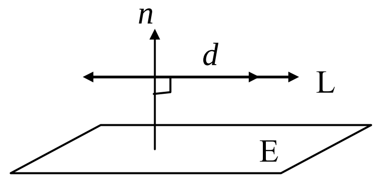
第 12 單元　空間中的平面與直線

1.設直線 L 的方程式為 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$，則下列那一個平面與 L 平行？(83 推甄 2)

(1) $2x-y+z=1$　(2) $x+y-z=2$　(3) $3x-y+2z=1$　(4) $3x+2y+z=2$　(5) $x-3y+z=1$

解：1.如右圖，設平面 E：$ax+by+cz=k$，法向量為 $\vec{n}(a，b，c)$



2.∵直線 L：$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$，∴其方向向量 $\vec{d}(3，-1，2)$

⇒若平面 E 與直線 L 平行，則 $\vec{n}\perp\vec{d}$，即 $(a，b，c)\cdot(3，-1，2)=0$

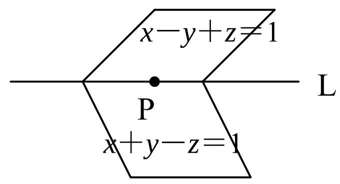
3.(2)表平面 E：$x+y-z=2$，$(a，b，c)=(1，1，-1)$滿足 $(a，b，c)\cdot(3，-1，2)=0$

答：(2)

2.設 L 為 $x-y+z=1$ 與 $x+y-z=1$ 兩平面的交線，則直線 L 上與點(1，2，3)距離最近之點的坐標為_____。(83 推甄 7)

解：(1)如圖，令 A(1，2，3)

平面 $x-y+z=1$ 的法向量為(1，－1，1)，平面 $x+y-z=1$ 的法向量為(1，1，－1)



且(1，－1，1)×(1，1，－1)＝(0，2，2)＝2(0，1，1)

∴取直線 L 的方向向量為(0，1，1)

(2)∵L：$\begin{cases}x-y+z=1\\x+y-z=0\end{cases}$，點(1，0，0)∈L，設 P：$\begin{cases}x=1+0t\\y=0+1\cdot t\\z=0+1\cdot t\end{cases}$，$t\in R$，為 L 上任一點

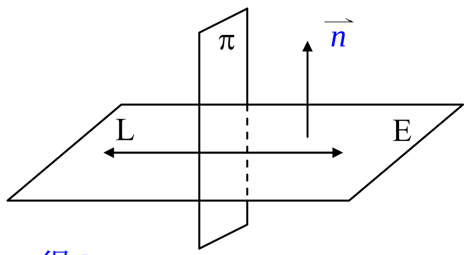
∴ $\overline{AP}=\sqrt{(1-1)^2+(t-2)^2+(t-3)^2}=\sqrt{2t^2-10t+13}=\sqrt{2(t-\frac{5}{2})^2+\frac{1}{2}}$

⇒當 $t=\dfrac{1}{2}$ 時，即 P(1，$\dfrac{5}{2}$，$\dfrac{5}{2}$)，$\overline{AP}$ 最小值 $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

答：(1，$\dfrac{5}{2}$，$\dfrac{5}{2}$)

3.給定一平面π：$x-3y+2z+4=0$ 及一直線 L：$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-6}{3}=\dfrac{z+1}{-5}$，試求在空間中包含 L 而與π垂直之平面方程式。

解：(1)設所求平面 E 之法向量為 $\vec{n}$



∵平面π⊥平面 E，∴$\vec{n}$⊥平面π之法向量(1，－3，2)

∵直線 L 在平面 E 上，∴$\vec{n}$⊥直線 L 之方向向量(2，3，－5)

且(1，－3，2)×(2，3，－5)＝(9，9，9)＝9(1，1，1)

(2)取法向量為 $\vec{n}$＝(1，1，1)

設平面 E：$x+y+z=k$，∵直線 L 上一點(－1，6，－1)∈E，代入平面 E，∴得 $k=4$

則平面 E：$x+y+z=4$

答：$x+y+z=4$　(83 自然三)

4.右圖中 ABCD 為正四面體，M 為 $\overline{CD}$ 的中點，試問下列那些敘述是正確的？(84 推甄 11)

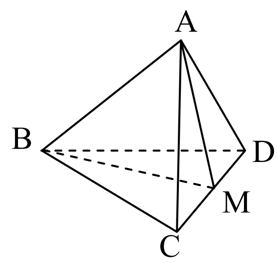
(1)直線 $\overline{CD}$ 與平面 ABM 垂直

(2)向量 AB 與向量 CD 垂直

(3)∠AMB＞∠ADB

(4)平面 ACD 與平面 BCD 的二面角(銳角)大於 60°

(5) $\overline{BA}=\overline{BM}$



解：(1)∵ $\overline{AM}\perp\overline{CD}$ ($\overline{AM}$ 為ΔACD 之高)，$\overline{BM}\perp\overline{CD}$ ($\overline{BM}$ 為ΔBCD 之高)

∴直線 $\overline{CD}$⊥平面 ABM

(2)∵ $\overrightarrow{CD}$⊥平面 ABM，∴ $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$

(3)∵在ΔACD、ΔAMB 中，$\overline{AM}=\overline{BM}<\overline{AD}=\overline{BD}$ 且∠AMB 與∠ADB 對同一線段 $\overline{AB}$

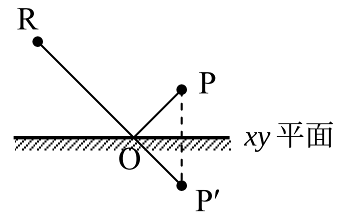
∴∠AMB＞∠ADB＝60^0

(4)∵平面 ACD 與平面 BCD 的二面角為∠AMB，∴∠AMB＞60^0

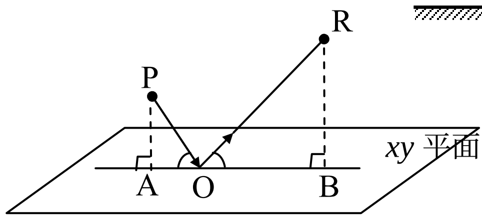
(5)∵ $\overline{BM}$ 為ΔBCD 之高，∴ $\overline{BM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}$

答：(1)(2)(3)(4)

5.在空間坐標中，設 xy 平面為一鏡面，有一光線通過點 P(1，2，1)，射向鏡面上的點 O(0，0，0)，經鏡面反射後通過 R，若 $\overline{OR}=2\overline{PO}$，則 R 點的坐標為＿＿。(84 推甄 20)



解：(1)如右圖，設 R(x，y，z)，則 P，R 點在 xy 平面上的對稱點為 P′(1，2，－1)
根據分點公式，(0，0，0)＝2(1，2，－1)＋(x，y，z)，∴(x，y，z)＝(－2，－4，2)
(2)∵ΔAOP 相似於ΔBOR，且已知 $\overline{PO}:\overline{OR}=1:2$
∴ $\overline{OA}:\overline{OB}=1:2$，且 $z=2$，B(x，y，0)
由比例性質得 3(0，0，0)＝2(1，2，0)＋(x，y，0)，
∴B(x，y，0)＝B(－2，－4，0)，⇒ R(－2，－4，2)

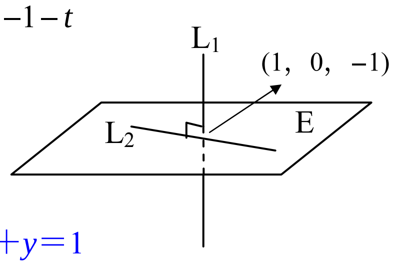


答：(－2，－4，2)

6.已知直線 L₁、L₂ 交於(1，0，－1)，且相互垂直，其中 $L_1:\begin{cases}x=1+t\\ y=t\\ z=-1\end{cases}\ t\in R$，$L_2:\begin{cases}x=1+t\\ y=-t\\ z=-1-t\end{cases}\ t\in R$，

若以 L_1 為軸將 L_2 旋轉一圈得一平面，則此平面的方程式為：(85 推甄 3)

(1) $x=1$ (2) $y=0$ (3) $x+y-1=0$ (4) $x-y-z=2$ (5) $x+y-3=0$

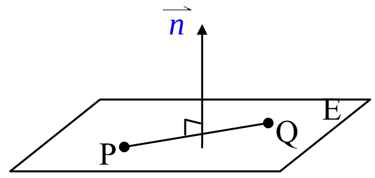


解：如右圖，設平面 E 為所求，且其法向量為 $\vec{n}$
∵$L_1\perp L_2$，∴L_1 的方向向量(1，1，0)//$\vec{n}$，⇒取 $\vec{n}$＝(1，1，0)
∴設平面 E：$x+y+0z=k$，∵通過(1，0，－1)代入平面 E，得 $k=1$，⇒ 平面 E：$x+y=1$

答：(3)

7.設 P，Q 為平面 $ax+by+cz=5$ 上相異兩點，且 $\overrightarrow{PQ}=(x_0，y_0，z_0)$，則 $\overrightarrow{PQ}\cdot(a，b，c)$為

(1)不定值，隨(x_0，y_0，z_0)而改變 (2) 25 (3) 5 (4) 0 (5)－1 (86 推甄選 2)



解：如右圖，平面 E 的法向量 $\vec{n}=(a，b，c)$
∵$\vec{n}\perp\overrightarrow{PQ}$，∴$\overrightarrow{PQ}\cdot(a，b，c)=0$

答：(4)

8.設 θ 為兩平面 $2x-y+2z=6$ 與 $3x-4z=2$ 的夾角(取銳角)，則 θ 最接近的整數度數為＿＿度。(86 推甄填 2)

解：平面 $2x-y+2z=6$ 的法向量為(2，－1，2)
平面 $3x-4z=2$ 的法向量為(3，0，－4)
則 $\cos\theta=\left|\dfrac{(2,-1,2)\cdot(3,0,-4)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{3^2+0^2+(-4)^2}}\right|=\dfrac{2}{15}\approx 0.1333$，查表得知 $\theta\approx 82^0$

答：82^0

9.已知三角形由三直線 $y=0$，$3x-2y+3=0$，$x+y-4=0$ 所圍成，則其外接圓之直徑為＿＿。(86 推甄填 4)

解：(1)由 $\begin{cases}y=0\\3x-2y+3=0\end{cases}$，得交點 A(－1，0)；由 $\begin{cases}3x-2y+3=0\\x+y-4=0\end{cases}$，得交點 B(1，3)；由 $\begin{cases}y=0\\x+y-4=0\end{cases}$，得交點 C(4，0)

(2)由 A(－1，0)、B(1，3)、C(4，0)三點為三角形之頂點，設所圍成之外接圓為 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$

⇒A、B、C 三點代入，得 $\begin{cases}1-d+f=0\\1+9+d+3e+f=0\\16+4d+f=0\end{cases}$，⇒ $\begin{cases}d=-3\\e=-1\\f=-4\end{cases}$，得外接圓為 $x^2+y^2-3x-y-4=0$

⇒圓：$x^2+y^2-3x-y-4=0$，其半徑＝$\sqrt{4+(\frac{3}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{26}}{2}$，直徑＝$\sqrt{26}$

答：$\sqrt{26}$

10.在空間中，下列選項中的方程組，何者圖形為一直線？(86 社會 2)

(1) $3x+2y+z=1$，$6x+4y+2z=5$ (2) $\begin{cases}x=2t+1\\y=3t-2\\z=3\end{cases}$，$t$ 為任意實數 (3) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-6}{2}=\dfrac{z-5}{3}$

(4) $2x+y=1$ (5) $x+y-2z=0$，$x-2y+z=1$，$2x-y-z=1$

解：(1) $3x+2y+z=1$，⇒$6x+4y+2z=2$ 與 $6x+4y+2z=5$ 的法向量相同，⇒∴平行，⇒沒有交集，即沒有圖形
(2)為空間中直線的參數式表示法，直線通過點(1，－2，3)，方向向量 $\vec{d}$ 為(2，3，0)

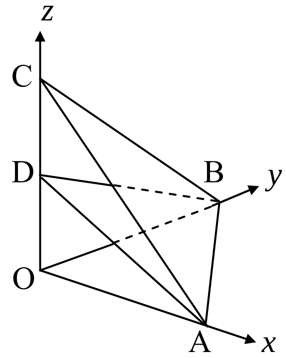
(3)為空間中直線的對稱比例式表示法，直線通過點(2，6，5)，方向向量$\vec{d}$為(3，2，6)

(4) $2x+y=1$，在平面上表示一直線；而 $2x+y+0z=1$ 在空間中表示一平面

(5) $\begin{cases} x+y-2z=0 \cdots\cdots ① \\ x-2y+z=1 \cdots\cdots ② \\ 2x-y-z=1 \cdots\cdots ③ \end{cases}$，①＋②－③得 0＝0 表其有無限多組解，且三平面兩兩不平行，∴三平面相交於一直線

答：(2)(3)(5)

11.在右圖的空間坐標中，O 為原點，點 A，B，C 分別位於 x 軸，y 軸，z 軸上，$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ 且 D 為$\overline{OC}$的中點，求 O 到平面 ABC 與 O 到平面 ABD 的距離之比。(86 社會計算 1)



解：(1)設$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=2k$，∴ $\overline{OD}=k$

(2)平面 ABC：$\dfrac{x}{2k}+\dfrac{y}{2k}+\dfrac{z}{2k}=1$，$\Rightarrow x+y+z=2k$

平面 ABD：$\dfrac{x}{2k}+\dfrac{y}{2k}+\dfrac{z}{k}=1$，$\Rightarrow x+y+2z=2k$

∴d(O，平面 ABC)：d(O，平面 ABD)

$=\dfrac{|0+0+0-2k|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}:\dfrac{|0+0+0-2k|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}:\dfrac{1}{\sqrt{6}}=\sqrt{2}:1$

答：$\sqrt{2}:1$

12.某公司有甲、乙、丙三條生產線，現欲生產三萬個產品，如果甲、乙、丙三條生產線同時開動，則需 10 小時；如果只開動乙、丙兩條生產線，則需 15 小時；如果只開動甲生產線 15 小時，則需再開動丙生產線 30 小時，才能完成所有產品。問如果只開動乙生產線，則需______小時才能生產三萬個產品。(87 推甄 3)

解：設甲、乙、丙三條生產線，獨立生產各需 x，y，z 小時完成，即每小時分別完成$\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{1}{y}$，$\dfrac{1}{z}$

根據題意，得知$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{10} \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{15} \\ \dfrac{15}{x}+\dfrac{30}{z}=1 \end{cases}$，解得$\begin{cases} x=30 \\ y=20 \\ z=60 \end{cases}$，故只開動乙生產線，則需 20 小時才能生產三萬個產品

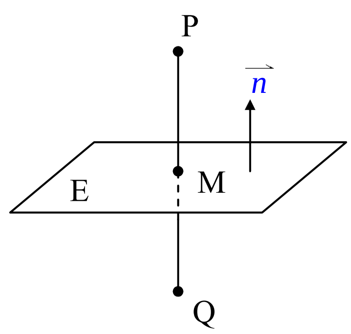
答：20

13.若三平面 $5x+y+2z=-1$，$5x-7y+z=-18$ 與 $3x-y+z=a$ 相交於一直線，則 $a=$_____(87 社會 5)【－4】

解：即$\begin{cases} 5x+y+2z=-1 \\ 5x-7y+z=-18 \\ 3x-y+z=a \end{cases}$，有無限多組解，∴$\triangle=\triangle_x=\triangle_y=\triangle_z=0$，由$\triangle_x=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -18 & -7 & 1 \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$，得 $15a+60=0$，∴$a=-4$

答：－4

14.在空間中，連接點 P(2，1，3)與點 Q(4，5，5)的線段$\overline{PQ}$之垂直平分面為___。(88 學測)



解：(1)如右圖，設垂直平分面 E 的法向量為$\vec{n}$，

∵$\overrightarrow{PQ}$＝(2，4，2)＝2(1，2，1)，∴取$\vec{n}$＝(1，2，1)

(2)令平面 E：$x+2y+z=k$

通過$\overline{PQ}$之中點 M(3，3，4)，代入 E，得知 $k=13$

$\Rightarrow$ E：$x+2y+z=13$

答：$x+2y+z=13$

15.在空間中，已知平面 E 通過(3，0，0)，(0，4，0)及正 z 軸上一點(0，0，a)，如果平面 E 與 xy 平面的夾角成 45 度，那麼 $a=$____。(88 社會 5)

解：(1)設平面 E：$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{a}=1$，$a>0$，化簡為 $4ax+3ay+12z=12a$，得其法向量為$(4a，3a，12)$

(2) xy 平面：$0x+0y+z=0$，其法向量為$(0，0，1)$

(3)$\cos45^0=\dfrac{|(4a,3a,12)\cdot(0,0,1)|}{\sqrt{(4a)^2+(3a)^2+12^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\dfrac{12}{\sqrt{25a^2+144}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，平方 $25a^2+144=288$，取 $a=\dfrac{12}{5}>0$

答：$\dfrac{12}{5}$

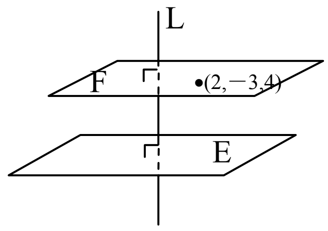
16.空間中有一直線 L 與平面 E：$x+2y+3z=9$ 垂直。試求通過點$(2，-3，4)$且與直線 L 垂直的平面方程式。(89 推甄 B)

解：如右圖，設所求平面為 F

$\because$L$\perp$E，L$\perp$F，$\therefore$F // E

則設 F：$x+2y+3z=k$，且通過$(2，-3，4)$，代入 F，得 $k=8$

$\therefore$F：$x+2y+3z=8$



答：$x+2y+3z=8$

17. E_1：$x+y+z-1=0$ 與 E_2：$x+y+z+1=0$ 兩平面之間的距離為______。(90 自燃 2)

解：$d(E_1，E_2)=\dfrac{|-1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

答：$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

18.下列哪些選項與方程組$\begin{cases}2x+y+3z=0\\4x+3y+6z=0\end{cases}$的解集合相同？(91 學測 9)

(1) $y=0$　(2)$\begin{cases}2x+3z=0\\y=0\end{cases}$　(3) $x=y=0$　(4)$\begin{cases}x+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{3}{2}z=0\\4x+3y+6z=0\end{cases}$　(5)$\begin{cases}6x+4y+9z=0\\2x+y+3z=0\end{cases}$

解 1：(1)$\begin{cases}2x+y+3z=0\cdots(1)\\4x+3y+6z=0\cdots(2)\end{cases}$，由(2)－2×(1)得 $y=0$，代回(1)，得 $2x+3y=0$，$\therefore$選項(2)正確

(2)由(B)得知$\begin{cases}2x+3z=0\\y=0\end{cases}$(表示一直線的兩面式)、$y=0$(表示平面 xz)，解不相等，$\Rightarrow$(1)錯誤

(3) $x=y=0$ 表示 z 軸，與原方程組的解不相等，$\Rightarrow$(3)錯誤

(4)由$\begin{cases}2x+y+3z=0\cdots(1)\\4x+3y+6z=0\cdots(2)\end{cases}$，(1)÷2 得到，與原方程組的解相等，$\Rightarrow$(4)正確

(5)由$\begin{cases}2x+y+3z=0\cdots(1)\\4x+3y+6z=0\cdots(2)\end{cases}$，(1)＋(2)得到 $6x+4y+9z=0$，與原方程組的解相等，或利用行列式之列運算得解，

$\Rightarrow$(5)正確

解 2：由$\begin{cases}2x+y+3z=0\\4x+3y+6z=0\end{cases}$，得知 $x：y：z=\begin{vmatrix}1&3\\3&6\end{vmatrix}：\begin{vmatrix}3&2\\6&4\end{vmatrix}：\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=(-3)：0：2$

$\therefore$其解為$(x，y，z)=(-3k，0，2k)$，$k\in$R，代入檢驗，相同解的有(2)(4)(5)

答：(2)(4)(5)

19.三相異平面兩兩相交於三條相異直線 l_1、l_2、l_3。試問下列選項哪些絕不可能發生？(91 學測補 12)

(1) l_1、l_2、l_3 三線共交點　(2) l_1、l_2、l_3 不共面，但 l_1// l_2// l_3　(3) l_1、l_2、l_3 共平面

(4) l_1、l_2、l_3 兩兩相交，但三點相異　(5) l_1、l_2、l_3 三線中兩兩都是歪斜線

解：設此三相異平面為 E_1、E_2、E_3，且其方程式之係數行列式為Δ

又直線 l_1、l_2、l_3 分別為 E_1 與 E_2、E_2 與 E_3、E_1 與 E_3 之交線，則

(1)若$\Delta\neq0$，則 l_1、l_2、l_3 交於一點，$\therefore$三線有共交點，如右圖 A

(2)若$\Delta=0$，但$\Delta_x\neq0$ 或$\Delta_y\neq0$ 或$\Delta_z\neq0$

表示平面 E_1、E_2、E_3 兩兩相交，則可能 l_1// l_2// l_3，如右圖 B

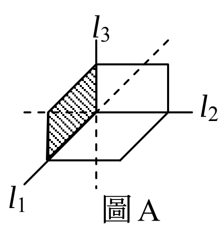


圖 A

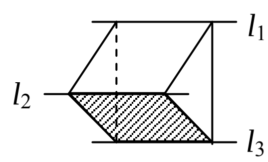


圖 B

答：(3)(4)(5)

20.空間中有三個平面 $5x+4y-4z=kx$，$4x+5y+2z=ky$，$x+y+z=0$，其中 $k<10$，當 $k=$_____時，三個平面交於一線。

解：$\begin{cases}5x+4y-4z=kx\\4x+5y+2z=ky\\x+y+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(5-k)x+4y-4z=0\\4x+(5-k)y+2z=0\\x+y+z=0\end{cases}$

∵三個平面交於一線 $\Rightarrow\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$

∴ $\begin{vmatrix}5-k&4&-4\\4&5-k&2\\1&1&1\end{vmatrix}=0$，展開得$(5-k)^2-16+8+4(5-k)-16-2(5-k)=0$

$\Rightarrow k^2-12k+11=0$，∴$k=1$ 或 $k=11$(不合，∵$k<10$)

答：$k=1$　(91 學測補 E)

21.設 π_a：$x-4y+az=10$ (a 為常數)、E_1：$x-2y+z=5$ 及 E_2：$2x-5y+4z=-3$ 為坐標空間中的三個平面。試問下列哪些敘述是正確的？(92 學測 11)

(1)存在實數 a 使得π_a與 E_1 平行　(2)存在實數 a 使得π_a與 E_1 垂直
(3)存在實數 a 使得π_a，E_1，E_2 交於一點　(4)存在實數 a 使得π_a，E_1，E_2 交於一直線
(5)存在實數 a 使得π_a，E_1，E_2 沒有共同交點

解：(1)若π_a與 E_1 平行 $\Leftrightarrow$ 法向量成比例，則$\frac{1}{1}=\frac{-4}{-2}=\frac{a}{1}\neq\frac{10}{5}$，∴ a 不存在

(2)若π_a與 E_1 垂直 $\Leftrightarrow$ 法向量內積為 0，則 $1\times1+(-4)\times(-2)+a\times1=0$，∴ $a=-9$

(3)(4)(5)

法 1：由 E_1：$x-2y+z=5$，E_2：$2x-5y+4z=-3$，解得 $x=3z+31$，$y=2z+13$

即 E_1 與 E_2 的交線：$x=3t+31$，$y=2t+13$，$z=t$；$t\in R$

代入π_a：$(3t+31)-4(2t+13)+at=10$，∴$(a-5)t-31=0$

(i)當 $a\neq5$ 時，恰有一解，即 π_a，E_1，E_2 交於一點。

(ii)當 $a=5$ 時，無解，即 π_a，E_1，E_2 沒有共同交點。

(iii)方程式$(a-5)t-31=0$ 不可能有無限多解，即三平面不可能交成一直線。

法 2：考慮方程組$\begin{cases}\pi_a: x-4y+az=10\cdots(1)\\E_1: x-2y+z=5\cdots\cdots(2)\\E_2: 2x-5y+4z=-3\cdots(3)\end{cases}$

由(1)－(2)：$-2y+(a-1)z=5$；(2)×2－(3)：$y-2z=13$，

(i)當$\frac{-2}{1}\neq\frac{a-1}{-2}$，即 $a\neq5$ 時，方程組恰有一組解，意即三平面恰交於一點

(ii)當$\frac{-2}{1}=\frac{a-1}{-2}\neq\frac{5}{13}$，即 $a=5$ 時，方程組無解，意即三平面沒有共同交點

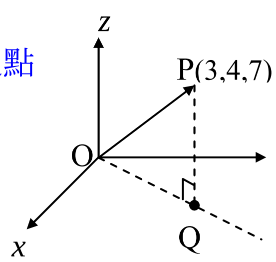
(iii)當$\frac{-2}{1}=\frac{a-1}{-2}=\frac{5}{13}$，無此實數 a，∴方程組不可能無限多組解，亦即三平面不可能交成一直線

答：(2)(3)(5)

22.設坐標空間的原點為 O，點 P 的坐標為(3，4，7)。若 Q 點在 xy 平面上移動，問 Q 點為下列選項中哪一點時，∠POQ 最小？(1) (3，3，0)　(2) (3，4，0)　(3) (4，3，0)　(4) (5，12，0)　(5) (12，5，0)　(92 學測補 6)

解 1：根據題意，當 Q 點是點 P 在 xy-平面上的投影點時，∠POQ 有最小值

⇒如右圖，點 P (3，4，7)在 xy 平面上的投影點為(3，4，0)，即 Q(3，4，0)，(2)為所求之點



解 2：利用比較 $\cos(\angle POQ)=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|}$之值大小

(1)若 Q(3，3，0)，∴$|\overrightarrow{OQ}|=3\sqrt{2}$，則 $\cos(\angle POQ)=\frac{(3,4,7)\cdot(3,3,0)}{|\overrightarrow{OP}|\times3\sqrt{2}}=\frac{7}{|\overrightarrow{OP}|\times\sqrt{2}}$

(2)若 Q (3，4，0)，∴$|\overrightarrow{OQ}|=5$，則 $\cos(\angle POQ)=\frac{(3,4,7)\cdot(3,4,0)}{|\overrightarrow{OP}|\times5}=\frac{5}{|\overrightarrow{OP}|}$

(3)若 Q (4，3，0)，∴$|\overrightarrow{OQ}|=5$，則 $\cos(\angle POQ)=\frac{(3,4,7)\cdot(4,3,0)}{|\overrightarrow{OP}|\times5}=\frac{24}{|\overrightarrow{OP}|\times5}$

(4)若 Q (5，12，0)，$\therefore |\overrightarrow{OQ}|=13$，則 $\cos(\angle POQ)=\dfrac{(3,\ 4,\ 7)\cdot(5,\ 12,\ 0)}{|\overrightarrow{OP}|\times 13}=\dfrac{63}{|\overrightarrow{OP}|\times 13}$

(5)若 Q (12，5，0)，$\therefore |\overrightarrow{OQ}|=13$，則 $\cos(\angle POQ)=\dfrac{(3,\ 4,\ 7)\cdot(12,\ 5,\ 0)}{|\overrightarrow{OP}|\times 13}=\dfrac{56}{|\overrightarrow{OP}|\times 13}$

∵Q 點在 xy-平面上移動，∠POQ 為銳角，且 cos(∠POQ)遞減函數

∴當 $\cos(\angle POQ)=\dfrac{5}{|\overrightarrow{OP}|}$ 最大時，∠POQ 最小

答：(2)

23.考慮坐標空間中三平面$x+2y-3z=1$，$x+3y-2z=-1$及$x+by+cz=1$ (b，c為實數)，試問下列哪些敘述是正確的？

(1)當$b=1$，$c=1$時，三平面沒有共同交點；

(2)當$b=-1$，$c=1$時，三平面恰交於一點；

(3)當$b=4$，$c=-1$時，三平面恰交於一點；

(4)當$b=1$，$c=-4$時，三平面恰交於一直線；

(5)當$b=2$，$c=-3$時，三平面恰交於一直線

解 1：(1)當 $b=1$，$c=1$ 時，三平面的法向量(1，2，－3)，(1，3，－2)，(1，1，1)不平行(不成比例)，得知三平面一定有交點；或由高斯消去法得$\begin{bmatrix}1&2&-3&1\\1&3&-2&-1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&-\frac{8}{5}\\0&0&1&-\frac{2}{5}\end{bmatrix}$，有一交點(一解)

(2)$\because\begin{bmatrix}1&2&-3&1\\1&3&-2&-1\\1&-1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{5}{7}\\0&1&0&-\frac{8}{7}\\0&0&1&-\frac{6}{7}\end{bmatrix}$，有一交點(一解)

(3)$\because\begin{bmatrix}1&2&-3&1\\1&3&-2&-1\\1&4&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-3&1\\0&1&1&-2\\0&1&1&2\end{bmatrix}$，2，3 列矛盾，∴無解，即沒有交點

(4)$\because\begin{bmatrix}1&2&-3&1\\1&3&-2&-1\\1&1&-4&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-3&1\\0&1&1&-2\\0&1&1&-1\end{bmatrix}$，2，3 列矛盾，∴無解，即沒有交點

(5)$\because\begin{bmatrix}1&2&-3&1\\1&3&-2&-1\\1&2&-3&1\end{bmatrix}$，1，3 列成比例，無限多解，即相交於一直線

解 2：利用三元一次方程組之行列式之值，討論其解：

(1) $\Delta=\begin{vmatrix}1&2&-3\\1&3&-2\\1&1&1\end{vmatrix}=5\neq 0$，∴有一解，即三平面交於一點

(2) $\Delta=\begin{vmatrix}1&2&-3\\1&3&-2\\1&-1&1\end{vmatrix}=7\neq 0$，∴有一解，即三平面交於一點

(3) $\Delta=\begin{vmatrix}1&2&-3\\1&3&-2\\1&4&-1\end{vmatrix}=0$，$\Delta_x=\begin{vmatrix}1&2&-3\\-1&3&-2\\1&4&-1\end{vmatrix}\neq 0$，∴無解，三平面兩兩交於一直線，交線兩兩平行

(4) $\Delta=\begin{vmatrix}1&2&-3\\1&3&-2\\1&1&-4\end{vmatrix}=0$，$\Delta_x=\begin{vmatrix}1&2&-3\\-1&3&-2\\1&1&-4\end{vmatrix}\neq 0$，∴無解，三平面兩兩交於一直線，交線兩兩平行

(5) $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & 3 & -2\\ 1 & 1 & -4\end{vmatrix}=0$，$\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$，∴無線多解，三平面交於一直線

答：(2)(5) (92 學測補 11)

24.在坐標空間中給定兩點 A(1，2，3)與 B(7，6，5)。令 S 為 xy 平面上所有使得向量 $\overrightarrow{PA}$ 垂直於向量 $\overrightarrow{PB}$ 的 P 點所成的集合，則(1) S 為空集合　(2) S 恰含一點　(3) S 恰含兩點　(4) S 為一線段　(5) S 為一圓　(93 學測 4)

解：∵P 點在 xy-平面上，∴設點 P 的坐標為$(x，y，0)$，$\overrightarrow{PA}=(1-x，2-y，3)$，$\overrightarrow{PB}=(7-x，6-y，5)$

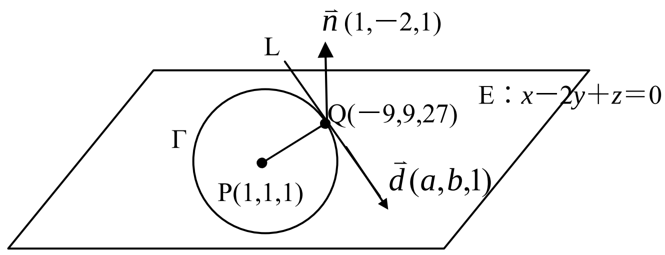
∵$\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$，∴$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，即$(1-x，2-y，3)\cdot(7-x，6-y，5)=0$，得 $x^2+y^2-8x-8y+34=0$

但判別式：$D=(-8)^2+(-8)^2-4\times34<0$ 或 配方為$(x-4)^2+(y-4)^2+2=0$，知 S 為空集合。

答：(1)

25.在坐標空間中，平面 $x-2y+z=0$ 上有一以點 P(1，1，1) 為圓心的圓Γ，而 Q(−9，9，27)為圓Γ上一點。若過 Q 與圓Γ相切的直線之一方向向量為$(a，b，1)$，則 $a=$___，$b=$___。(93 學測 F)

解：如右圖：



(1)∵$\overrightarrow{PQ}\perp\vec{d}(a，b，1)$，得$(-10，8，26)\cdot(a，b，1)=0$，

∴$-5a+4b+13=0$

(2)∵$\vec{n}(1，-2，1)\perp\vec{d}(a，b，1)$，得$(1，-2，1)\cdot(a，b，1)=0$

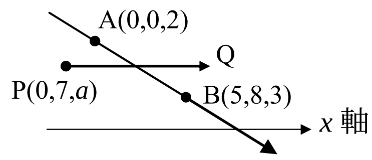
∴$a-2b+1=0$

由(1)(2)解得 $a=5$，$b=3$

答：$a=5$，$b=3$

26.李探長為了找尋槍手的可能發射位置，他設定一空間坐標，先從(0，0，2)朝向(5，8，3)發射一固定雷射光束，接著又從點(0，7，a)沿平行於 x 軸方向發射另一雷射光束，試問當 a 為何值時，兩雷射光束會相交？答：$a=$_____。

解：(1)如右圖，∵$\overrightarrow{AB}=(5，8，1)$，⇒直線 AB：$\begin{cases}x=0+5t=5t\\ y=0+8t=8t\\ z=2+t\end{cases}$，$t\in R$



(2)如右圖，∵$\overrightarrow{PQ}$平行於 x 軸，∴設$\overrightarrow{PQ}=(1，0，0)$，⇒直線 PQ：$\begin{cases}x=0+s=s\\ y=7+0s=7\\ z=a+0s=a\end{cases}$，$s\in R$

(3)兩直線相交，∴交點$\begin{cases}x=5t=s\\ y=8t=7\\ z=2+t=a\end{cases}$，得 $t=\dfrac{7}{8}$，則 $z=2+t=\dfrac{23}{8}=a$

答：$\dfrac{23}{8}$　(93 指考數乙 D)

27.假設坐標空間中三相異平面 E_1、E_2、E_3 皆通過(−1，2，0)與(3，0，2)兩點，試問以下哪些點也同時在此三平面上？

(1) (2，2，2)　(2) (1，1，1)　(3) (4，−2，2)　(4) (−2，4，0)　(5) (−5，−4，−2)　(94 學測 8)

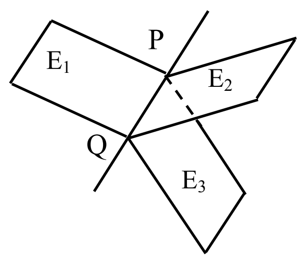
解 1：(1)令 P(−1，2，0)，Q(3，0，2)，∵$\overrightarrow{PQ}=(4，-2，2)=2(2，-1，1)$

取直線 PQ 的方向向量為$\vec{d}$ (2，−1，1)，∴直線 PQ：$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{1}$

(2)若點同時在此三平面 E_1，E_2，E_3 上，則此點必在直線 PQ 上，代入直線 PQ 檢查

點(2，2，2)代入，$\dfrac{2+1}{2}\neq\dfrac{2-2}{-1}$ ⇒不正確

點(1，1，1)代入，$\dfrac{1+1}{2}=\dfrac{1-2}{-1}=\dfrac{1}{1}$ ⇒正確



點(4，−2，2)代入，$\dfrac{4+1}{2}\neq\dfrac{-2-2}{-1}$ ⇒不正確

點(−2，4，0)代入，$\dfrac{-2+1}{2}\neq\dfrac{4-2}{-1}$ ⇒不正確

點(−5，−4，−2)代入，$\dfrac{-5+1}{2}\neq\dfrac{-4-2}{-1}$ ⇒不正確

解 2：令 A(－1，2，0)與 B(3，0，2)，則三相異平面 E_1，E_2，E_3 相交於直線 AB。

∴若點同時在此三平面 E_1，E_2，E_3 上的充要條件是此點在直線 AB 上，亦即其方向向量皆平行

令 P(2，2，2)，Q(1，1，1)，R(4，－2，2)，S(－2，4，0)，T(－5，－4，－2)，∴$\overrightarrow{AB}=(4,\ -2,\ 2)$，

$\overrightarrow{PA}=(3,\ 0,\ 2)$，$\overrightarrow{QA}=(2,\ -1,\ 1)$，$\overrightarrow{RA}=(5,\ -4,\ 2)$，$\overrightarrow{SA}=(-1,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{TA}=(-4,\ -6,\ -2)$，

∵只有 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{QA}$ 平行，∴只有點(2)(1，1，1)在直線 AB 上，也就是在此三平面上。

答：(2)

28.下列哪些選項中的矩陣經過一系列的列運算後可以化成 $\begin{bmatrix}1&2&3&7\\0&1&1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$？(96 學測 8)

(1) $\begin{bmatrix}1&2&3&7\\0&1&1&2\\0&2&3&5\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}-1&3&-1&0\\-1&1&1&0\\3&1&-7&0\end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix}1&1&2&5\\1&-1&1&2\\1&1&2&5\end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix}2&1&3&6\\-1&1&1&0\\-2&2&2&1\end{bmatrix}$　(5) $\begin{bmatrix}1&3&2&7\\0&1&1&2\\0&1&0&1\end{bmatrix}$

解 1：根據題意，$\begin{bmatrix}1&2&3&7\\0&1&1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$ 對應的方程組為 $\begin{cases}x+2y+3z=7\\y+z=2\\z=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}$

(1) $\begin{bmatrix}1&2&3&7\\0&1&1&2\\0&2&3&5\end{bmatrix}$ 對應的方程組為 $\begin{cases}x+2y+3z=7\\y+z=2\\2y+3z=5\end{cases}$，將 $\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}$ 代入，∴正確

(2) $\begin{bmatrix}-1&3&-1&0\\-1&1&1&0\\3&1&-7&0\end{bmatrix}$ 對應的方程組為 $\begin{cases}-x+3y-z=0\\-x+y+z=0\\3x+y-7z=0\end{cases}$，將 $\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}$ 代入，∴不正確

(3) $\begin{bmatrix}1&1&2&5\\1&-1&1&2\\1&1&2&5\end{bmatrix}$ 對應的方程組為 $\begin{cases}x+y+2z=5\\x-y+z=2\\x+y+2z=5\end{cases}$，將 $\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}$ 代入，∴不正確

(4) $\begin{bmatrix}2&1&3&6\\-1&1&1&0\\-2&2&2&1\end{bmatrix}$ 對應的方程組為 $\begin{cases}2x+y+3z=6\\-x+y+z=0\\-2x+2y+2z=1\end{cases}$，將 $\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}$ 代入，∴不正確

(5) $\begin{bmatrix}1&3&2&7\\0&1&1&2\\0&1&0&1\end{bmatrix}$ 對應的方程組為 $\begin{cases}x+3y+2z=7\\y+z=2\\y\quad=1\end{cases}$，將 $\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}$ 代入，∴正確

解 2：根據題意，$\begin{bmatrix}1&2&3&7\\0&1&1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$ 對應的方程組為 $\begin{cases}x+2y+3z=7\\y+z=2\\z=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}$ (1 解)

(1) $\begin{bmatrix}1&2&3&7\\0&1&1&2\\0&2&3&5\end{bmatrix}\times(-2) \Rightarrow \begin{bmatrix}1&2&3&7\\0&1&1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$，∴正確

(2) $\begin{bmatrix}-1&3&-1&0\\-1&1&1&0\\3&1&-7&0\end{bmatrix}$ 對應的方程組為 $\begin{cases}-x+3y-z=0\\-x+y+z=0\\3x+y-7z=0\end{cases}$，必有 $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\end{cases}$ 解，∴不正確

(3) $\begin{bmatrix}1&1&2&5\\1&-1&1&2\\1&1&2&5\end{bmatrix}$ 對應的方程組為 $\begin{cases}x+y+2z=5\\x-y+z=2\\x+y+2z=5\end{cases}$，1，3 列成比例，為無限多解，∴不正確

(4) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 對應的方程組為 $\begin{cases} 2x+y+3z=6 \\ -x+y+z=0 \\ -2x+2y+2z=1 \end{cases}$，1，3 列不成比例，∴無解，∴不正確

(5) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 對應的方程組為 $\begin{cases} x+3y+2z=7 \\ y+z=2 \\ y=1 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$，∴正確

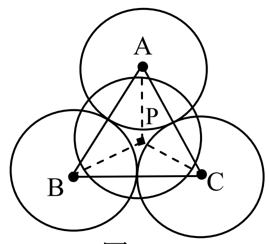
解 3：利用矩陣列運算比較之。

答：(1)(5)

29.坐標空間中，在 xy 平面上置有三個半徑為 1 的球兩兩相切，設其球心分別為 A，B，C。今將第四個半徑為 1 的球置於這三個球的上方，且與這三個球都相切，並保持穩定。設第四個球的球心為 P，試問下列哪些選項是正確的？

(1)點 A，B，C 所在的平面和 xy 平面平行　(2)三角形 ABC 是一個正三角形　(3)三角形 PAB 有一邊長為 $\sqrt{2}$

(4)點 P 到直線 AB 的距離為 $\sqrt{3}$　(5)點 P 到 xy 平面的距離為 $1+\sqrt{3}$



圖一

解：(1)∵A，B，C 三點與 xy 平面的距離均為 1，且三球大小相同又相切

∴ABC 所成之平面在 $z=1$ 的平面上，故與 xy 平面平行

(2)如圖一，$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}=2$，∴ΔABC 為一個正三角形

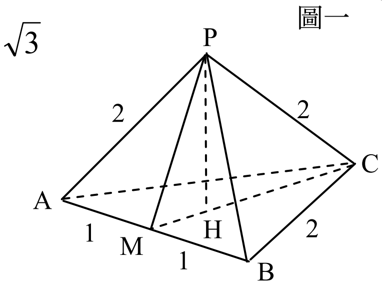
(3)∴ΔPAB 為一正三角形，$\overline{PA}=\overline{AB}=\overline{PB}=2$

(4)如圖二，點 P 到直線 AB 的距離＝$\overline{PM}$ (ΔPAB 底邊 $\overline{BC}$ 的高)＝$\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$

(5)如圖二，∵H 為正ΔABC 的重心，∴$\overline{MH}=\frac{1}{3}\overline{CM}=\frac{1}{3}\overline{PM}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

在ΔPMH 中，$\overline{PH}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-(\frac{\sqrt{3}}{3})^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

∴點 P 到 xy 平面的距離＝$1+\overline{PH}=1+\frac{2\sqrt{6}}{3}$



圖二

答：(1)(2)(5)　(96 學測 9)

30.設坐標空間中三直線 L_1，L_2，L_3 的方程式分別為 L_1：$\frac{x}{1}=\frac{y+3}{6}=\frac{z+4}{8}$，$L_2$：$\frac{x}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+4}{4}$，$L_3$：$\frac{x}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$，試問下列哪些選項是正確的？(97 學測 11)

(1) L_1 與 L_2 相交　(2) L_2 與 L_3 平行　(3)點 P(0，－3，－4)與 Q(0，0，0)的距離即為點 P 到 L_3 的最短距離

(4)直線 L：$\begin{cases} x=0 \\ \frac{y+3}{4}=\frac{z+4}{-3} \end{cases}$ 與直線 L_1、L_2 皆垂直　(5)三直線 L_1，L_2，L_3 共平面

解：(1)∵方向向量(1，6，8)與(1，3，4)不平行，且(0，－3，－4)在 L_1 上，也在 L_2 上，∴ L_1 與 L_2 相交

(2)∵方向向量(1，3，4)成比例，且(0，－3，－4)在 L_1 上，不在 L_2 上，∴ L_1 與 L_2 互相平行

(3) $\overline{PQ}=\sqrt{(0-0)^2+(-3-0)^2+(-4-0)^2}=5$

設 A(t，$3t$，$4t$)∈ L_3，t∈R，∴d(P，A)＝$\sqrt{(t-0)^2+(3t+3)^2+(4t+4)^2}=\sqrt{26t^2+50t+25}>5$

意即 d(P，A)的最小值＝點 P 到 L_3 的最短距離＞5＝$\overline{PQ}$

(4)∵直線 L 的方向向量＝(0，4，－3)，又(0，4，－3)·(1，6，8)＝0，∴$L \perp L_1$ 且(0，4，－3)·(1，3，4)＝0，∴$L \perp L_2$

(5)包含 L_2 與 L_3 的平面為 E：0(x－0)＋4(y－0)－3(z－0)＝0，即 $4y-3z=0$

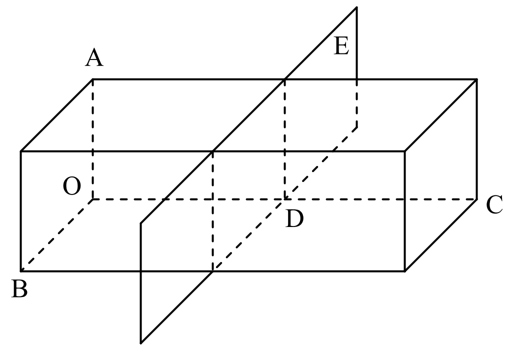
且點(k，$6k$－3，$8k$－4)∈ L_1，k∈R，在 E 上(代入 E 成立)，得知 L_1，L_2，L_3 共平面

答：(1)(2)(4)(5)

31.設 O(0，0，0)為坐標空間中某長方體的一個頂點，且知(2，2，1)，(2，－1，－2)，(3，－6，6)為此長方體中與 O 相鄰的三頂點。若平面 E：$x+by+cz=d$ 將此長方體截成兩部份，其中包含頂點 O 的那一部分是個正方體，則(b，c，d)＝(___，___，___) (97 學測 E)

解：(1)設 A(2，－1，－2)，B(2，2，1)，C(3，－6，6)

(2)∵ $\overline{OA}=\overline{OB}=3$ 且平面 E 將此長方體截成兩部份，
其中包含頂點 O 的那一部分是個正方體，則如圖不失為一般性



(3)平面 E 的法向量＝(1，b，c) // $\overrightarrow{OC}$(3，－6，6)，得知 b＝－2，c＝2

(4)如圖，設 D 在平面 E 上，也在 $\overrightarrow{OC}$ 上，
令 D(k，－2k，2k)，k＞0(與 $\overrightarrow{OC}$ 同方向)

∵ $\overline{OD}=3$(正方體)＝$\sqrt{k^2+(-2k)^2+(2k)^2}$，得知 k＝1，∴D(1，－2，1)

(5)將 D(1，－2，1)代入平面 E：$x-2y+2z=d$，得 d＝9，故(b，c，d)＝(－2，2，9)

答：(－2，2，9)

32.設 a，b，c 為實數，下列有關線性方程組 $\begin{cases} x+2y+az=1 \\ 3x+4y+bz=-1 \\ 2x+10y+7z=c \end{cases}$ 的敘述哪些是正確的？(98 學測 10)

(1)若此線性方程組有解，則必定恰有一組解　　(2)若此線性方程組有解，則 $11a-3b\neq7$
(3)若此線性方程組有解，則 c＝14　　(4)若此線性方程組無解，則 $11a-3b=7$
(5)若此線性方程組無解，則 $c\neq14$

解 1：(1)∵方程組的方程式均為空間中的平面，∴令 E_1：$x+2y+az=1$，E_2：$3x+4y+bz=-1$，E_3：$2x+10y+7z=c$
⇒若方程組有解，可能有一組解、無限多組解、無解

(2)∵ $\Delta=\begin{vmatrix}1&2&a\\3&4&b\\2&10&7\end{vmatrix}=22a-6b-14$，則

(i)若方程組有一組解時，$\Delta=22a-6b-14\neq0$，∴$11a-3b\neq7$

(ii)若方程組有無限多組解、無解時，$\Delta=22a-6b-14=0$，∴$11a-3b=7$

(3) (i)若方程組有一組解，$\Delta=22a-6b-14\neq0$，∴$11a-3b\neq7$

(ii)若方程組有無限多組解，則 $\Delta_z=\begin{vmatrix}1&2&1\\3&4&-1\\2&10&c\end{vmatrix}=28-2c=0$，∴$c$＝14

(4)由(2)知方程組有無解時，$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&a\\3&4&b\\2&10&7\end{vmatrix}=22a-6b-14=0$，∴$11a-3b=7$

(5)若方程組有無限多組解時，$\Delta_z=\begin{vmatrix}1&2&1\\3&4&-1\\2&10&c\end{vmatrix}=28-2c=0$，∴$c$＝14

解 2：利用增廣矩陣列運算

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&a&1\\3&4&b&-1\\2&10&7&c\end{array}\right]\begin{array}{c}\\-3\\-2\end{array}\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&a&1\\0&-2&b-3a&-4\\0&6&7-2a&c-2\end{array}\right]\begin{array}{c}\\\\3\end{array}\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc}1&2&a&1\\0&-2&b-3a&-4\\0&0&7-11a+3b&c-14\end{array}\right]$$

(1)若方程組有解，可能有一組解、無限多組解、無解

(2)若方程組有解，則

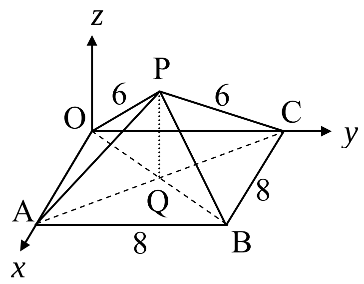
(i)有一組解時，則 $7-11a+3b\neq0$，∴$11a-3b\neq7$

(ii)無限多組解時，則 $7-11a+3b=0$，且 $c-14=0$，∴$11a-3b=7$ 且 c＝14

(3)若方程組無解，則 $7-11a+3b=0$，且 $c-14\neq0$，∴$11a-3b=7$ 且 $c\neq14$

答：(4)(5)

33.坐標空間中 xy 平面上有一正方形，其頂點為 O(0，0，0)，A(8，0，0)，B(8，8，0)，C(0，8，0)。另一點 P 在 xy 平面的上方，且與 O，A，B，C 四點的距離皆等於 6。若 $x+by+cz=d$ 為通過 A，B，P 三點的平面，
則(b，c，d)＝(___，___，___)。(98 學測 G)



解：(1)如右圖，設正方形 OABC 的中心為 Q(4，4，0)

根據題意，P 點必在 Q 的正上方，∴設 P(4，4，k)，k＞0

(2)∵ $\overline{OP}=\sqrt{4^2+4^2+k^2}=6$，得知 k＝2，∴P(4，4，2)

(3)∵ $\overrightarrow{AP}$＝(－4，4，2)＝－2(2，－2，－1)，$\overrightarrow{AB}$＝(0，8，0)＝9=8(0，1，0)

⇒此平面之法向量：(2，－2，－1)×(0，1，0)＝(1，0，2)

⇒設通過 A，B，P 三點的平面為 x＋0y＋2z＝t

A(8，0，0)代入，得 t＝8，即平面為 x＋0y＋2z＝8，∴(b，c，d)＝(0，2，8)

答：(0，2，8)

34.坐標空間中 O 為原點，點 A 的坐標為(1，2 ，1)。設 S 是以 O 為球心、4 為半徑的球面。請問在 S 上滿足內積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=6$ 的所有點 P 所成的圖形為何？(99 學測 6)

(1)空集合　(2)一個點　(3)兩個點　(4)一個圓　(5)兩個圓

解：1.設 P(x，y，z)，∴$\overrightarrow{OA}$＝(1，2 ，1)，$\overrightarrow{OP}$＝(x，y，z)

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$＝(1，2 ，1)·($x$，$y$，$z$)＝$x$＋2$y$＋$z$＝6 ……為一平面 E 方程式

2.又 d(O，E)＝$\dfrac{|0+0+0-6|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$＜球半徑 4

表示球 S 與平面 E 相交於一圓，即點 P 所成的圖形為一圓

答：(4)

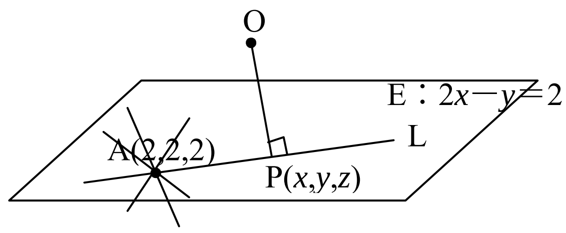
35.坐標空間中，直線 L 上距離點 Q 最近的點稱為 Q 在 L 上的投影點。已知 L 為平面 2x－y＝2 上通過點(2，2，2)的一直線。請問下列哪選項中的點可能是原點 O 在 L 上的投影點？(99 學測 11)

(1) (2，2，2)　(2) (2，0，2)　(3) ($\frac{4}{5}$，$-\frac{2}{5}$，0)　(4) ($\frac{4}{5}$，$-\frac{2}{5}$，－2)　(5) ($\frac{8}{9}$，$-\frac{2}{9}$，$-\frac{2}{9}$)

解：根據題意，如右圖，設直線 L 為通過點 A(2，2，2)，且 P(x，y，z)∈L 為原點 O 在 L 上的投影點，即 P 點滿足下列二條件：

(I)P(x，y，z)∈L

(II) $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AP}$，即 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}$＝($x$，$y$，$z$)·($x$－2，$y$－2，$z$－2)＝$x$($x$－2)＋$y$($y$－2)＋$z$($z$－2)＝0



(1) (2，2，2)滿足(I)、(II)

(2) (2，0，2)不滿足(I)

(3) ($\frac{4}{5}$，$-\frac{2}{5}$，0)滿足(I)、(II)

(4) ($\frac{4}{5}$，$-\frac{2}{5}$，－2)滿足(I)、不滿足(II)

(5) ($\frac{8}{9}$，$-\frac{2}{9}$，$-\frac{2}{9}$)滿足(I)、(II)

答：(1)(3)(5)

36.設實數 a＞0。若 x、y 的方程組 $\begin{cases}2x-y=1\\x-2y=a\\x-ay=122\end{cases}$ 有解，則 a＝ ________。(99 學測 D)

解：$\begin{cases}2x-y=1\\x-2y=a\\x-ay=122\end{cases}$ 有解，即 $\begin{cases}2x-y-1=0\\x-2y-a=0\\x-ay-122=0\end{cases}$ 有解，條件為行列式 $\begin{vmatrix}2&-1&-1\\1&-2&-a\\1&-a&-122\end{vmatrix}=0$

$\begin{vmatrix}2&-1&-1\\1&-2&-a\\1&-a&-122\end{vmatrix}$＝－2$a^2$＋2$a$＋364＝0，除以 2 得 a^2－a－182＝0

分解為(a－14)(a＋13)＝0，∴a＝14 或－13(不合)

補充解：利用降階求三階行列式之方法

$\begin{vmatrix}2&-1&-1\\1&-2&-a\\1&-a&-122\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}2&2&2\\1&4&2a\\1&2a&244\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}2&0&0\\1&3&2a-1\\1&2a-1&243\end{vmatrix}$＝$3^6$－(2$a$－1)^2＝0，∴2$a$－1＝27，得 a＝14

答：14

37.一礦物內含 A、B、C 三種放射性物質，放射出同一種輻射。已知 A、B、C 每公克分別會釋放出 1 單位、2 單位、1 單位的輻射強度，又知 A、B、C 每過半年其質量分別變為原來質量的$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$倍。於一年前測得此礦物的輻射強度為 66 單位，而半年前測得此礦物的輻射強度為 22 單位，且目前此礦物的輻射強度為 8 單位，則目前此礦物中 A、B、C 物質之質量分別____、____、____公克。(100 學測 E)

解：設目前此礦物中 A、B、C 物質之質量分別為 x 公克，y 公克，z 公克

則 A、B、C 物質原有(一年前)之質量分別為 $4x$ 公克，$9y$ 公克，$16z$ 公克

	A	B	C	輻射強度
原有(一年前)	$4x$	$9y$	$16z$	$4x+2(9y)+16z=66$
半年後	$2x$	$3y$	$4z$	$2x+2(3y)+4z=22$
一年後(目前)	x	y	z	$x+2(y)+z=8$

$\begin{cases}4x+18y+16z=66\\2x+6y+4z=22\\x+2y+z=8\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=4\\y=1\\z=2\end{cases}$

答：4 公克、1 公克、2 公克

38. H：$x-y+z=2$ 為坐標空間中一平面，L 為平面 H 上的一直線。已知點 P(2，1，1)為 L 上距離原點 O 最近的點，則(2，____，____)為 L 的方向向量。(100 學測 G)

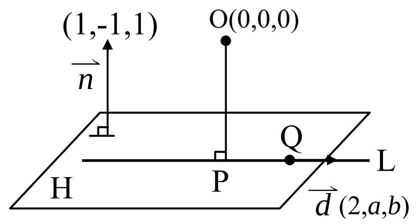
解 1：(1)設 L 的方向向量為$\vec{d}(2, a, b)$，平面 H 的法向量為$\vec{n}(1, -1, 1)$

∵$\vec{d}\perp\vec{n}$，∴$(2, a, b)\cdot(1, -1, 1)=0$，得 $a-b=2$

(2)∵P 為 L 上距離原點 O 最近的點，∴$\overrightarrow{OP}\perp\vec{d}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP}\cdot\vec{d}=(2, 1, 1)\cdot(2, a, b)=0$，得 $a+b=-4$

(3)解$\begin{cases}a-b=2\\a+b=-4\end{cases}$，得$\begin{cases}a=-1\\b=-3\end{cases}$，∴$\vec{d}(2, -1, -3)$



解 2：(1)設 L 的方向向量為$\vec{d}(2, a, b)$，∴L：$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{a}=\frac{z-1}{b}$

則 L 上任意點 $P'(x, y, z)=P'(2t+2, at+1, bt+1)$，$t\in R$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP'}\cdot\vec{d}=(2t+2, at+1, bt+1)\cdot(2, a, b)=0$，得 $2(2t+2)+a(at+1)+b(bt+1)=0$

又當 $t=0$ 時最短(點 P′為 P)，代入，得知 $a+b=-4$

(2)由 $P(2, 1, 1)+\vec{d}(2, a, b)=Q(4, a+1, b+1)$

∵$Q\in L\in H$，∴Q 代入 H，即 $4-(a+1)+(b+1)=2$，得 $a-b=2$

(3)解$\begin{cases}a-b=2\\a+b=-4\end{cases}$，得$\begin{cases}a=-1\\b=-3\end{cases}$，∴$\vec{d}(2, -1, -3)$

答：$(2, -1, -3)$

39.如下圖，在坐標空間中，A,B,C,D,E,F,G,H 為正立方體的八個頂點，已知其中四個點的坐標 A(0，0，0)、B(6，0，0)、D(0，6，0)及 E(0，0，6)，P 在線段$\overline{CG}$上且$\overline{CP}$：$\overline{PG}$=1：5，R 在線段$\overline{EH}$上且$\overline{ER}$：$\overline{RH}$=1：1，Q 在線段$\overline{AD}$上。若空間中通過 P，Q，R 這三點的平面，與直線 AG 不相交，則 Q 點的 y 坐標為$\dfrac{\text{㉜㉝}}{\text{㉞㉟}}$。(化成最簡分數)(102 學測 H)

解：(1)根據題意，設 G(6，6，6)，P(6，6，1)，Q(0，k，0)，R(0，3，6)

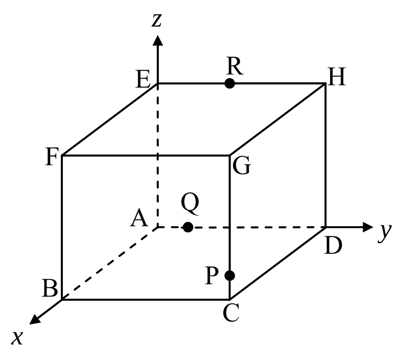
(2) P，Q，R 三點的平面，與直線 AG 不相交⇒法向量$\vec{n}$垂直方向向量$\vec{d}$

(3)$\overrightarrow{RQ}=(0, k-3, -6)$，$\overrightarrow{RP}=(6, 3, -5)$

$\overrightarrow{RQ}\times\overrightarrow{RP}=(-5k+33, -36, -6k+18)$

⇒法向量$\vec{n}=(-5k+33, -36, -6k+18)$

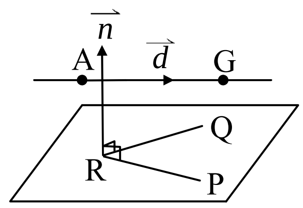
$\overrightarrow{AG}=(6, 6, 6)=6(1, 1, 1)$，⇒方向向量$\vec{d}=(1, 1, 1)$



法 1：∵ $\vec{n}\perp\vec{d}$，∴$\vec{n}\cdot\vec{d}=0$，即$(-5k+33)+(-36)+(-6k+18)=0$，$k=\frac{15}{11}$

法 2：∵$\overrightarrow{AG}\cdot(\overrightarrow{RQ}\times\overrightarrow{RP})=0$，

$\Rightarrow\begin{vmatrix}6&6&6\\0&k-3&-6\\6&3&-5\end{vmatrix}=0$，$\to\begin{vmatrix}6&6&6\\0&k-3&-6\\0&-3&-11\end{vmatrix}=0\to 6\begin{vmatrix}k-3&-6\\-3&-11\end{vmatrix}=0\to k=\frac{15}{11}$



答：$\frac{15}{11}$