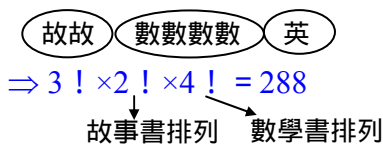


第 5 單元 排列組合

1. 把 2 本不同的故事書，4 本不同的數學書籍 1 本英文書排成一列。假設故事書必須排在一起，數學書也必須排在一起，則這樣的排法共有_____種。(79 社會)

解：故事書排在一起，則視為一體；數學書排在一起，也視為一體



答：288

2. 某桌球隊要從 10 名選手中派出 5 名，分別參加五場單打友誼賽。10 名選手中近況較佳的有位，教練決定任一安排他們分別在第一、三、五場出賽，另外兩場則由其餘選手任意選出排定，則此球隊出場比賽的名單順序一共有_____種。

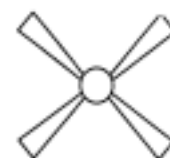
解：先排一、三、五場：3！

其餘 7 位選手選出 2 位排第二、四場： $C_2^7 \times 2!$

共有 $3! \times (C_2^7 \times 2!) = 252$

答：252 (80 社會)

3. 右圖是懸掛於天花板上電風扇之平面圖形，中間部分是圓形。其餘四個部份是全等的葉片。今用五種顏色分別塗這五個部份(五個部份各有不同的顏色)，則共有_____種色法。(81 社會)



解：先塗中間→四個葉片(視為環狀排列) = $5 \times \frac{4!}{4} = 30$

答：30

4. 設自然數 $n \geq 3$ ，且已知 $(1-x) + (1-x)^2 + \dots + (1-x)^n$ 的展開式中 x^2 項的係數可表為 $an^3 + bn^2 + cn + d$ ，式中 a, b, c, d 為常數，則下列何者為真？(82 社會)

- (1) $a = 1, d = b + c$ (2) $a + c = b + d$ (3) $a = c$ (4) $d = 3, b = 0$ (5) $a + b + c + d = \frac{1}{3}$

解： $(1-x) + (1-x)^2 + \dots + (1-x)^n = \frac{(1-x)[1-(1-x)^{n+1}]}{1-(1-x)} = \frac{(1-x)-(1-x)^{n+1}}{x}$
 其中 $(1-x)^{n+1} = C_0^{n+1} 1^n + C_1^{n+1} (-x) + C_2^{n+1} (-x)^2 + C_3^{n+1} (-x)^3 + \dots$ ， x^3 項的係數 = $-C_3^{n+1}$
 $\Rightarrow (1-x) + (1-x)^2 + \dots + (1-x)^n$ 的展開式中 x^2 項的係數 = $C_3^{n+1} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6} = \frac{n^3 - n}{6}$
 $\Rightarrow a = \frac{1}{6}, b = 0, c = -\frac{1}{6}, d = 0$

答：(2)

5. 有 4 個男生及 3 個女生排成一列。若要求男生排在一起，女生亦須排在一起，則其排列法有_____種。若只要求男生排在一起，則排列法有_____種。(本題答案限用整數表示)(82 社會)

解：(1) 男生排在一起，女生排在一起，則將 4 男、3 女各視為一體，各有 4!、3! 種

又 4 男、3 女之排列數為 2!， \Rightarrow 共有 $4! \times 3! \times 2! = 288$

(2) 男生排在一起，視為一體，與 3 女排成一列有 4! 種，4 男排列有 4! 種， \Rightarrow 共有 $4! \times 4! = 576$

答：288；576

6. 設圖中 A, B, C 三點共線，D, E, F 三點共線。利用這六點中的 3 個點作頂點所形成的三角形共有多少個？(83 推甄)

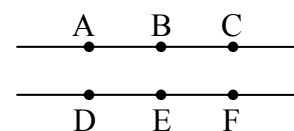
- (1) 9 (2) 14 (3) 16 (4) 18 (5) 20

解：A, B, C 三選一，D, E, F 三選二，有 $C_1^3 \times C_2^3 = 9$

A, B, C 三選二，D, E, F 三選一，有 $C_2^3 \times C_1^3 = 9$

共 $9 + 9 = 18$ 個

答：(4)



7. 每次用 20 根相同的火柴棒圍成一個三角形，共可圍成____種不全等的三角形。(83 推甄)

解：(1) 設三角形三邊長為正整數 a, b, c ，且令 $a \geq b \geq c$ ， $a + b + c = 20$ ， $\Rightarrow a + a + a \geq 20$ ， $a \geq \frac{20}{3}$
 (2) 根據兩邊和 > 第三邊， $b + c > a$ ， $\Rightarrow a + b + c = 20$ ， $\Rightarrow a + a < 20$ ，得知 $a < 10$

\Rightarrow 得知 $\frac{20}{3} \leq a < 10$ 且 a, b, c 為正整數， $a = 7, 8, 9$ ，討論其解為

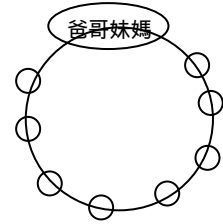
a	9	9	9	9	8	8	8	7
b	9	8	7	6	8	7	6	7
c	2	3	4	5	4	5	6	6

共 8 種不全等的三角形

解：8

8. 爸爸、媽媽、哥哥與妹妹四個人參加喜宴，與其他客人坐滿一張 12 個座位的圓桌。若四人座位相鄰，且哥哥、妹妹夾坐於爸爸、媽媽中間，則共有____種不同坐法。(83 自然)

解：將「爸、媽、哥、妹」4 人視為一體，與其他 8 人共 9 人作圓桌排列 = $\frac{9!}{9} = 8!$



爸、媽互換排列 = 2!

哥、妹互換排列 = 2!， \Rightarrow 坐法方式有 $8! \times 2! \times 2! = 161280$

答：161280 種

9. 老師將 12 枝相同的鉛筆分給甲、乙、丙、丁、戊、己六位小朋友，其中有兩位各分得 4 枝，兩位各分得 2 枝，而有兩位沒分到，則共有____種分法，在這種分法下，戊與己都獲得 4 枝的機率為____。(83 自然)

解：(1) $12 = 4 + 4 + 2 + 2 + 0 + 0$ ，視為 2 同 2 同 2 同直線排列 = $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$

(2) 戊與己都獲得 4 枝，剩下 $12 - 4 - 4 = 4$ 枝， $4 = 2 + 2 + 0 + 0$ ，視為 2 同 2 同直線排列 = $\frac{4!}{2!2!} = 6$

答：90；6

10. 某拳擊比賽，規定每位選手必須和所有其他選手各比賽一場，賽程總計為 78 場，則選手人數為____人。(83 社會)

解：設有 n 位選手參加比賽， $C_2^n = 78$ ， $\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 78$ ， $\Rightarrow (n-13)(n+12) = 0$ ， $n = 13$ 或 $n = -12$ (不合)

答：13

11. 我國自用小汽車的牌照號碼，前兩位為英文大寫字母，後四位為數字，例如 AB - 0950。若最後一位數字不用 4，且後四位數字沒有 0000 這個號碼，那麼我國可能有的自用小客車牌照號碼有多少個？(84 學測)

- (1) $26 \times 25 \times (4320 - 1)$ (2) $26 \times 25 \times 4320 - 1$ (3) $26 \times 25 \times (5040 - 1)$
 (4) $26 \times 26 \times (9000 - 1)$ (5) $26 \times 26 \times 9000 - 1$

解：先排前兩位英文字母：有 26×26 ，
 再排數字號碼： $10 \times 10 \times 10 \times \frac{10-1}{\text{不排 4}} = 9000 - 1$ ，共有 $26 \times 26 \times (9000 - 1)$

答：(4)

12. 九位學生的數學抽考分數分別為：30，40，60，50，70，80，60，90，60 (84 自然)

(1) 現在使用簡單的抽樣法，從這九個分數中取三個，所取出的三個分數中至少有一個為 60 分的取法有幾種？

- (1) 18 (2) 21 (3) 35 (4) 40 (5) 64

(2) 所取出的三個分數中中位數等於 60 分的取法有幾種？

- (1) 18 (2) 27 (3) 43 (4) 46 (5) 55

解：(1)(任取三個) - (三個分數中沒有 60 分) = $C_3^9 - C_3^6 = 84 - 20 = 64$

(2)三個分數的中位數等於 60 分取法為：

三個分數都是 60 分 = $C_3^3 = 1$

二個分數是 60 分，一個不是 60 分 = $C_2^3 \times C_1^6 = 3 \times 6 = 18$

一個分數是 60 分，一個比 60 分大，一個比 60 分小 = $C_1^3 \times C_1^3 \times C_1^3 = 27$

共有 $1 + 18 + 27 = 46$

答：(1) (5) ; (2) (4)

13. 方程式 $x + y + z + u \leq 9$ 的正整數解之個數為 (84 社會)

(1) $\sum_{k=1}^9 H_k^4$ (2) $1 + \sum_{k=1}^9 H_k^4$ (3) $\frac{9!}{5!}$ (4) 56 (5) 126

解：方程式改為 $(x - 1) + (y - 1) + (z - 1) + (u - 1) \leq 5$ 的正整數解

令 $x - 1 = A, y - 1 = B, z - 1 = C, u - 1 = D$ ，即 $A + B + C + D \leq 5$

方程式為： $A + B + C + D + E = 5$ 且 A, B, C, D, E 為非負整數

共有 $H_5^5 = C_5^{5+5-1} = C_5^9 = 126$

答：(5)

14. 已知 n 及 k 為正整數，且 $n > k$ ，若 $C(n, k - 1) : C(n, k) : C(n, k + 1) = 1 : 2 : 3$ ，則 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(84 社會)

解： $C_{k-1}^n : C_k^n : C_{k+1}^n = 1 : 2 : 3, \Rightarrow C_{k-1}^n : C_k^n = 1 : 2$ 且 $C_k^n : C_{k+1}^n = 2 : 3, \Rightarrow C_k^n = 2C_{k-1}^n$ 且 $2C_{k+1}^n = 3C_k^n$

$$\Rightarrow C_k^n = 2C_{k-1}^n, \Rightarrow \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = 2 \times \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}, \text{ 得 } n - 3k + 1 = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow 2C_{k+1}^n = 3C_k^n, \Rightarrow 2 \times \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = 3 \times \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ 得 } 2n - 5k - 3 = 0 \quad (2)$$

由(1)(2)，得 $n = 14, k = 5$

答：14

15. $(40)^{265}$ 除以 13，得餘數為 (1) 1 (2) 2 (3) 4 (4) 6 (5) 8 (85 學測)

解： $(40)^{265} = (39 + 1)^{265} = C_0^{265} 1^{265} + C_1^{265} 1^{264} \cdot 39 + C_2^{265} 1^{263} \cdot 39^2 + \dots = 1 + (13 \text{ 的倍數})$

答：(1)

16. 有一個十字路口，規定不可迴轉，東、西向可以左、右轉，南、北向不可以左轉，則在此路口有 種車流動向。

解：由東向西：可以直行、左、右轉 3 種車流動向

由西向東：可以直行、左、右轉 3 種車流動向

由南向北：可以直行、右轉 2 種車流動向

由北向南：可以直行、右轉 2 種車流動向

共有 $3 + 3 + 2 + 2 = 10$

答：10 種 (85 學測)

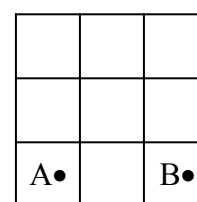
17. 如下圖，至少包函 A 或 B 兩點之一的長方形共有 個。(85 學測)

解：包含 A 的長方形有 $3 \times 3 = 9$ 個

包含 B 的長方形有 $3 \times 3 = 9$ 個

包含 A、B 的長方形有 $1 \times 3 = 3$ 個，共有 $9 + 9 - 3 = 15$

答：15



18.用 0, 1, 2, 3, 4, 5 等六個數字所排成的三位數中, 數字不重複者共有___個, 其中可被 3 整除的共有___個。

解: (1)數字不重複的三位數:

不排0 ↗ $5 \times 5 \times 4 = 100$

(2)3k 者有 0, 3; 3k+1 者有 1, 4; 3k+2 者有 2, 5, 各取出 1 個排列

(i)不含 0: $1 \times 2 \times 2 \times 3! = 24$

(ii)含 0: $1 \times 2 \times 2 \times (3! - 2!) = 16$, 共有 $24 + 16 = 40$

答: 100; 40 (85 自然)

19.由 1, 2, 3, 4, 5, 6 個數字所組成(數字可以重複)的四位數中, 含有奇數個 1 的共有 (85 社會)

- (1) 260 個 (2) 368 個 (3) 486 個 (4) 520 個 (5) 648 個

解: (1)四位數中只有 1 個 1:

$C_1^4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$

(2)四位數中只有 3 個 1:

$C_3^4 \times 1 \times 1 \times 5 = 20$

共有 $500 + 20 = 520$ 個

答: (4)

20.下圖所示為一含有斜線的棋盤形街道圖。今某人欲從 A 取捷徑走到 B, 共有___種走法。(85 社會)

解 1: 如右中圖, 從 A 取捷徑走到 B, 必經過 \overline{CD} 或 \overline{EF}

(1) $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B: \frac{4!}{3!1!} \times 1 \times \frac{3!}{1!2!} = 12$

$A \rightarrow C: 3 \text{ 橫 } 1 \text{ 直} = \frac{4!}{3!1!}$

$D \rightarrow B: 1 \text{ 橫 } 2 \text{ 直} = \frac{3!}{1!2!}$

(2) $A \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow B: \frac{4!}{2!2!} \times 1 \times \frac{3!}{2!1!} = 18$

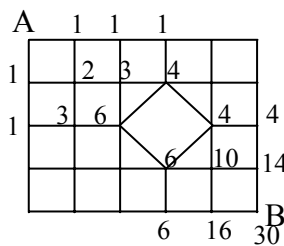
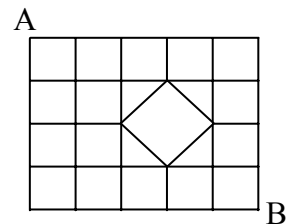
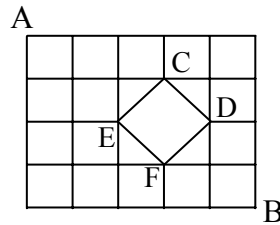
$A \rightarrow E: 2 \text{ 橫 } 2 \text{ 直} = \frac{4!}{2!2!}$

$F \rightarrow B: 2 \text{ 橫 } 1 \text{ 直} = \frac{3!}{2!1!}$

共 $12 + 18 = 30$ 種

解 2: 如右圖, 共 30 種

答: 30



21.從一個 10 人的俱樂部, 選出一位主任, 一位幹事和一位會計, 且均由不同人出任, 如果 10 人的甲君和乙君不能同時被選上, 那麼總共有___種選法。(86 社會)

解: 利用反面計算 = 任意選(10 人選 3 人) - 甲乙同時被選上(從 8 人中再選出 1 人)

$= C_3^{10} \times 3! - C_1^8 \times 3! = 720 - 48 = 672$

三人職務互換

答: 672

22.用五種不同顏色塗下圖中五個空白區域, 相鄰的區域塗不同顏色, 則共有___種塗法。(86 社會)

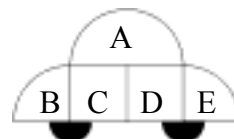
解: 如右下圖, A, B, C, D, E 相鄰邊數為 2, 1, 3, 3, 1

從相鄰邊數大者依序 C, D, A, B, E 塗色

$C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow E$

$5 \times 4 \times 3 \times 4 \times 4 = 960$

答: 960



23. 在三位數中，百位數與個位數之差的絕對值為 2 的數共有___個。(87 學測)

解：設此三位數為 $100x + 10y + z$ ， $|x - z| = 2$ ，得知 $x = z \pm 2$

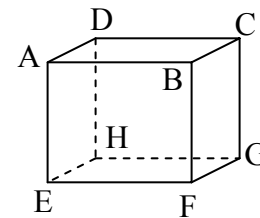
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
z	3	0	4	1	5	2	6	3	7

十位數 y 有 0, 1, 2, ..., 9 等 10 種取法，共有 $15 \times 10 = 150$ 種

答：150

24. 長方體中，互為歪斜線的稜線共有___對。(87 學測)

解：如右圖，歪斜線：不共平面、不相交的兩直線



(1) 上底 \overline{AB} 與 \overline{CG} 、 \overline{DH} 、 \overline{FH} 、 \overline{FG} 等 4 條稜線互為歪斜線

同理， \overline{AD} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 也各有 4 條稜線，有 $4 \times 4 = 16$

(2) 側面 \overline{AE} 與 \overline{HG} 、 \overline{FG} 等 2 條，有 $2 \times 4 = 8$

共有 $16 + 8 = 24$ 條稜線

答：24

25. 欲將八位新生平均分發到甲、乙、丙、丁四班，共有___種分法。(87 社會)

解：8 人平均分發到 4 個班，則每班 2 人， $C_2^8 \times C_2^6 \times C_2^4 \times C_2^2 = 2520$

答：2520

26. 有一片長方形牆壁，尺寸為 12×1 (即：長 12 單位長，寬 1 單位長)。若有許多白色及咖啡色壁磚，白色壁磚尺寸為 2×1 ，咖啡色壁磚尺寸為 4×1 ，用這些壁磚貼滿此長方形，問可貼成幾種不同的圖案？___種。(88 推甄)

解：設選用 x 塊白色壁磚， y 塊咖啡色壁磚，(寬都為 1 單位長，僅考慮長度)

$$2x + 4y = 12, \Rightarrow x + 2y = 6, \text{ 其中 } x, y \text{ 為正整數或 } 0$$

x	0	2	4	6
y	3	2	1	0

$$\text{方法數依序為 } \frac{3!}{3!} + \frac{4!}{2!2!} + \frac{5!}{4!1!} + \frac{6!}{6!} = 13$$

答：13

27. 在空間中， x, y, z 坐標皆為整數，且與原點距離為 $\sqrt{17}$ 的點，一共有___個。(88 自然)

解：設此點為 (x, y, z) ，由題意知 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{17}$ ，即 $x^2 + y^2 + z^2 = 17$ ，可能為

(1) $(0, 1, 4)$ ： $3! \times 1 \times 2 \times 2 = 24$ (其中 2 表示正負數 2 種)

(2) $(2, 2, 3)$ ： $\frac{3!}{2!} \times 2 \times 2 \times 2 = 24$

共有 $24 + 24 = 48$ 個

答：48

28. 體操委員會由 10 位女性委員與 5 位男性委員組成。委員會要由 6 位委員組團出國考察，如以性別做分層，並在各層依比例隨機抽樣，試問此考察團共有多少種組成方式？(89 學測)

解：(1) 做分層比例抽樣，則女：男 = $10 : 5 = 2 : 1$ ，6 人中女性佔 4 人，男性佔 2 人

(2) 女性 10 人中選取 4 人，方法數 = $C_4^{10} = 210$

男性 5 人中選取 2 人，方法數 = $C_2^5 = 10$

\Rightarrow 共有 $210 \times 10 = 2100$ 種

答：2100 種

29.籃球 3 人鬥牛賽，共有甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬 9 人參加，組成 3 隊，且甲、乙兩人不在同一隊的組隊方法有多少種？答：_____種。(90 學測)

解：設分成 A, B, C 等 3 隊，並先將甲、乙各安排在 A, B 隊中，

$$A, B \text{ 隊只需再各選取 2 人，其餘 3 人則排在 C 隊，} \Rightarrow C_2^{9-2} \times C_2^5 \times C_3^3 = 210$$

答：210

30.有 6 男 4 女共 10 名學生擔任本週值日生。導師規定在本週 5 個上課日中，每天兩名值日生，且至少須有 1 名男生。試問本週安排值日生的方式共有_____種。(90 社會)

解：值日生方式為 2 男、1 男 1 女

(1) 2 男：6 男中選取 2 男 = $C_2^6 = 15$

(2) 1 男 1 女：4 男 4 女中選取 = $4! = 24$

共有 $15 \times 24 \times 5! = 43200$

答：43200

31. 11^{15} 除以 100 的餘數為_____。(91 學測 2)

解：利用二項式定理： $11^{15} = (10+1)^{15} = C_0^{15} 10^{15} + C_1^{15} 10^{14} + \dots + C_{13}^{15} 10^2 + C_{14}^{15} 10 + C_{15}^{15} 10^0$
 $= 100[C_0^{15} 10^{13} + C_1^{15} 10^{12} + \dots + C_{13}^{15} 10^0] + 150 + 1$

11^{15} 除以 100 的餘數 = 151 除以 100 的餘數 = 51

答：51

32.如右圖各小格為 1cm^2 的正方形。試問圖中大大小小的正方形共有多少個？(91 學測 2)

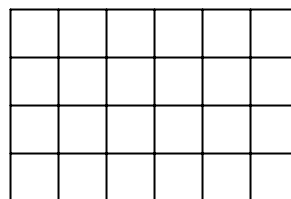
解：邊長 1 cm 的正方形有 $6 \times 4 = 24$ 個

邊長 2 cm 的正方形有 $5 \times 3 = 15$ 個

邊長 3 cm 的正方形有 $4 \times 2 = 8$ 個

邊長 4 cm 的正方形有 $3 \times 1 = 3$ 個

共有 $24 + 15 + 8 + 3 = 50$ 個



答：50

33.因乾旱水源不足自來水公司計畫在下週一至週日的 7 天中選擇 2 天停止供水。若要求停水的兩天不相連，則自來水公司共有多少種選擇方式？答：_____種。(91 數乙 D)

解 1：將週一、二、三、四、五、六、日選擇 2 天如下：

(一、三)(一、四)(一、五)(一、六)(一、日)(二、四)(二、五)(二、六)(二、日)

(三、五)(三、六)(三、日)(四、六)(四、日)(五、日)共 15 種

解 2：



將兩個 Δ 插入 6 個空隙，使兩個 不相鄰的方法有 $C_2^6 = 15$

答：15

34.某披薩專賣店舉辦「買大送大」的優惠活動。杰倫班上訂購了 3 個大批薩，加上贈送的 3 個(口味亦可任選)，共有 6 個大披薩。今天店裡有海鮮、什錦、總匯、夏威夷四種口味，在任選的情況下，總共有_____種不同的選擇方式。

解：根據題意：海鮮 + 什錦 + 總匯 + 夏威夷 = 6 個，每種口味可訂購 0, 1, 2, 3, _____ 個

$$H_6^4 = C_6^{4+6-1} = C_6^9 = 84$$

答：84 (92 北模)

35. 啦啦隊競賽規定每隊 8 人，且每隊男、女生均至少要有 2 人。某班共有 4 名男生及 7 名女生想參加啦啦隊競賽。若由此 11 人中依規定選出 8 人組隊，則共有_____種不同的組隊方法。(93 數乙 B)

解：可能組隊的情形如下：

$$(1) 2 \text{ 男 } 6 \text{ 女} : C_2^4 \times C_6^7 = 6 \times 7 = 42$$

$$(2) 3 \text{ 男 } 5 \text{ 女} : C_3^4 \times C_5^7 = 4 \times 21 = 84$$

$$(3) 4 \text{ 男 } 4 \text{ 女} : C_4^4 \times C_4^7 = 1 \times 35 = 35$$

$$\text{共有 } 42 + 84 + 35 = 161$$

答：161

36. 某校辯論社由 5 名男生及 5 名女生組成。現從其中選出 5 人組成代表隊，且男生、女生均至少要有 1 人，則組隊方法共有多少種？答：_____種方法。(93 敏督利颱風指考乙)

解：利用反面解題：

$$\text{任選出 5 人} - (0 \text{ 男 } 5 \text{ 女}) - (5 \text{ 男 } 0 \text{ 女}) = C_5^{10} - C_5^5 - C_5^5 = 252 - 1 - 1 = 250$$

答：250

37. 在數線上有一個運動物體從原點出發，在此數線上跳動，每次向正方向或負方向跳 1 個單位，跳動過程可重複經過任何一點。若經過 6 次跳動後運動物體落在點 +4 處，則此運動物體共有_____種不同的跳動方法。(94 學測)

解：經過 6 次跳動後，運動物體落在 +4 處 \Leftrightarrow 跳動 5 次 +1, 1 次 -1。

$$\text{故共有 } \frac{6!}{5!1!} = 6 \text{ 種不同的跳動方法。}$$

答：6 種

38. 新新鞋店為與同業進行促銷戰，推出「第二雙不用錢---買一送一」的活動。該鞋店共有八款鞋可供選擇，其價格如下：

款式	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛
價格	670	670	700	700	700	800	800	800

規定所送的鞋之價格一定少於所買的價格(例如：買一個「丁」款鞋，可送甲、乙兩款鞋之一)。若有一位新新鞋店的顧客買一送一，則該顧客所帶走的兩雙鞋，其搭配方法一共有_____種。(95 學測)

解：(1) 若買 800 元的鞋：有(己、庚、辛) 3 款，可送(甲、乙、丙、丁、戊) 5 款， \Rightarrow 有 $C_1^3 \times C_1^5 = 3 \times 5 = 15$ 種方式

(2) 若買 700 元的鞋：有(丙、丁、戊) 3 款，可送(甲、乙) 2 款， \Rightarrow 有 $C_1^3 \times C_1^2 = 3 \times 2 = 6$ 種方式

共有 $15 + 6 = 21$ 種方式

答：21 種

39. 某地共有 9 個電視頻道，將其分配給 3 個新聞台、4 個綜藝台及 2 個體育台共三種類型。若同類型電視台的頻道要相鄰，而且前兩個頻道保留給體育台，則頻道的分配方式共有_____種。(95 學測)

解：體 1 體 2 _____

↓

2!

↓

新新新(3!) × 綜綜綜綜(4!) × 新、綜互換(2!)

答：共有 $2! \times 3! \times 4! \times 2 = 576$ 種

40. 某大學數學系甄選入學的篩選方式如下：

先就學科能力測驗國文、英文和社會這三科成績(級分)加總做第一次篩選。然後從通過篩選的學生當中，以自然科的成績做第二次篩選。最後再從通過的學生當中，以數學科的成績做第三次篩選，選出一些學生參加面試。現在有五位報名該系的學生的學科能力測驗成績如下表：(95 數乙 2)

學生	國文級分	英文級分	數學級分	社會級分	自然級分
甲	13	8	14	15	11
乙	12	12	12	12	12
丙	9	13	15	8	15
丁	11	12	13	10	13
戊	13	15	11	7	12

已知這五位學生當中，通過第一次篩選的有四位，通過第二次篩選的有三位，通過第三次篩選可以參加面試的只剩下一位。請問哪一位學生參加面試？

- (1) 甲 (2) 乙 (3) 丙 (4) 丁 (5) 戊

解：(1)第一次篩選以國文、英文、社會級分之和比較：第一次甲，乙，丁，戊四人通過

	甲	乙	丙	丁	戊
級分和	36	36	30	33	35

(2)第二次篩選，比較甲，乙，丁，戊的自然級分：丁 > 乙 = 戊 > 甲，第二次乙，丁，戊三人通過。

(3)第三次篩選，比較乙，丁，戊的數學級分：丁 > 乙 > 戊，第三次丁通過可參加面試

答：(4)

41.一個「訊息」是由一串 5 個數字排列組成，且每位數字都只能是 0 或 1,例如 10010 與 01011 就是兩個不同的訊息。兩個訊息的「距離」定義為此兩組數字串相對應位置中，數字不同的位置數。例如，數字串 10010 與 01011 在第 1, 2 及 5 三個位置不同，所以訊息 10010 與 01011 的距離為 3。試問以下哪些選項是正確的？(95 數乙 5)

- (1)與訊息 10010 相距最遠的訊息為 11101 (2)任兩訊息之間的最大可能距離是 4
 (3)與訊息 10010 相距為 1 的訊息恰有 5 個 (4)與訊息 10010 相距為 2 的訊息恰有 9 個

解：(A)最遠的訊息為 01101

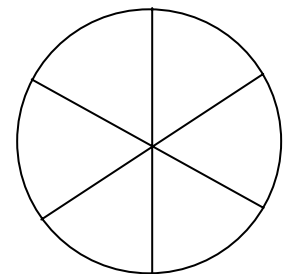
(B)最大可能距離是 5

(C) $C_1^5 = 5$

(D) $C_2^5 = 10$

答：(C)

42.如下圖所示，某摩天輪等分為 6 個全等區域。為了夜間的燈光造景，6 個區域分別採用不同顏色的燈光裝飾。若有 7 種不同顏色的燈光可供使用，則此摩天輪正面的夜間燈光造景共有_____種不同的顏色排列方式。(95 數乙 C)

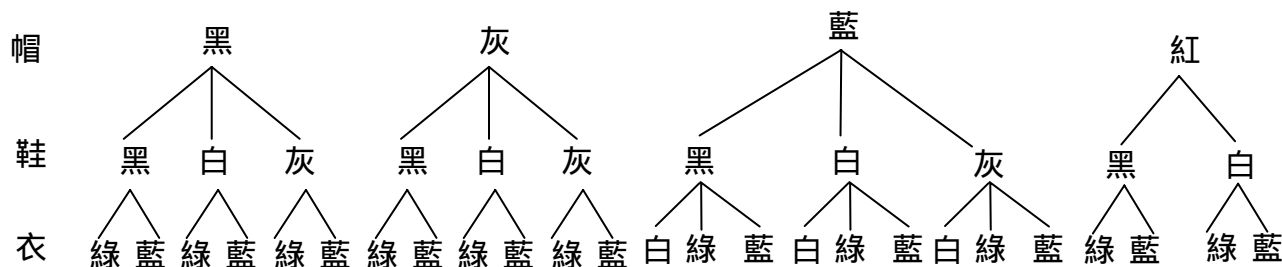


解： $C_6^7 \times \frac{6!}{6} = 840$

答：840

43.某公司生產多種款式的「阿民」公仔，各種款式只是球帽、球衣或球鞋顏色不同。其中球帽共有黑、灰、紅、藍四種顏色，球衣有白、綠、藍三種顏色，而球鞋有黑、白、灰三種顏色。公司決定紅色的球帽不搭配灰色的鞋子，而白色的球衣則必須搭配藍色的帽子，至於其他顏色間的搭配就沒有限制。在這些配色的要求之下，最多可有_____種不同款式的「阿民」公仔。(96 學測)

解：



共有 $6 + 6 + 9 + 4 = 25$ 種

答：25 種

44. 如圖，A 城到 B 城之間有甲、乙、丙、丁、戊五城，其間連結的道路如圖所示。

今從 A 城出發走向 B 城，要求每條道路都要經過並且只經過一次，

則總共有_____種走法。(96 指考乙)



解： $C_1^3 \times C_1^2 \times C_1^1 = 6$

答：6

45. 某地區的車牌號碼共六碼，其中前兩碼為 O 以外的英文大寫字母，後四碼為 0 到 9 的阿拉伯數字，但規定不能連續出現三個 4。例如：AA1234，AB4434 為可出現的車牌號碼；而 AO1234，AB3444 為不可出現的車牌號碼。則所有第一碼為 A 且最後一碼為 4 的車牌號碼個數為 (97 學測)

- (1) 25×9^3 (2) $25 \times 9^2 \times 10$ (3) 25×900 (4) 25×990 (5) 25×999

解：

<table border="1" style="margin-bottom: 5px;"> <tr><td style="width: 20px; height: 20px;">A</td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">↓</td><td style="text-align: center;">↓</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">25</td></tr> </table> <table border="1" style="margin-bottom: 5px;"> <tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;">4</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">↓</td><td style="text-align: center;">↓</td><td style="text-align: center;">↓</td><td style="text-align: center;">↓</td><td style="text-align: center;">↓</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">10</td><td style="text-align: center;">10</td><td style="text-align: center;">10</td><td style="text-align: center;">10</td><td style="text-align: center;">1</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">有 $1 \times 25 \times 10 \times 10 \times 10 \times 1 = 25 \times 1000$</p>	A		↓	↓	1	25					4	↓	↓	↓	↓	↓	10	10	10	10	1	<p>連續出現三個 4</p> <table border="1" style="margin-bottom: 5px;"> <tr><td style="width: 20px; height: 20px;">A</td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">↓</td><td style="text-align: center;">↓</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">25</td></tr> </table> <table border="1" style="margin-bottom: 5px;"> <tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;">4</td><td style="width: 20px; height: 20px;">4</td><td style="width: 20px; height: 20px;">4</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">↓</td><td style="text-align: center;">↓</td><td style="text-align: center;">↓</td><td style="text-align: center;">↓</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">10</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">1</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">有 $1 \times 25 \times 10 \times 1 \times 1 \times 1 = 25 \times 10$</p>	A		↓	↓	1	25		4	4	4	↓	↓	↓	↓	10	1	1	1
A																																								
↓	↓																																							
1	25																																							
				4																																				
↓	↓	↓	↓	↓																																				
10	10	10	10	1																																				
A																																								
↓	↓																																							
1	25																																							
	4	4	4																																					
↓	↓	↓	↓																																					
10	1	1	1																																					

可能情形共有 $25 \times 1000 - 25 \times 10 = 25 \times 990$

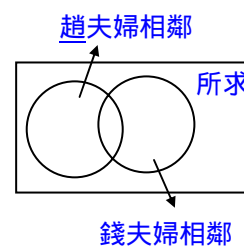
答：(4)

46. 趙氏與錢氏兩對夫婦，以及孫先生、李先生圍坐一個六人座圓桌吃飯，其中趙先生和孫先生已在兩個相鄰的位子坐定。若限定夫妻不得相鄰，則其他四人就座的方法共有_____種。(97 指考乙 A)

解： 趙先生與孫先生已固定位子，其餘 4 人的入座方式視為直線排列。如下文氏圖

$$\begin{aligned} \text{所求} &= n(4 \text{ 人任意坐}) - n(\text{趙夫婦相鄰或錢夫婦相鄰}) \\ &= n(4 \text{ 人任意坐}) - [n(\text{趙夫婦相鄰}) + n(\text{錢夫婦相鄰}) - n(\text{趙與錢夫婦均相鄰})] \\ &= 4! - (3! + 3! \cdot 2! - 2! \cdot 2!) = 24 - (6 + 12 - 4) = 10 \end{aligned}$$

趙太太只有 1 種選擇，其餘 3 人任意排



答：10

47. 某動物園的遊園列車依序編號 1 到 7 號，共有 7 節車廂，今想將每節車廂畫上一種動物。如果其中的兩節車廂畫企鵝，另兩節車廂畫無尾熊，剩下的三節車廂畫上貓熊，並且要求最中間的三節車廂必須有企鵝、無尾熊及貓熊，則 7 節車廂一共有_____種畫法。(98 數乙 D)

解：最中間的三節車廂：由企鵝、無尾熊、貓熊排列，有 $3! = 6$ 種畫法

前後共剩四節車廂：由企鵝、無尾熊、貓熊、貓熊排列，有 $\frac{4!}{2!} = 12$ 種畫法

依序完成，有 $6 \times 12 = 72$ 種畫法

答：72

48. 若數列 $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_{10}$ 中每一項皆為 1 或 -1，則 $a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots + a_{10}$ 之值有多少種可能？(99 學測 1)

- (1) 10 (2) 11 (3) P_2^{10} (4) C_2^{10} (5) 2^{10}

解：可能情形有：

10 個 1，0 個 -1，則 $a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots + a_{10} = 10 \times 1 + 0 \times (-1) = 10$

9 個 1，1 個 -1，則 $a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots + a_{10} = 9 \times 1 + 1 \times (-1) = 8$

8 個 1，2 個 -1，則 $a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots + a_{10} = 8 \times 1 + 2 \times (-1) = 6$

.....

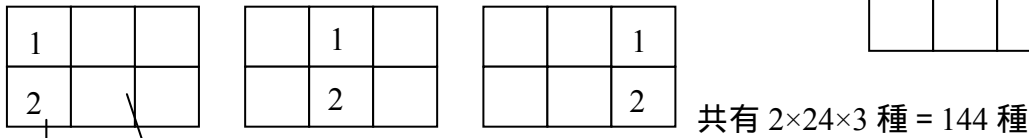
0 個 1，10 個 -1，則 $a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots + a_{10} = 0 \times 1 + 10 \times (-1) = -10$

共 11 種可能

答：(2)

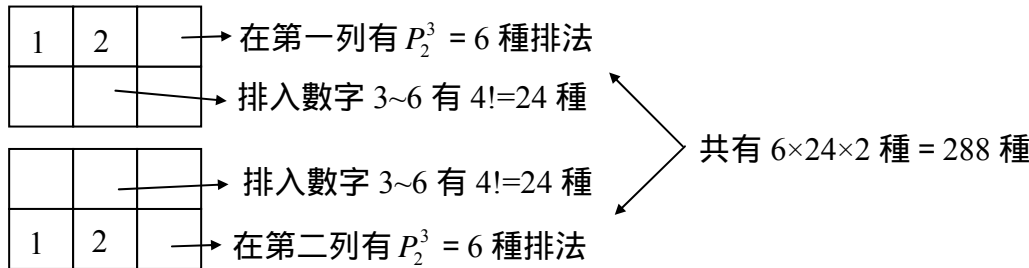
49. 有一個兩列三行的表格如右下圖。在六個空格中分別填入數字 1、2、3、4、5、6 (不得重複)，則 1、2 這兩個數字在同一行或同一列的方法有 _____ 種。(99 學測 C)

解：(1) 若數字 1、2 在同一行



2 種排法 排入數字 3~6 有 $4! = 24$ 種

(2) 若數字 1、2 在同一列



由(1)、(2)得知同一行或同一列共有 $144 + 288 = 432$ 種方法

答：432 種

50. 棒球比賽每隊的先發守備位置有九個：投手、捕手、一壘手、二壘手、三壘手、游擊手、右外野、中外野、左外野各一位。某一棒球隊有 18 位可以先發的球員，由教練團認定可擔任的守備位置球員數情形如下：(99 數乙 C)

- (一) 投手 4 位、捕手 2 位、一壘手 1 位、二壘手 2 位、三壘手 2 位、游擊手 2 位；
- (二) 外野手 4 位 (每一位外野手都可擔任右外野、中外野或左外野的守備)；
- (三) 另外 1 位是全隊人氣最旺的明星球員，他可擔任一壘手與右外野的守備。

已知開幕戰的比賽，確定由某位投手先發，而且與此投手最佳搭檔的先發捕手也已確定，並由人氣最旺的明星球員擔任一壘手守備，其餘六個守備位置就上述可擔任的先發球員隨意安排，則此場開幕戰共有 _____ 種先發守備陣容。(當九個守備位置只要有一個球員不同時，就視為不同的守備陣容)

解：投手、捕手與一壘手人選已決定 \Rightarrow 方法數 = 1

二壘手 2 位選 1 位 \Rightarrow 方法數 = $C_1^2 = 2$

三壘手 2 位選 1 位 \Rightarrow 方法數 = $C_1^2 = 2$

游擊手 2 位選 1 位 \Rightarrow 方法數 = $C_1^2 = 2$

外野手 4 位選 3 位擔任右外野、中外野和左外野 \Rightarrow 方法數 = $C_3^4 \times 3! = 24$ ， 共有 $1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 24 = 192$ 種

51. 設 a, b, c, d 都是 20 以內的正奇數，考慮五次整係數多項式函數 $p(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 2$

(1) 試問滿足上述條件的五次整係數多項式函數 $p(x)$ 共有多少個？(99 數乙一)

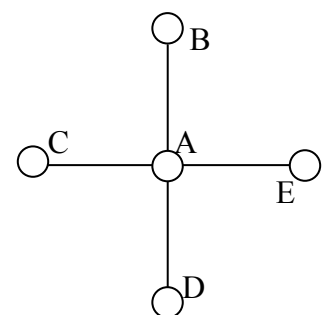
(2) 試求多項式方程式 $x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 3x + 2 = 0$ 的所有整數根。

解：(1) 20 以內的正奇數有 1, 3, 5, ..., 19 等 10 個

$\Rightarrow a, b, c, d$ 各別從 10 個數中任選 1 個，方法數有 $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$ 個

(2) 略

52. 如圖，平面上五個大小相同的圓圈用四根長度相同的線段連接成十字形。其中任意兩相鄰線段均互相垂直。今欲將其中兩個圓圈著上藍色，其他圓圈著上紅色，並規定在著好色之後將圖形繞十字形的中心旋轉產生的各種著色法均是為同一種，試問共有幾種著色法？(100 數乙 2)

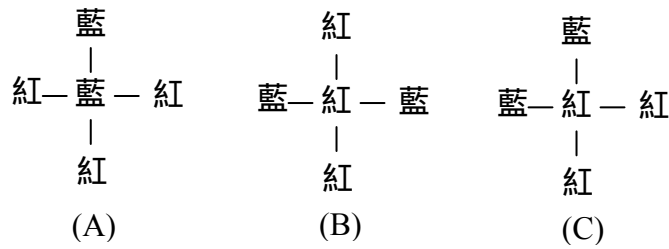


- (1) 3 (2) 6 (3) 10 (4) 20 (5) 32

解：AB 著藍色(AC, AD, AE)旋轉後都相同 = 1 種，如圖 A

CE 著藍色，旋轉後 = BD 著藍色 BD 相同 = 1 種，如圖 B

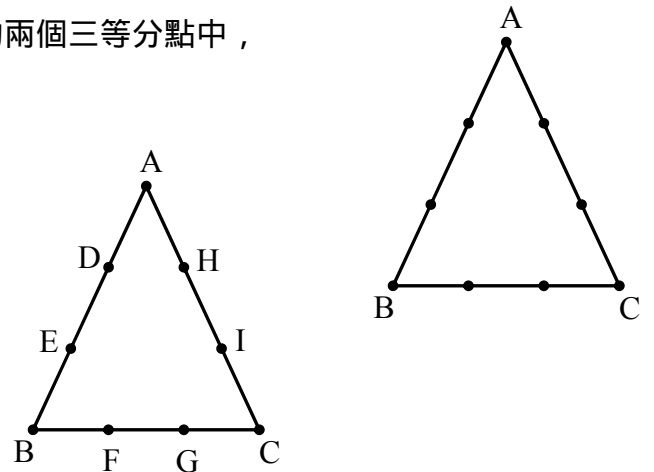
BC 著藍色，旋轉後 = CD 著藍色(DE, BE)相同 = 1 種，如圖 C



答：(1)

53. 三角形 ABC 是一個邊長為 3 的正三角形，如下圖所示。若在每一邊的兩個三等分點中，各選取一點連成三角形，則下列哪些選項式正確的？(101 學測 9)

- (1) 依此方法可能連成的三角形一共有 8 個
- (2) 這些可能連成的三角形中，恰有 2 個是銳角三角形
- (3) 這些可能連成的三角形中，恰有 3 個是直角三角形
- (4) 這些可能連成的三角形中，恰有 3 個是鈍角三角形
- (5) 這些可能連成的三角形中，恰有 1 個是正三角形



解：(1) 連成的三角形共有 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 個

- (2) 銳角三角形有 $\triangle DIF, \triangle EHG$
- (3) 直角三角形為以 D、E、F、G、H、I 為直角的三角形
- (5) 正三角形有 $\triangle DIF, \triangle EHG$

答：(1)(2)

54. 一乒乓球隊有 6 位選手，其中甲、乙、丙為右手持拍的選手，丁、戊為左手持拍的選手，而已為左右手皆可持拍的選手。現在要派出兩名選手參加雙打，規定由一名可以右手持拍的選手與一名可以左手持拍的選手搭配。請問共有多少種可能的搭配？(101 數乙 3)

- (1) 7 (2) 9 (3) 11 (4) 13 (5) 15

解：(1) 己搭配右手持拍有 3 種方法，

己搭配左手持拍有 2 種方法；則有 $3 + 2 = 5$ 種方法

(2) 甲、乙、丙派出 1 人搭配丁、戊派出 1 人有 $3 \times 2 = 6$ 種方法

由(1)(2)得知共有 $5 + 6 = 11$ 種方法

答：(3)

55. 將 $(x^2 + y)^{12}$ 展開集項後，請選出正確的選項。(101 數乙 5)

- (1) x^{24} 的係數小於 $x^{10}y^7$ 的係數
- (2) $x^{12}y^6$ 的係數小於 $x^{10}y^7$ 的係數
- (3) $x^{14}y^5$ 的係數小於 $x^{10}y^7$ 的係數
- (4) x^8y^8 的係數小於 $x^{10}y^7$ 的係數

解：根據二項式定理，設 $(x^2 + y)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_k^{12} (x^2)^k y^{12-k}$ ，一般項係數為 $C_k^{12} (x^2)^k y^{12-k} = C_k^{12} x^{2k} y^{12-k}$

- (1) x^{24} 的係數 = C_{12}^{12} ， $x^{10}y^7$ 的係數 = C_5^{12} ，且 $C_{12}^{12} = 1 < C_5^{12}$ ，正確
- (2) $x^{12}y^6$ 的係數 = C_6^{12} ， $x^{10}y^7$ 的係數 = C_5^{12} ，但 $C_6^{12} > C_5^{12}$ ，不正確
- (3) $x^{14}y^5$ 的係數 = C_7^{12} ， $x^{10}y^7$ 的係數 = C_5^{12} ，但 $C_7^{12} = C_5^{12}$ ，不正確
- (4) x^8y^8 的係數 = C_4^{12} ， $x^{10}y^7$ 的係數 = C_5^{12} ，且 $C_4^{12} < C_5^{12}$ ，正確

答：(1)(4)

56. 學校規定上學期成績需同時滿足以下兩項要求，才有資格參選模範生。(102 學測 1)

- 一、國文成績或英文成績 70 分(含)以上；
- 二、數學成績及格。

已知小文上學期國文 65 分而且他不符合參選模範生資格。請問下列哪一個選項的推論是正確的？

- (1)小文的英文成績未達 70 分
- (2)小文的數學成績不及格
- (3)小文的英文成績 70 分以上但數學成績不及格
- (4)小文的英文成績未達 70 分且數學成績不及格
- (5)小文的英文成績未達 70 分或數學成績不及格

解：~(一且二) ≡ ~一或~二，其中

~一 ≡ ~(國文成績或英文成績 70 分(含)以上) ≡ 國文成績未達 70 分且英文成績未達 70 分

~二 ≡ ~(數學成績及格) ≡ 數學成績不及格

(5)滿足

答：(5)【數學 2，第 2 章排列、組合】

57. 將 24 顆雞蛋分裝到紅、黃、綠的三個籃子。每個籃子都要有雞蛋，且黃、綠兩個籃子裡都裝奇數顆。請選出分裝的方法數。(1) 55 (2) 66 (3) 132 (4) 198 (5) 253 (102 學測 5)

解：設紅、黃、綠各裝 r, y, g 個，且 $r = a + 1, y = 2b + 1, g = 2c + 1, a, b, c$ 為非負整數

$r + y + g = 24, \Rightarrow (a + 1) + (2b + 1) + (2c + 1) = 24, \Rightarrow a + 2(b + c) = 21$ 且 a 為奇數

a	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1
b	0	1~0	2~0	3~0	4~0	5~0	6~0	7~0	8~0	9~0	10~0
c	0	0~1	0~2	0~3	0~4	0~5	0~6	0~7	0~8	0~9	0~10
方法數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

方法數共有 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 66$

答：(2)

58. 從玫瑰、菊花、杜鵑、蘭花、山茶、水仙、繡球等七盆花中選出四盆靠在牆邊排成一列，其中杜鵑及山茶都被選到，且此兩盆花位置相鄰的排法有 $\underline{\quad 8 \quad 9 \quad 10}$ 種。(102 數乙 A)

解： $\underbrace{C_2^5}_{\text{其他 5 盆選出 2 盆}} \times \underbrace{3!}_{\text{相鄰視為一體，共 3 盆排列}} \times \underbrace{2!}_{\text{杜鵑、山茶排列}} = 120$

答：120

59. 設 $(1 + \sqrt{2})^6 = a + b\sqrt{2}$ ，其中 a, b 為整數。請問 b 等於下列哪一個選項？(103 學測 5)

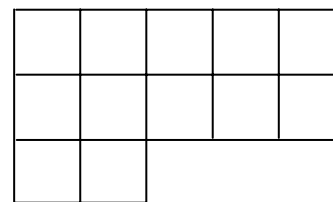
- (1) $C_0^6 + 2C_2^6 + 2^2C_4^6 + 2^3C_6^6$
- (2) $C_1^6 + 2C_3^6 + 2^2C_5^6$
- (3) $C_0^6 + 2C_1^6 + 2^2C_3^6 + 2^4C_4^6 + 2^5C_5^6 + 2^6C_6^6$
- (4) $2C_1^6 + 2^2C_3^6 + 2^3C_5^6$
- (5) $C_0^6 + 2^2C_2^6 + 2^4C_4^6 + 2^6C_6^6$

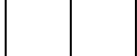

解：利用二項式定理展開：

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{2})^6 &= C_0^6 + C_1^6 \sqrt{2} + C_2^6 (\sqrt{2})^2 + C_3^6 (\sqrt{2})^3 + C_4^6 (\sqrt{2})^4 + C_5^6 (\sqrt{2})^5 + C_6^6 (\sqrt{2})^6 \\ &= C_0^6 + C_1^6 \sqrt{2} + 2C_2^6 + 2\sqrt{2} C_3^6 + 4C_4^6 + 4\sqrt{2} C_5^6 + 8C_6^6 \\ &= (C_0^6 + 2C_2^6 + 4C_4^6 + 8C_6^6) + (C_1^6 + 2C_3^6 + 4C_5^6)\sqrt{2}, \Rightarrow \text{故 } b = C_1^6 + 2C_3^6 + 4C_5^6 \end{aligned}$$

答：(2)

60. 一個房間的地面是由 12 個正方形所組成，如右圖。今想用長方形瓷磚鋪滿地面，



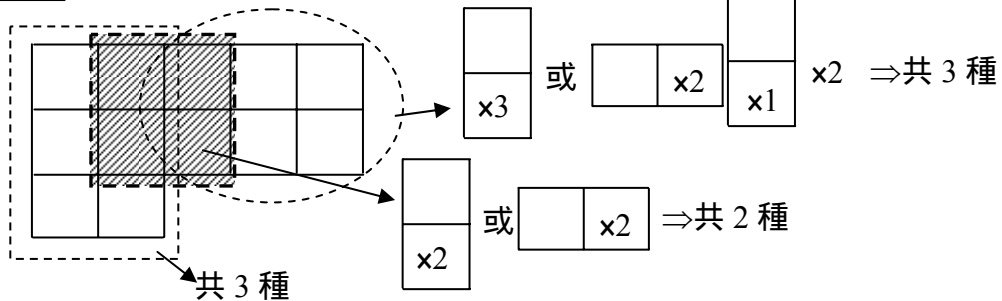
已知每一塊長方形瓷磚可以覆蓋兩個相鄰的正方形，即  或 。

則用 6 塊瓷磚鋪滿房間地面的方法有 28 29 種。

解：如右圖，

共 $3 \times 3 + 2 = 11$

答：11 (103 學測 F)



61. 用 1、5、6、7、9 組成的三位數 (不同位可以用相同數字)，其個位數字、十位數字、百位數字的總和為偶數者共有 8 9 種。(103 指考數乙 A)

解：(1) 為 666，方法數 1 種

(2) 為 $6ab$ ， a, b 為 (1,5,7,9) 中二個不同奇數： $1(\text{排入 } 6) \times C_2^4 (1,5,7,9 \text{ 選 } 2 \text{ 個}) \times 3!$ (3 個不同的數排列) = 36

(3) 為 $6aa$ ， a 為 (1,5,7,9) 中一個奇數： $1(\text{排入 } 6) \times C_1^4 (1,5,7,9 \text{ 選 } 1 \text{ 個}) \times \frac{3!}{2!}$ (二同一異的數排列) = 12

共 $1 + 36 + 12 = 49$

答：49