi-\theta_1)=-\cos\theta_1=-\frac{1}{3}$成立，∵$\theta_1+\theta_2=\pi$，故正確

(3)∵θ_3 為第第三象限角，且 $|\cos\theta_3|=\frac{1}{3}$，∴$\cos\theta_3=-\frac{1}{3}$，故正確

(4)∵θ_4為第四象限角，∴$\sin\theta_4<0$，<u>故不正確</u>

或∵θ_4為第四象限角，且$|\cos\theta_4|=\frac{1}{3}$，$\cos\theta_4=\frac{1}{3}$，∴$\sin\theta_4=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$亦得知<u>不正確</u>

(5)∵$\cos\theta_3=-\frac{1}{3}$，∴$\sin\theta_3=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

若$\theta_4=\theta_3+\frac{\pi}{2}$，則$\cos\theta_4=\cos(\theta_3+\frac{\pi}{2})=-\sin\theta_3=\frac{2\sqrt{2}}{3}\neq\frac{1}{3}$(∵$\cos\theta_4=\frac{1}{3}$)<u>故不正確</u>

解 2：根據題意，右圖所示不失為假設

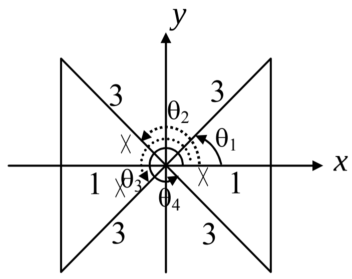
(1)同上

(2) $\theta_1=\angle$ㄨ，∴$\theta_1+\theta_2=\pi$

(3)同上

(4)同上

(5)∵$\theta_1=\angle$ㄨ$\neq\frac{\pi}{4}$，∴$\theta_4\neq\theta_3+\frac{\pi}{2}$



答：(2)(3)

99.下列哪些方程式有實數解？(99 學測 9)

(1) $x^3+x-1=0$ (2) $2^x+2^{-x}=0$ (3) $\log_2 x+\log_x 2=1$ (4) $\sin x+\cos 2x=3$ (5) $4\sin x+3\cos x=\frac{9}{2}$

解：(1) $x^3+x-1=0$ 為實係數 3 次方程式，則至少有 1 個實數解

(2)∵ $2^x>0$，且$2^{-x}>0$，∴ $2^x+2^{-x}=0$ 無實數解

(3)設 $A=\log_2 x$，則$\log_x 2=\frac{1}{A}$，且$\log_2 x$，$\log_x 2$皆有意義，∴ $\log_2 x=A\neq 0$

原方程式變為 $A+\frac{1}{A}-1=0$，同乘上 A，得 $A^2-A+1=0$

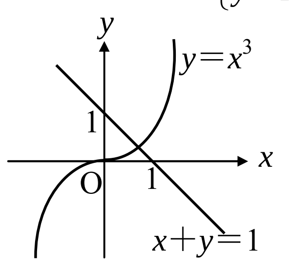
∵判別式 $D=(-1)^2-4=-3<0$，表示 A 無實數解，得知 x 無實數解

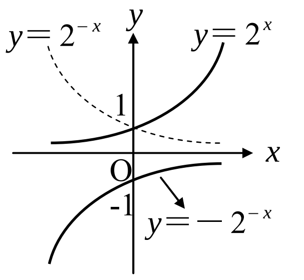
(4)∵$-1\leq\sin x\leq 1$，且$-1\leq\cos 2x\leq 1$，得知$-2\leq\sin x+\cos 2x\leq 2$，∴$\sin x+\cos 2x=3$ 無實數解

(5)根據疊合得知：$-\sqrt{4^2+3^2}\leq 4\sin x+3\cos x\leq\sqrt{4^2+3^2}=5$，∴$4\sin x+3\cos x=\frac{9}{2}<5$ 有實數解

補充解：利用幾何求解

(1) $x^3+x-1=0$，$\Rightarrow\begin{cases}y=x^3\\y=1-x\end{cases}$，圖形如下左圖，得知有 1 實數解



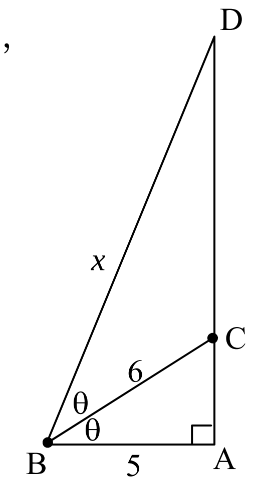


(2) $2^x+2^{-x}=0$，$\Rightarrow\begin{cases}y=2^x\\y=-2^{-x}=-\frac{1}{2^x}\end{cases}$，圖形如上右圖，得知無數解

答：(1)(5)

100.如右圖，直角三角形 ABD 中∠A 為直角，C 為$\overline{AD}$邊上的點。已知$\overline{BC}=6$，$\overline{AB}=5$，

∠ABD＝2∠ABC，則$\overline{BD}$＝________。(化成最簡分數)(99 學測 E)



解 1：如圖，設∠ABC＝θ，∴∠ABD＝2θ，$\overline{BD}=x$

在ΔABC 中，$\cos\theta=\frac{5}{6}$

在ΔABD 中，$\cos 2\theta=\frac{5}{x}$，$\Rightarrow 2\cos^2\theta-1=\frac{5}{x}$

$\frac{5}{x}=2(\frac{5}{6})2-1=\frac{7}{18}$，得 $x=\overline{BD}=\frac{90}{7}$

解 2：利用分角線性質

(1)$\because$∠ABD＝2∠ABC，$\therefore \overline{BC}$為∠ABD 的分角線

$\Rightarrow \overline{AB}:\overline{BD}=\overline{AC}:\overline{CD}$，且$\overline{AC}=\sqrt{6^2-5^2}=\sqrt{11}$

設$\overline{CD}=\sqrt{11}\,k$，則 $5:\overline{BD}=\sqrt{11}:\sqrt{11}\,k$，故$\overline{BD}=5k$

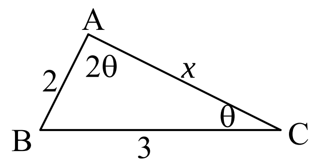
(2)根據畢氏定理$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2$，$\Rightarrow (5k)^2=5^2+(\sqrt{11}\,k+\sqrt{11}\,)^2$，$\Rightarrow 25k^2=25+11(k+1)^2=11k^2+22k+36$

$\Rightarrow 14\,k^2-22k-36=0$，$(7k-18)(k+1)=0$，$\therefore k=\dfrac{18}{7}$或$-1$(不合)，$\overline{BD}=5k=\dfrac{90}{7}$

答：$\dfrac{90}{7}$

101.已知ΔABC 中，$\overline{AB}=2$、$\overline{BC}=3$，且∠A＝2∠C，則$\overline{AC}=$_______。(化成最簡分數)(99 學測 G)

解 1：(1)如右圖，設∠C＝θ，∠A＝2θ，$\overline{AC}=x$



根據正弦定理：$\dfrac{2}{\sin\theta}=\dfrac{3}{\sin 2\theta}$，$\Rightarrow \dfrac{2}{\sin\theta}=\dfrac{3}{2\sin\theta\cos\theta}$，得 $\cos\theta=\dfrac{3}{4}$

(2)求$\overline{AC}=x$ 的方法

法 1：$\because \cos\theta=\dfrac{3^2+x^2-2^2}{2\cdot 3\cdot x}=\dfrac{3}{4}$，$\Rightarrow 2x^2-9x+10=0$，$x=\dfrac{5}{2}$或 2

但當$\overline{AC}=x=2$ 時，$\theta=45^0$，$\angle A=90^0$，$\overline{BC}^2\neq\overline{AC}^2+\overline{AB}^2$，$\therefore$不合

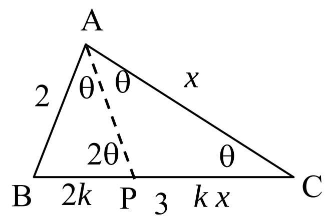
法 2：$\because \cos 2\theta=\dfrac{2^2+x^2-3^2}{2\cdot 2\cdot x}=2(\dfrac{3}{4})^2-1$，$\Rightarrow 2x^2-x-10=0$，$x=\dfrac{5}{2}$或$-2$(不合)

法 3：$\because \angle B=\pi-3\theta$，$\therefore \cos(\angle B)=\cos(\pi-3\theta)=-\cos 3\theta=-(4\cos^3\theta-3\cos\theta)$

$\Rightarrow \dfrac{2^2+3^2-x^2}{2\cdot 2\cdot 3}=3\cos\theta-4\cos^3\theta=3(\dfrac{3}{4})-4(\dfrac{3}{4})^3=\dfrac{9}{16}$，$\Rightarrow x^2=\dfrac{25}{4}$，取 $x=\dfrac{5}{2}$

解 2：(1)作∠A 平分線$\overline{AP}$交$\overline{BC}$於 P 點，則

$\overline{BP}:\overline{PC}=\overline{AB}:\overline{AC}=2:x$，令$\overline{BP}=2k$，$\overline{PC}=k\,x$，且 $2k+k\,x=3$，$k\neq 0$



(2)在ΔACP 中，∠CAP＝θ，∠APB＝2θ (外角)，則$\overline{AP}=\overline{PC}=k\,x$

(3)在ΔABC 中，$\cos 2\theta=\dfrac{2^2+x^2-3^2}{2\cdot 2\cdot x}=\dfrac{x^2-5}{4x}$

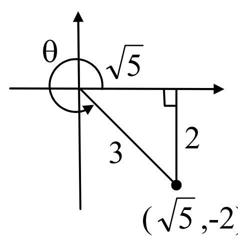
在ΔABP 中，$\cos 2\theta=\dfrac{(2k)^2+(kx)^2-2^2}{2\cdot 2k\cdot kx}=\dfrac{k^2x^2+4k^2-4}{4k^2x}$

$\Rightarrow \dfrac{x^2-5}{4x}=\dfrac{k^2x^2+4k^2-4}{4k^2x}$，得知 $k^2=\dfrac{4}{9}$，取 $k=\dfrac{2}{3}$

(4) $k=\dfrac{2}{3}$代入$\overline{BC}=2k+k\,x=3$，$\therefore x=\overline{AC}=\dfrac{5}{2}$

答：$\dfrac{5}{2}$

102.已知 $\sin\theta=-\dfrac{2}{3}$且 $\cos\theta>0$，請問下列哪些選項是正確的？(100 學測 8)



(1) $\tan\theta<0$ (2) $\tan^2\theta>\dfrac{4}{9}$ (3) $\sin^2\theta>\cos^2\theta$ (4) $\sin 2\theta>0$

(5)標準位置角θ與2θ的終邊位在不同的象限

解：$\because \sin\theta=-\dfrac{2}{3}$且 $\cos\theta>0$，$\therefore\theta$為第四象限角，如圖

(1) $\tan\theta=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}<0$ (2) $\tan^2\theta=\dfrac{4}{5}>\dfrac{4}{9}$ (3) $\sin^2\theta=\dfrac{4}{9}<\dfrac{5}{9}=\cos^2\theta$

(4) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{4\sqrt{5}}{9}<0$ (5)$\because \dfrac{7\pi}{4}<\theta<2\pi$，$\dfrac{7\pi}{2}<2\theta<4\pi$，$\therefore\theta$與$2\theta$的終邊都在第四象限

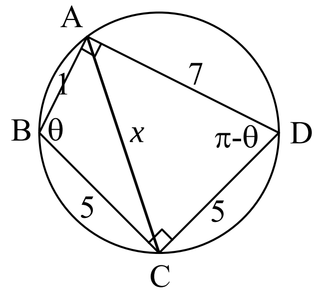
另解：$\because \cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\dfrac{5}{9}-\dfrac{4}{9}=\dfrac{1}{9}>0$ 且由(4) $\sin 2\theta<0$，$\therefore 2\theta$為第四象限角

答：(1)(2)

103.四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CD}=5$，$\overline{DA}=7$，且∠DAB＝∠BCD＝90^0，則對角線$\overline{AC}$長為________。

解：(1)$\because$∠DAB＝∠BCD＝90^0，則四邊形 ABCD 有一外接圓，即以 B，D 為直徑兩端點的外接圓

(2)設∠ABC＝θ，則∠ADC＝π－θ，令$\overline{AC}=x$



在ΔABC 中，$\cos\theta=\dfrac{1^2+5^2-x^2}{2\cdot1\cdot5}$

在ΔADC 中，$\cos(\pi-\theta)=\dfrac{7^2+5^2-x^2}{2\cdot7\cdot5}=-\cos\theta$

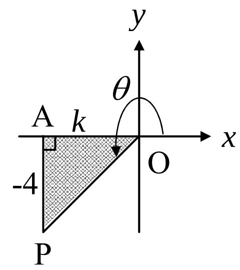
$\Rightarrow\dfrac{1^2+5^2-x^2}{2\cdot1\cdot5}=-\dfrac{7^2+5^2-x^2}{2\cdot7\cdot5}$，解得 $x=\sqrt{32}=\overline{AC}$

答：$\sqrt{32}$　(100 學測 D)

104.在坐標平面上，廣義角θ的頂點為原點 O，始邊為 x 軸的正向，且滿足 $\tan\theta=\dfrac{2}{3}$。若θ的終邊上有一點 P，其 y 坐標為－4，則下列哪些選項一定正確？(101 學測 12)

(1) P 的 x 坐標是 6　(2) $\overline{OP}=2\sqrt{13}$　(3) $\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$　(4) $\sin2\theta>0$　(5) $\cos\dfrac{\theta}{2}<0$

解：由題意得知廣義角θ為第三象限角，如右圖，在ΔOAP 中，設$\overline{OA}=k$



(1)∵$\tan\theta=\dfrac{2}{3}=\dfrac{-4}{k}$，∴$k=-6$，得知 P 的 x 坐標是－6

(2)在ΔOAP 中，$\overline{OP}=\sqrt{(-6)^2+(-4)^2}=2\sqrt{13}$

(3)在ΔOAP 中，$\cos\theta=\dfrac{-6}{2\sqrt{13}}=\dfrac{-3}{\sqrt{13}}$

(4) $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2(\dfrac{-2}{\sqrt{13}})(\dfrac{-3}{\sqrt{13}})=\dfrac{12}{13}>0$

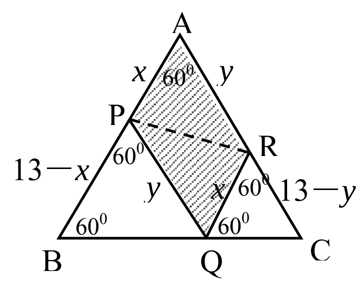
(5)∵$2k\pi+\pi<\theta<2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$，∴$k\pi+\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\theta}{2}<k\pi+\dfrac{3\pi}{4}$

得知$\dfrac{\theta}{2}$可能在第二、四象限，則 $\cos\dfrac{\theta}{2}>0$ 或 $\cos\dfrac{\theta}{2}<0$

答：(2)(4)

105.在邊長為 13 的正三角形 ABC 上各邊分別取一點 P，Q，R，使得 APQR 形成一平行四邊形，如下圖所示：若平行四邊形 APQR 的面積為 $20\sqrt{3}$，則線段 PR 的長度為_____。(101 學測 E)

解：1.如右圖，設$\overline{AP}=x$，$\overline{AR}=y$



2.∵APQR 為平行四邊形，∴$\overline{AP}=x=\overline{QR}$，$\overline{BP}=13-x$

$\overline{AR}=y=\overline{PQ}$，$\overline{RC}=13-y$

⇒在ΔPBQ 中，$13-x=y$，得 $x+y=13$

3.∵四邊形 APQR 的面積為 $20\sqrt{3}=2\Delta$APR 面積

∴$20\sqrt{3}=2(\dfrac{1}{2}xy\sin60^0)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}xy$，得 $xy=40$

3.在ΔAPR 中，根據餘弦定理：$(\overline{AR})^2=x^2+y^2-2xy\cos60^0=x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy=13^2-3\times40=49$，得知$\overline{AR}=7$

答：7

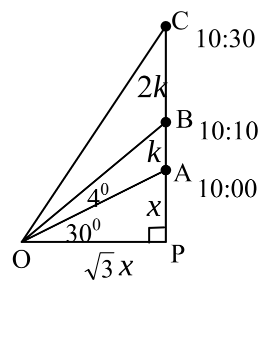
106.<u>莎韻</u>觀測遠方等速率垂直上升的熱氣球。在上午 10：00 熱氣球的仰角為 30^0，到上午 10：10 仰角變為 34^0。請利用下表判斷到上午 10：30 時，熱氣球的仰角最接近下列哪一個度數？(102 學測 6)

θ	30^0	34^0	39^0	40^0	41^0	42^0	43^0
$\sin\theta$	0.500	0.559	0.629	0.643	0.656	0.669	0.682
$\cos\theta$	0.866	0.829	0.777	0.766	0.755	0.743	0.731
$\tan\theta$	0.577	0.675	0.810	0.839	0.869	0.900	0.933

(1) 39^0　(2) 40^0　(3) 41^0　(4) 42^0　(5) 43^0

解：(1)根據題意，∵等速率垂直上升，∴距離與時間成正比

⇒設$\overline{AB}=k$，則$\overline{BC}=2k$，且$\overline{OP}=\sqrt{3}x$，$\overline{PA}=x$，如右圖

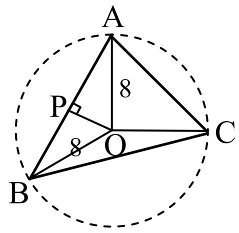


(2) $\tan 34^0=\dfrac{k+x}{\sqrt{3}x}=0.675$，得知$\dfrac{k}{\sqrt{3}x}=0.675-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan(\angle COP)=\dfrac{3k+x}{\sqrt{3}x}=3(\dfrac{k}{\sqrt{3}x})+\dfrac{1}{\sqrt{3}}=3(0.675-\dfrac{1}{\sqrt{3}})+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\approx 0.87$，$\Rightarrow\angle COP=41^0$

答：(3)

107.設銳角三角形 ABC 的外接圓半徑為 8。已知外接圓圓心到$\overline{AB}$的距離為 2，而到$\overline{BC}$的距離為 7，則$\overline{AC}=$ ㉙$\sqrt{㉚㉛}$。(化成最簡根式)(102 學測 G)



解：(1)如圖，在ΔAOP 中，$\overline{AP}=\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15}$，$\therefore\overline{AB}=4\sqrt{15}$

同理，在ΔBOC 中，$\overline{BC}=2\sqrt{15}$

(2)由正弦定理：$\dfrac{2\sqrt{15}}{\sin A}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}=\dfrac{4\sqrt{15}}{\sin C}=2\times 8$，$\Rightarrow\sin A=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$，$\sin C=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，

$\therefore\sin B=\sin(180^0-A-C)=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\dfrac{\sqrt{15}}{8}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{7}{8}\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

法 1：代回正弦定理，$\Rightarrow\overline{AC}=16\sin B=4\sqrt{15}$

法 2：由 $\sin B=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，得 $\cos B=\dfrac{1}{4}$，利用餘弦定理：

$\overline{AC}^{\,2}=\overline{AB}^{\,2}+\overline{BC}^{\,2}-2\overline{AC}\times\overline{BC}\cos B=(4\sqrt{15})^2+(2\sqrt{15})^2-2\times 4\sqrt{15}\times 2\sqrt{15}\times\dfrac{1}{4}=240$，$\therefore\overline{AC}=\sqrt{240}=4\sqrt{15}$

答：$4\sqrt{15}$