臺中區國立高級中學 102 學年度
大學入學第四次指定科目聯合模擬考

數學甲

考試日期：103 年 5 月 5~6 日

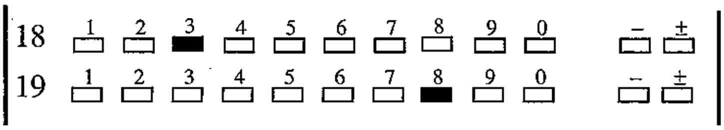
—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

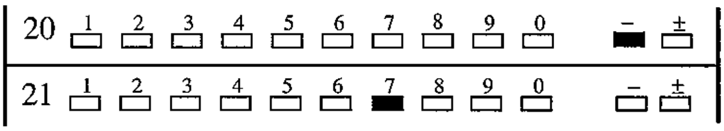
作答方式：
- 選擇（塡）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選塡題作答說明：選塡題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式塡答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\underline{\dfrac{⑱}{⑲}}$，而依題意計算出來的答案是$\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的$\overset{3}{\square}$與第 19 列的$\overset{8}{\square}$畫記，如：



例：若第 C 題的答案格式是 $\underline{\dfrac{⑳㉑}{50}}$，而答案是$\dfrac{-7}{50}$時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\overset{7}{\square}$ 畫記，如：



第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題共占 76 分)

一、單選題(占 24 分)

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 已知 $a>0$，且 $\int_{\frac{a}{2}}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}$，則 $\int_{0}^{a}(x^3+3ax^2-x+2a)\,dx$ 的值爲？

   (1) 324
   (2) 334
   (3) 344
   (4) 434
   (5) 443

2. 設 m 爲實數，若曲線 S：$(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-1)(x^2+y^2-4x+3)=0$ 與直線 $y=mx-5$ 在坐標平面上恰有 4 個相異交點，而滿足此條件的 m 之最大範圍爲 $a<m<b$，則 $a+b=$？

   (1) 6
   (2) $\frac{20}{3}$
   (3) $-\frac{20}{3}$
   (4) 8
   (5) -8

3. 投擲一顆公正的六面骰子(即 1,2,3,4,5,6 點出現的機率均等)一次，設 X 表示出現的點數，且 $P(\log_2 3^X, f(\log_2 3^X))$ 爲函數 $f(x)=x^3-6x^2+3x+10$ 圖形上一點，若擲出的點數 X 使得 P 點在第一象限可得 20 元，在第四象限可得 200 元，在其餘象限或座標軸上則無獎金，求所得獎金的期望值爲？

(1) 50

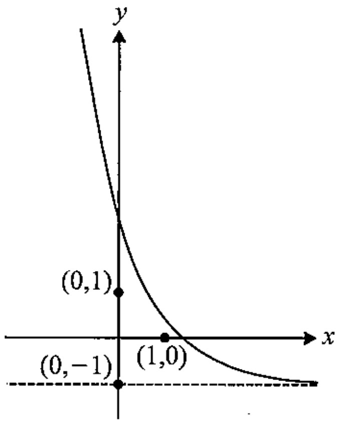
(2) $\dfrac{230}{3}$

(3) 80

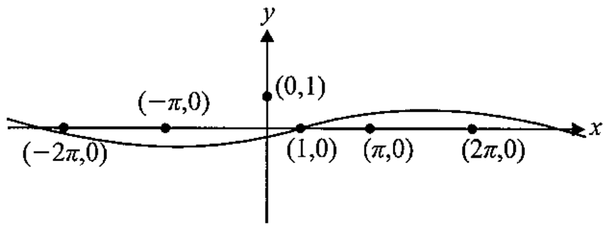
(4) 110

(5) 140

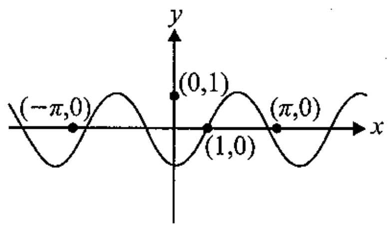
4. 右圖爲 $y=f(x)=a^{x-b}+c$ 的圖形，則下列何者爲 $y=g(x)=b\sin[a(x+c)]$ 的圖形？



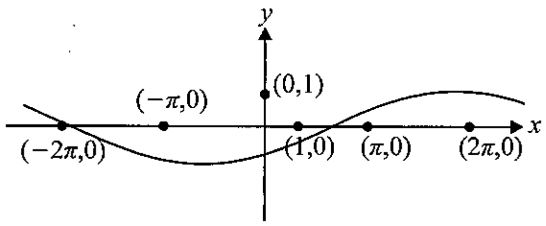
(1)



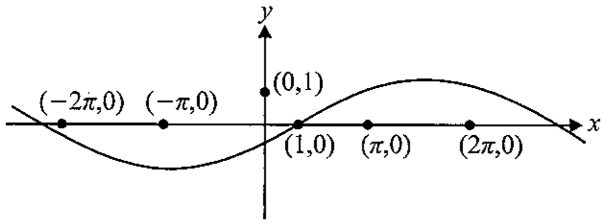
(2)



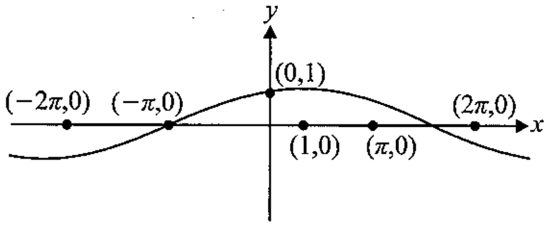
(3)



(4)



(5)



二、多選題（占40分）

說明：第5題至第9題，每題有5個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得8分；答錯1個選項者，得4.8分；答錯2個選項者，得1.6分；答錯多於2個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5. 空間中三平面 $E_1：2x+3y-5z=3$，$E_2：x+y=-1$，$E_3：x-3y-cz=5$，且 $-50\le c\le 0$，則三平面的相交情況可能為？
   (1) 兩兩交於一線，且三直線不相交
   (2) 三平面交於一直線
   (3) 三平面交於一點 $(-1,0,-1)$
   (4) 三平面交於一點 $(4,-5,-2)$
   (5) 三平面交於一點 $(-6,5,7)$

6. 已知空間中相異四點 $O(0,0,0)$，$P(a,b,0)$，$Q(c,d,0)$，$R(e,f,1)$，其中 $a^2+b^2=c^2+d^2=4$，$e^2+f^2=3$。請選出正確的選項。
   (1) 向量 $\overrightarrow{OR}$ 與 z 軸正向的夾角為 $\frac{\pi}{6}$
   (2) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}$ 的最小值為 $-2\sqrt{3}$
   (3) 點 R 到直線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 的最小距離為 1
   (4) 若 $P(\sqrt{3},1,0)$，$Q(\sqrt{3},-1,0)$，$R(-\sqrt{3},0,1)$，則點 O 到平面 PQR 的距離為 $\frac{\sqrt{3}}{13}$
   (5) $\left|(\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ})\cdot\overrightarrow{OR}\right|$ 的最大值為 8

7. 已知 a、b 均爲實數，函數 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{ax^2+5}+b}{x+1}, & x\neq -1\\ k, & x=-1\end{cases}$，若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=2$ 且 $\lim\limits_{x\to(-1)}f(x)$ 存在，請選出正確的選項。

(1) $a=4$

(2) $b=3$

(3) $a+b=7$

(4) 若 $f(x)$ 爲連續函數，則 $k=-\dfrac{4}{3}$

(5) $f'(1)=\dfrac{2}{3}$

8. 一多項式函數的圖形通過坐標平面上四點 $A(-4,6)$、$B(-2,0)$、$C(0,2)$、$D(4,6)$，則下列哪些正確？

(1) 恰有一個二次多項式函數 $y=f(x)$ 的圖形通過 B、C、D 三點

(2) 恰有一個三次多項式函數 $y=g(x)$ 的圖形通過 A、B、C、D 四點

(3) 若 $y=h(x)$ 爲過 A、B、C、D 四點的最低次多項式，則圖形在 $0<x<1$ 有反曲點

(4) 承(3)，若 $h(x)=0$ 有三個實根 α、β、γ (且 $\alpha<\beta<\gamma$)，則 $\beta=-2$

(5) 承(3)，則 $\lim\limits_{x\to(-2)}\dfrac{h(x)}{x+2}=-\dfrac{1}{2}$

9. 一個箱子中有大小相同、材質相同的黑球 1 個、白球 2 個，從中抓取一球(每一球被取到的機率皆相等)觀察並塗色後放回，稱爲一次動作；其塗色的規則如下：取到白球塗黑色、取到黑球塗白色。持續取球、塗色、放回的動作，直到箱中三球同色即停止動作。若 p_n 爲經 n 次動作後即停止的機率，則下列哪些正確？

(1) $p_2=\dfrac{2}{9}$

(2) $p_3=\dfrac{4}{27}$

(3) 已知停止動作時，箱中全爲黑球，則此次恰好爲經 5 次動作的機率爲 $\dfrac{16}{243}$

(4) 停止動作時，箱中全爲黑球的機率爲 $\dfrac{2}{5}$

(5) 已知第 9 次取到黑球，則第 10 次取到黑球即停止的機率爲 $\dfrac{1}{3}$

三、選填題（占 12 分）

說明：1. 第 A 題與第 B 題，請將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號(10～15)。
2. 每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 複數平面上，點 A、B、C 分別對應到複數 z_1、z_2、z_3，若 $|z_1-3i|=|z_1-2+i|$，$z_2=(-1+\sqrt{3}i)z_1$，$z_3=3i\cdot z_1$，則 ΔABC 的最小面積為 $\dfrac{⑩-\sqrt{⑪}}{⑫⑬}$。(請化為最簡根式)

B. 已知連續函數 $f(x)=\begin{cases} ax^2-30x+68 &，3<x \\ 2x-1 &，2\le x\le 3 \\ ax^3+2bx^2-9x-3 &，x<2 \end{cases}$，其中 a、b 為實數，若直線 $y=k$ 與 $y=f(x)$ 的圖形有最多相異交點時，k 值的最大範圍為 $p<k<q$，求 $p+q=$ ⑭⑮ 。

－－－－－－－以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷－－－－－－－

第貳部分：非選擇題(占 24 分)

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至給零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、設 n 為正整數($n\geq 2$)，點 $P(t, at^n)$ 為曲線 Γ：$y=ax^n$ 上之一點(其中 $a\neq 0$，$t>0$)，且 P 點在 x 軸上的投影點為 $R(t,0)$，過 P 點與 Γ 相切的直線交 x 軸於 Q 點。將曲線 Γ 與直線 $x=t$ 及 x 軸所圍的區域繞 x 軸旋轉，所得的旋轉體體積為 V_n；將 ΔPQR 繞 x 軸旋轉，所得的旋轉體體積為 W_n，則：

(1) 試求 Q 點坐標。(4 分)

(2) 試求 V_n。(4 分)

(3) 試證旋轉體體積比 $\dfrac{W_n}{V_n}$ 與 a 值無關。(4 分)

二、設二階方陣 M 滿足 $M\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 0\end{bmatrix}$，$M\begin{bmatrix}-\sqrt{3}\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\sqrt{3}\\ -2\end{bmatrix}$

(1) 試求方陣 M。(3 分)

(2) 試求 $(\frac{1}{2}M)+(\frac{1}{2}M)^2+(\frac{1}{2}M)^3+\cdots+(\frac{1}{2}M)^{10}$。(3 分)

(3) 若經平面線性變換 M 作用後，ΔABC 被映射至 $\Delta A'B'C'$，試證：$\Delta A'B'C'$ 的周長為 ΔABC 的二倍。(6 分)

臺中區國立高級中學102學年度大學入學第四次指定科目聯合模擬考

數學甲考科解析

考試日期：103年5月5~6日

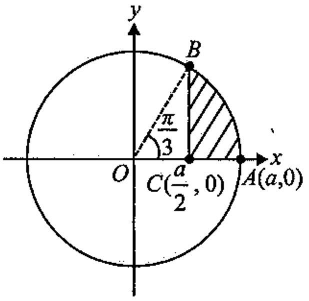
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	2	3	4	14	23	145	235	124	6	3	1	0	−	4

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. $\because f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$

爲圓 $x^2+y^2=a^2$ 之上半圓



$\therefore \int_{\frac{a}{2}}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx$

$=$右圖斜線部分的面積

$=$扇形 OAB 面積 $-\Delta OBC$ 面積

$=\frac{\pi a^2}{6}-\frac{\sqrt{3}a^2}{8}=\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}$

$\Rightarrow a=4$

$\therefore \int_0^a(x^3+3ax^2-x+2a)\,dx=\int_0^4(x^3+12x^2-x+8)\,dx$

$=(\frac{1}{4}x^4+4x^3-\frac{1}{2}x^2+8x)\Big|_0^4=344$，故選(3)

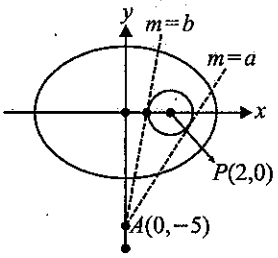
2. $\because (\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-1)((x-2)^2+y^2-1)=0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 或 $(x-2)^2+y^2=1$

即曲線 S 包含了橢圓 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 與單位圓 $(x-2)^2+y^2=1$ 的圖形

$\because$直線 L：$y=mx-5$ 必過點 $A(0,-5)$ 且 S 與直線 L 有 4 個相異交點

$\therefore$由右圖可知：a，b 即爲過 A 點與圓 $(x-2)^2+y^2=1$ 相切的兩切線斜率



因此 $d(P,L)=1\Leftrightarrow \frac{|2m-5|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

$\Leftrightarrow 3m^2-20m+24=0$

$\Rightarrow$ 由根與係數的關係可得

$a+b=\frac{20}{3}$。故選(2)

3. 因爲 $f(x)=(x+1)(x-2)(x-5)$ 且 $\log_2 3^X>0$，所以

(1) $f(\log_2 3^X)<0\Leftrightarrow(\log_2 3^X-2)(\log_2 3^X-5)<0$

$\Leftrightarrow 2<\log_2 3^X<5\Leftrightarrow 4<3^X<32\Leftrightarrow X=2\vee 3$

故 P 點在第四象限的機率爲 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(2) $f(\log_2 3^X)>0\Leftrightarrow(\log_2 3^X-2)(\log_2 3^X-5)>0$

$\Leftrightarrow \log_2 3^X<2\ \vee\ \log_2 3^X>5\Leftrightarrow 3^X<4\ \vee\ 3^X>32$

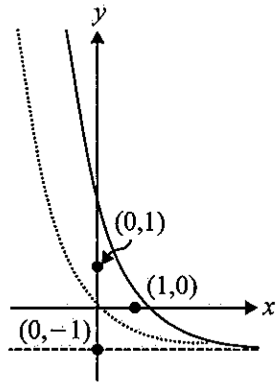
$\Leftrightarrow X=1\vee 4\vee 5\vee 6$，故 P 點在第一象限的機率爲 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

因此所得獎金的期望值爲 $200\times\frac{1}{3}+20\times\frac{2}{3}=80$ 元，故選(3)

4. 由函數圖形遞減得知 $0<a<1$；

又漸近線爲 $y=-1$，表圖形爲 $y=a^x$ 向下移動 1 單位，得圖形 $y=a^x-1$ (虛線部分)，所以 $c=-1$。

再將 $y=a^x-1$ 的圖形向右移動後得 $y=a^{x-b}-1$，故 $b>1$。



$y=b\sin[a(x+c)]$

因爲 $b>1$，所以振幅大於 1。

因爲 $0<a<1$ 故週期大於 2π。

因爲 $c=-1$，故圖形必過 $(1,0)$。

(1) ×：振幅小於 1，故不合

(2) ×：週期小於 2π，故不合

(3) ×：未過 $(1,0)$，故不合

(5) ×：未過 $(1,0)$，故不合，故選(4)

二、多選題

5. (1)(2) $\Delta=\begin{vmatrix}2&3&-5\\1&1&0\\1&-3&-c\end{vmatrix}=0\Rightarrow c=-20$，

又 $\Delta_x=\begin{vmatrix}3&3&-5\\-1&1&0\\5&-3&20\end{vmatrix}=130\neq 0$，

故當 $c=-20$ 時，兩兩相相交於一直線且此三直線不相交；當 $c\neq-20$ 時，三平面交於一點

(3) $(-1,0,-1)$ 在 E_1、E_2 上，$(-1,0,-1)$ 代入 E_3 得 $c=6$ (不合)

(4) $(4,-5,-2)$ 在 E_1、E_2 上，$(4,-5,-2)$ 代入 E_3 得 $c=-7$

(5) $(-6,5,7)$ 不在 E_1 上，故不可能爲交點

故選(1)(4)

6. (1) 設 $\overrightarrow{OR}$ 與 $\vec{u}=(0,0,1)$ (與 z 軸平行)的夾角爲 θ，則

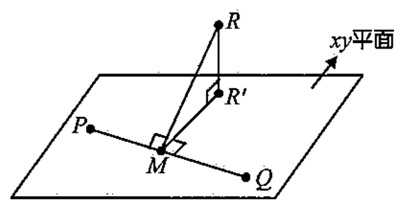
$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OR}\cdot\vec{u}}{|\overrightarrow{OR}||\vec{u}|}=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$

(2) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}=ae+bf$，由柯西不等式：

$(a^2+b^2)(e^2+f^2)\geq(ae+bf)^2\Rightarrow|ae+bf|\leq 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}=ae+bf$ 有最小値爲 $-2\sqrt{3}$

(3) 設 $R(e,f,1)$ 在 xy 平面之投影點爲 $R'(e,f,0)$，過 R' 作 $\overline{R'M}\perp\overleftrightarrow{PQ}$ 於 M 點，由三垂線定理可知：$\overline{RM}\perp\overleftrightarrow{PQ}$



即 $d(R,\overleftrightarrow{PQ})=\overline{RM}$

$=\sqrt{\overline{RR'}^2+\overline{R'M}^2}=\sqrt{1+\overline{R'M}^2}\geq 1$

即當 $R'\in\overleftrightarrow{PQ}$ 時，$d(R,\overleftrightarrow{PQ})$ 有最小值 1

(4) $\overrightarrow{PQ}=(0,-2,0)$，$\overrightarrow{PR}=(-2\sqrt{3},-1,1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} // (1,0,2\sqrt{3})$

$\therefore$平面 PQR 方程式為 $x+2\sqrt{3}z=\sqrt{3}$

$\Rightarrow$點 O 到平面 PQR 的距離為 $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+(2\sqrt{3})^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$

(5) $|(\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ})\cdot\overrightarrow{OR}|=$由向量 $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OR}$ 所張開平行六面體體積

$\because P$，Q 在 xy 平面上且 R 到 xy 平面的距離為 1

$\therefore |(\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ})\cdot\overrightarrow{OR}|$

$=$(向量 $\overrightarrow{OP}$ 與 $\overrightarrow{OQ}$ 所張開平行四邊形面積)$\times 1$

$=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\sin\theta$ (其中 θ 為 $\overrightarrow{OP}$ 與 $\overrightarrow{OQ}$ 的夾角)

$\Rightarrow$ 當 $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OQ}$ $(\theta=90°)$ 時，$|(\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ})\cdot\overrightarrow{OR}|$ 有最大值 $=2\times2\times1=4$

故選(2)(3)

7. (1) $\because 2=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{ax^2+5}+b}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{a+\frac{5}{x^2}}+\frac{b}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\sqrt{a}$

$\Rightarrow a=4$

(2) $\because \lim\limits_{x\to(-1)}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)}\dfrac{\sqrt{4x^2+5}+b}{x+1}$ 存在

$\therefore \lim\limits_{x\to(-1)}(\sqrt{4x^2+5}+b)=\lim\limits_{x\to(-1)}f(x)\cdot(x+1)$

$=\lim\limits_{x\to(-1)}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to(-1)}(x+1)=0$

$\Rightarrow \sqrt{4+5}+b=0\Rightarrow b=-3$

(3) $a+b=4-3=1$

(4) $\because f(x)$ 為連續函數

$\therefore k=f(-1)=\lim\limits_{x\to(-1)}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)}\dfrac{(\sqrt{4x^2+5}-3)(\sqrt{4x^2+5}+3)}{(x+1)(\sqrt{4x^2+5}+3)}$

$=\lim\limits_{x\to(-1)}\dfrac{4\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{(x+1)}(\sqrt{4x^2+5}+3)}=-\dfrac{4}{3}$

(5) $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{\sqrt{4x^2+5}-3}{x+1}}{(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\sqrt{4x^2+5}-3)(\sqrt{4x^2+5}+3)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{4x^2+5}+3)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4}{(\sqrt{4x^2+5}+3)}=\dfrac{2}{3}$

故選(1)(4)(5)

8. (1) ×：B、C、D 三點共線

(2) ○：令 $g(x)=ax(x+2)(x-4)+bx(x+2)+cx+2$

$g(-2)=-2c+2=0\Rightarrow c=1$

$g(4)=24b+4+2=6\Rightarrow b=0$

$g(-4)=-64a-4+2=6\Rightarrow a=-\dfrac{1}{8}$

故 $g(x)=-\dfrac{1}{8}(x^3-2x^2-16x-16)$

(3) ○：$\because h(x)=g(x)$

$\therefore h'(x)=-\dfrac{3}{8}x^2+\dfrac{1}{2}x+2$；$h''(x)=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$

當 $h''(x)=0$，$x=\dfrac{2}{3}$ 為反曲點

(4) ×：$h(x)=-\dfrac{1}{8}(x^3-2x^2-16x-16)=0$

$\Rightarrow (x+2)(x^2-4x-8)=0$

$\Rightarrow \alpha=-2$、$\beta=2-2\sqrt{3}$、$\gamma=2+2\sqrt{3}$

(5) ○：$\lim\limits_{x\to(-2)}\dfrac{h(x)}{x+2}=h'(-2)=-\dfrac{1}{2}$

故選(2)(3)(5)

9. 經一次動作即停止，需從(2 白 1 黑)取到黑球：$p_1=\dfrac{1}{3}$

經兩次動作即停止，需從(2 白 1 黑)取到白球(註：若取到黑球則馬上停止)

再從(1 白 2 黑)取到白球：$p_2=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$

經三次動作即停止，需從(2 白 1 黑)取到白球(註：若取到黑球則馬上停止)

再從(1 白 2 黑)取到黑球(註：若取到白球則馬上停止)

再從(2 白 1 黑)取到黑球：$p_3=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{27}$

以此類推，若經 n 次即停止，則需白黑白黑…交錯取球(否則會提前停止)；且 n 為奇數時，最後一次取黑，箱中全白；n 為偶數時，最後一次取白，箱中全黑

故 $p_n=\dfrac{2^{n-1}}{3^n}$

(1) ○：$p_2=\dfrac{2}{9}$

(2) ○：$p_3=\dfrac{4}{27}$

(3) ×：停止時，箱中全為黑球必為偶數次取球後即停止，故不可能為經第五次即停止，故本題機率為 0

(4) ○：停止時全為黑球的機率 $=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}+\ldots$

$=\dfrac{\frac{2}{9}}{1-\frac{4}{9}}=\dfrac{2}{5}$

(5) ×：為了不停下來需白黑白黑…交錯取球，故第 9 次取到黑球時，動作必停止，不會有第 10 次取球

故選(1)(2)(4)

三、選填題

A. 令 $P(0,3)$，$Q(2,-1)$

$\because |z_1-3i|=|z_1-(2-i)|\Leftrightarrow \overline{AP}=\overline{AQ}\Leftrightarrow A\in\overline{PQ}$ 中垂線

$x-2y=-1$

令 $A(2t-1,t)$，因為

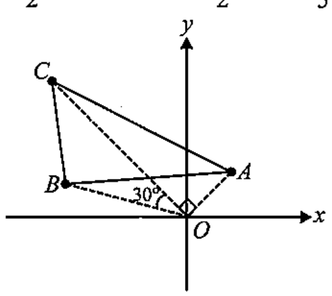
$z_2=2(\cos120°+i\sin120°)z_1\Rightarrow$ 將 A 點以原點為中心逆轉 120 度，再伸長 2 倍距離，即得點 B

$z_3=3(\cos90°+i\sin90°)z_1\Rightarrow$ 將 A 點以原點為中心逆轉 90 度，再伸長 3 倍距離，即得點 C

$\therefore \Delta ABC=\Delta OAC+\Delta OBC-\Delta OAB$

$=\dfrac{1}{2}\overline{OA}\times(3\overline{OA})+\dfrac{1}{2}(3\overline{OA})\times(2\overline{OA})\sin30°-\dfrac{1}{2}\overline{OA}\times(2\overline{OA})\sin120°$

$=\dfrac{1}{2}(6-\sqrt{3})\overline{OA}^2=\dfrac{6-\sqrt{3}}{2}[5(t-\dfrac{2}{5})^2+\dfrac{1}{5}]\geq\dfrac{6-\sqrt{3}}{10}$



B. 因為 $f(x)$ 連續，所以 $f(3)=9a-90+68=5\Rightarrow a=3$

$f(2)=3=8a+8b-18-3\Rightarrow b=0$

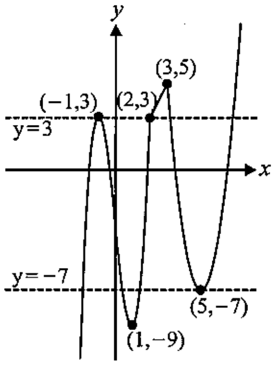
所以 $f(x)=\begin{cases}3x^2-30x+68，3<x\\ 2x-1，2\leq x\leq 3\\ 3x^3-9x-3，x<2\end{cases}$

當 $x<2$ 時，$f'(x)=9x^2-9 \Rightarrow f'(x)=0$ 時，$x=\pm 1$

且 $f(-1)=3$，$f(1)=-9$

當 $x>3$ 時，$f(x)=3(x-5)^2-7$

故 $f(x)$ 的圖形如下：



所以 $p=-7$，$q=3$，$p+q=-4$

第貳部分：非選擇題

一、(1) 令 $f(x)=ax^n \Rightarrow f'(x)=nax^{n-1}$

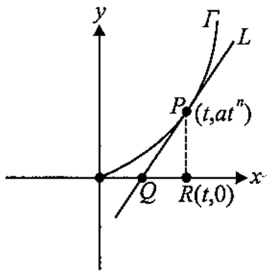
則過 P 點與 Γ 相切的直線 L

爲 $y-at^n=f'(t)(x-t)$

$\Rightarrow y=nat^{n-1}(x-t)+at^n$

令 $y=0 \Rightarrow x=\dfrac{n-1}{n}t$

$\therefore Q(\dfrac{n-1}{n}t,0)$ (4 分)



(2) $V_n=\int_0^t \pi(f(x))^2dx$

$=\pi\int_0^t a^2x^{2n}dx=\dfrac{\pi a^2}{2n+1}t^{2n+1}$ (4 分)

(3) $\because W_n=\dfrac{1}{3}$(底面積×高)

$=\dfrac{1}{3}(\overline{PR})^2\pi\times\overline{QR}=\dfrac{1}{3}a^2t^{2n}\pi\cdot\dfrac{t}{n}=\dfrac{\pi a^2t^{2n+1}}{3n}$ (2 分)

$\therefore \dfrac{W_n}{V_n}=\dfrac{\frac{1}{3n}}{\frac{1}{2n+1}}=\dfrac{2n+1}{3n}$ 與 a 值無關 (2 分)

二、(1) $M\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -2\sqrt{3}\\ 0 & -2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow M=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & -2\sqrt{3}\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{bmatrix}$ (3 分)

(2) $\because \dfrac{1}{2}M=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 60^\circ & \sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ\end{bmatrix}$ 爲鏡射矩陣

$\therefore (\dfrac{1}{2}M)^2=I_2 \Rightarrow (\dfrac{1}{2}M)^{2n}=I_2$ 且 $(\dfrac{1}{2}M)^{2n+1}=\dfrac{1}{2}M$

$\Rightarrow$ 所求 $=5[\dfrac{1}{2}M+I_2]=5\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{15}{2} & \frac{5\sqrt{3}}{2}\\ \frac{5\sqrt{3}}{2} & \frac{5}{2}\end{bmatrix}$ (3 分)

(3) $\because M=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 60^\circ & \sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ\end{bmatrix}$

所以將 ΔABC 對 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ 鏡射後(2 分)，再將其鏡射後的 x，y 坐標各伸長 2 倍(2 分)，即得 $\Delta A'B'C'$。因爲坐標變爲原來的兩倍，所以距離也會變成原來的兩倍，因此 $\Delta A'B'C'$ 的周長爲 ΔABC 的二倍 (2 分)

【另解】

令 $A(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$、$B(b\cos\beta, b\sin\beta)$

$C(c\cos\gamma, c\sin\gamma)$

$\because M\begin{bmatrix}a\cos\alpha\\ a\sin\alpha\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}\cos 60^\circ & \sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\cos\alpha\\ a\sin\alpha\end{bmatrix}$

$=2a\begin{bmatrix}\cos(60^\circ-\alpha)\\ \sin(60^\circ-\alpha)\end{bmatrix}$

$M\begin{bmatrix}b\cos\beta\\ b\sin\beta\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}\cos 60^\circ & \sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b\cos\beta\\ b\sin\beta\end{bmatrix}$

$=2b\begin{bmatrix}\cos(60^\circ-\beta)\\ \sin(60^\circ-\beta)\end{bmatrix}$

$M\begin{bmatrix}c\cos\gamma\\ c\sin\gamma\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}\cos 60^\circ & \sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\cos\gamma\\ c\sin\gamma\end{bmatrix}$

$=2c\begin{bmatrix}\cos(60^\circ-\gamma)\\ \sin(60^\circ-\gamma)\end{bmatrix}$ (2 分)

$\therefore A'(2a\cos(60^\circ-\alpha), 2a\sin(60^\circ-\alpha))$

$B'(2b\cos(60^\circ-\beta), 2b\sin(60^\circ-\beta))$

$C'(2c\cos(60^\circ-\gamma), 2c\sin(60^\circ-\gamma))$

所以 $\Delta A'B'C'$ 爲 ΔABC 對 x 軸作對稱後再逆轉 60°(此時周長不改變)(2 分)，再將長度放大兩倍，故 $\Delta A'B'C'$ 周長爲 ΔABC 的兩倍 (2 分)