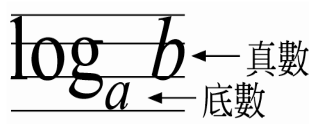
單元 6　對數與對數律　　　二年____班　座號：____　姓名：

重點 1：對數(logarithm)的意義

前言：當 $2^x=8$ 時，可推得 $x=3$；當 $2^x=10$ 時，視作解 $\begin{cases} y=2^x \\ y=10 \end{cases}$，則 x 是多少呢？引進「**對數**」來表示這個 x

1.定義：設 $a>0$，$a\neq 1$，$b>0$，若方程式 $a^x=b$，$b>0$ 時，有唯一實數解 $x=\log_a b$



其中 $\log_a b$ 讀作**以 a 為底數時，b 的對數**；而 a 稱為**底數**，b 稱為**真數**

註：(1)　$\log_a b$ 讀作「**以 a 為底數，b 的對數**」或「**log，以 a 為底數，b**」

(2) $b\leq 0$ 時 $\log_a b$ 沒有意義，因為 $a^x=b>0$

2.常用對數：底數 $a=10$ 的對數，也稱為**布立格斯**(Briggs)對數)，常用對數 $\log_{10} b$ 底數常被省略，$\log_{10} b$ 以 $\log b$ 表示

自然對數：底數為 $e\approx 2.71828\cdots\cdots$ 的對數，也稱為**納皮爾**(Napier)對數)，則 $\log_e b$，簡記為 $ln\ b$

一般對數：底數為正數 $a>0$，且 $a\neq 1$，10，e 的對數

註：$ln\ b=\int_1^b \frac{1}{x}dx$

3.指數與對數互換性質：

(1)若 $\log_a b$ 有意義，條件為底數 $a>0$，且 $a\neq 1$，真數 $b>0$

(2)當 $\log_a b=x$　$\Leftrightarrow$　$a^x=b$　得知 $a^{\log_a b}=b$　或　$\log_a a^b=b$

例 1.1：下列各式中，哪些是無意義的？

(1) $\log_5(-2)$　(2) $\log_1 7$　(3) $\log_{\sqrt{3}}\pi$　(4) $\log_{\pi-4}\sqrt{2}$　(5) $\log_{\pi+4}(4-\pi)$

Ex1.1：下列哪些選項沒有意義？(1) $\log_1 2$　(2) $\log_{\sqrt{2}} 1$　(3) $\log_2(1-\sqrt{3})$　(4) $\log_{(-5)} 3$　(5) $\log_{\sqrt{2}-1}\sqrt{3}$

例 1.2：若對數 $\log_{x-1}(2x^2-5x-7)$ 有意義，則實數 x 的範圍為________

Ex1.2：設對數 $\log_{x-2}(-x^2+8x-7)$ 有意義，則整數 x 共有______個？

◎底數為 10 的常用對數

例 1.3：試求下列各值：

(1) $\log 1$　(2) $\log 100$　(3) $\log 100000$　(4) $\log 0.001$　(5) $\log\frac{1}{10^8}$　(6) $\log\sqrt[3]{100}$

Ex1.3：試求下列各值：

(1) log 10　(2) log 1000　(3) log 0.0001　(4) $\log\sqrt{1000}$　(5) $\log 10^{9.527}$

◎底數不為 10 的一般對數

例 1.4：試求下列各對數的值：(1) $\log_2 8$　(2) $\log_3 \frac{1}{9}$　(3) $\log_4 1$　(4) $\log_5 5\sqrt{5}$

Ex1.4：試求下列各對數的值：(1) $\log_2 16$　(2) $\log_5 \frac{1}{5}$　(3) $\log_6 6$　(4) $\log_7 49\sqrt{7}$

例 1.5：已知 $x=\log_2 3$,，試求 4^x 及 2^{-x} 的值

Ex1.5：已知 $x=\log_3 5$,，試求 3^x 及 3^{2x} 的值

重點 2：對數的性質(對數律)

設 x，y，b 都是正數，a，c 都是不為 1 的正數，m，n 為實數，則：

1. $\log_a x+\log_a y=\log_a xy$ **(兩加乘)**　(註：(1) $\log_a(x+y)\neq\log_a x+\log_a y$　(2) $\log_a xy\neq\log_a x\log_a y$)
2. $\log_a x-\log_a y=\log_a \frac{x}{y}$ **(兩減除)**　(註：(1) $\log_a(x-y)\neq\log_a x-\log_a y$　(2) $\frac{\log_a x}{\log_a y}\neq\log_a\frac{x}{y}$)
3. $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$　(同類型公式：(1) $\log_{a^m} x=\frac{1}{m}\log_a x$　(2) $\log_a x^n=n\log_a x$)
4. $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$　**(換底公式)**
5. $\log_a b\log_b c=\log_a c$　**(鏈鎖律)**
6. $a^{\log_a b}=b$　(特例：$a^{\log_c b}={}_b\log_c a$，$a$，$b$，$c$ 為正數，$c\neq1$，兩邊同取 log 證明)
7. $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$　(底數、真數互換為**倒數關係**)
8. 設 $a>0$ 且 $a\neq1$，則下列為**常見之對數**：

   (1) $\log_a 1=0$　(2) $\log_a a=1$　(3) $\log_a a^x=x$　(4) $\log_a\frac{1}{a}=-1$

◎底數為10的常用對數

例2.1：試求下列各式的值：

(1) $\log 4+\log 25$　　(2) $\log\frac{1}{6}-\log\frac{125}{42}-\log 56$

Ex2.1：試求下列各式的值：

(1) $\log 4+\log 25$　　(2) $\log(3\times10^{23})-\log 3$　　(3) $\log 30^{5}-\log 243$

Ex2.11：試求下列各式的值：

(1) $\log 20+\log 50$　　(2) $\log 6-\log(6\times10^{12})$　　(3) $\log(3\sqrt{10})^{3}-\log 27$

例2.2：求 $3\log 2+\log 5-2\log 20$ 的值

Ex2.2：求 $2\log\frac{5}{3}+\log\frac{27}{35}-\log\frac{3}{14}$ 的值

Ex2.21：請問下列哪一個選項等於 $\log(2^{(3^5)})$？(103 學測)

(1) $5\log(2^{3})$　　(2) $3\times5\log 2$　　(3) $5\log 2\times\log 3$　　(4) $5(\log 2+\log 3)$　　(5) $3^{5}\log 2$

◎底數不為10的常用對數

例2.3：試求下列各式的值：(1) $\log_{2}16$　　(2) $\log_{27}9$

Ex2.3：試求下列各式的值：(1) $\log_{2}0.5$　　(2) $\log_{4}16\sqrt{2}$

◎換底公式

例 2.4：求下列各式的值：(1) $\log_4 5\times\log_5 4$　　(2) $\log_8 \sqrt{2}$

Ex2.4：求下列各式的值：(1) $\log_3 5\times\log_5 7\times\log_7 9$　　(2) $\log_{25}\frac{1}{5}$

例 2.5：求下列各式的值：(1) $\frac{1}{\log_2 6}+\frac{1}{\log_3 6}$　　(2) $(\log_2 3)\times(\log_3 4+\log_9 2)$

Ex2.5：求下列各式的值：(1) $\log_2 24-\log_4 9$　　(2) $(\log_2 5)\times(\log_5 8+\log_{25}16)$

例 2.6：試求下列各式之值：

(1) $(\log_2 3)(\log_3 5)(\log_5 7)(\log_7 8)$　　(2) $(\log_2 3)(\log_3 4)$　　(3) $(\log_x 3)(\log_9 x)$，$x>1$

Ex2.6：試求下列各式之值：(1) $\log_3 11\times\log_{11} 3$　　(2) $\log_5 7\times\log_7 5$

例 2.7：試求下列各式之值：(1) $5^{\log_5(\log_2 8)}$　　(2) $2^{(\log_2\frac{1}{7})}$　　(3) $7^{\log_7 4}+10^{\log_{10}3}+15^{\log_{15}5}$　　(4) $4^{-2\log_4 3}+9^{\log_3\frac{1}{2}}$

Ex2.7：試求下列各式之值：(1) $5^{\log_5 2}+27^{\log_3 5}$　　(2) $10^{-3\log 3+\log 2}$　　(3) $25^{\log_5 3}$　　(4) $3^{\log_9 2}$

重點 3：對數值之計算

1.意義：對數之值可經由運算性質化簡、查表、計算機等求得其數值

2.常見對數值方法：

(1)將 log 2，log 3，log 7 **熟記其值**

(2)利用**質因數分解**方法化簡，求對數值

◎常用對數

例 3.1：已知 $\log 2=a$，$\log 3=b$，試以 a，b 完成下表：

$\log 1$	$\log 4$	$\log 5$	$\log 6$	$\log 7$	$\log 8$	$\log 9$	$\log 10$
				c			

Ex3.1：設 $\log 2=a$，將下列各數用 a 表示：

(1) $\log 2\sqrt{2}$　　(2) $\log 40$　　(3) $\log 80$

例 3.2：設 $a=\log 2$，$b=\log 3$。試用 a，b 表示下列各式：

(1) $\log 400$　　(2) $\log 5$　　(3) $\log_9 8$

Ex3.2：設 $a=\log 2$，$b=\log 3$。試用 a，b 表示下列各式：

(1) $\log 24$　　(2) $\dfrac{\log 40}{\log 4}$

Ex3.21：試問有多少個整數 x 滿足 $10^9<2^x<9^{10}$？(107 學測)

(1) 1 個　　(2) 2 個　　(3) 3 個　　(4) 4 個　　(5) 0 個

◎常用對數

例 3.3：試利用換底公式，以 log 2 表示 $\log_2 200$

Ex3.3：試利用換底公式，以 log 2 與 log 3 表示 $\log_3 24$

◎以**共用數值**為底

例 3.4：設 $\log_2 3 = a$， $\log_3 7 = b$，試以 a，b 表示 $\log_{42} 28$

Ex3.4：設 $\log_2 3 = a$， $\log_3 11 = b$，試以 a，b 分別表示 $\log_2 11$ 與 $\log_{33} 66$。

重點 4：利用計算機求一般對數值

1.使用計算機求可求出常用對數值

2.一般的計算機不見得有一個方便的按鍵可以直接按出一般對數值。必須利用**換底公式**來計算

例 4.1：利用計算機求 $\log_2 3$ 的近似值(計算到小數點後第 5 位)

Ex4.1：試利用計算機求出 $\log_2 10$ (四捨五入至小數點後第二位)

◎解方程式

例 4.2：解方程式 $2^x = 3$ (四捨五入到小數點以下第 4 位)

Ex4.2：解方程式 $3^x = 7$ (四捨五入到小數點以下第 4 位)

重點 5：利用對數化簡指數問題

意義：指數和對數是反運算，若遇到指數運算不好處理時，可以化為對數來計算或處理。反之亦然

例 5.1：設 a，b，c 為正實數且滿足 $2^a=5^b=10^c$，試求$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$的值

Ex5.1：設 a，b 為實數且 $10^a=4$，$10^b=5$，試求$\frac{a}{1-b}$的值

例 5.2：設 a，b，c 為正整數，且 $a\log_{520}2+b\log_{520}5+c\log_{520}13=3$，則 $a+b+c=$________(93 學測)

Ex5.2：化簡$\frac{2}{\log_2 60}+\frac{1}{\log_3 60}+\frac{1}{\log_5 60}$

重點 6：常用對數與科學記號、量級

1 意義：任意正實數 A 都可以用 $A=k\times10^n$ ，$1\le k<10$，n 是整數的形式來表示，稱為**科學記號**表示法

2.數的大小量級：將正實數 A 表示為 $k\times10^n$ ，$1\le k<10$，則稱 A 屬於10^n量級

註：負實數 A 表示為$-k\times10^n$ ，$1\le k<10$，則稱 A 屬於10^n量級

註：量級的性質：

(1)當 n 是正整數時，10^n量級的數表示有 n 個 0，是一個$(n+1)$位數，如：$2\times10^3=2000$

(2)當 n 是負整數時，10^n量級的數表示小數點後第位開始出現不為 0 的數，如：$1.2\times10^{-3}=0.0012$

3.首數與尾數：

(1)意義：設 A 為正實數，將 $\log A$ 表示為 $\log A=n+\log k$，其中 n 為整數，$0\le\log k<1$

則稱 n 為 $\log A$ 的**首數**，$\log k$ 為 $\log A$ 的**尾數**

(2)首數與尾數的解讀：

若首數 $n\ge0$，表示 A 的**整數部分為$(n+1)$位數**；其最高位(最左邊)數字，則由尾數來決定

若首數 $n<0$，表示 A 在小數點後**第 n 位開始出現不為 0 的數字**；其最高位(最左邊)數字，則由尾數來決定

(3)性質：

當 $n\ge0$，且 $n\le\log A<n+1$ 時，則 A 為10^n量級，即表示 A 的**整數部分為 $(n+1)$ 位數**

當 $n<0$，且 $n<\log A\le n+1$ 時，則 A 為10^n量級，即表示 A 在小數點後**第$|n|$位開始出現不為 0 的數字**

例 6.1：(1)試利用科學記號表示 16800 與 0.00168，並分別指出屬於哪一量級的數？
(2)化學裡的亞佛加厥數可記為 6.022×10^{23}，則它是屬於哪一量級的數？

Ex6.1：(1)試利用科學記號表示 8430000 與 0.0843，並分別指出屬於哪一量級的數？
(2)試利用科學記號表示 2 個「10^{15}」量級的數，與 2 個「10^{-19}」量級的數

例 6.2：已知 $\log 2.34 \approx 0.3692$，則：
(1) 23400 的科學記號為__________；$\log 23400$ 的首數為_______，尾數為_______
(2) 0.000234 的科學記號為__________；$\log 0.000234$ 的首數為_______，尾數為_______

Ex6.2：已知 $\log 2020 \approx 3.3054$，則：
(1) 2020000 的科學記號為__________；$\log 2020000$ 的首數為______，尾數為_______
(2) 0.002020 的科學記號為__________；$\log 0.002020$ 的首數為______，尾數為_______

例 6.2：試寫出下列各數位數情形：
(1) 3.14×10^{20} 表示整數部分有_____位　　(2) 3.14×10^{-20} 表示小數點後第____位開始不為 0

Ex6.2：試寫出下列各數位數情形：
(1) 5×10^{108} 表示整數部分有_____位　　(2) 5×10^{-108} 表示小數點後第____位開始不為 0

例 6.3：(1) 2^{50} 是______位數？最高位數字為______？
(2) $3^{200}\times7^{1000}$ 是______位數？最高位數字為______？
(3)將 0.5^{500} 表示成小數時，從小數點後第______位開始出現不為 0 的數字？此不為 0 的數字為_____？

Ex6.3：(1) $4^{40}\times3^{100}$ 是______位數？最高位數字為______？
(2)將 0.4^{100} 表示成小數時，從小數點後第______位開始出現不為 0 的數字？此不為 0 的數字為_____？

重點 7：應用問題

意義：科學上利用對數來表示其相對之關係式。

如：地震釋放出的能量與芮氏規模間的關係、聲音之大小與其強度的關係、化學酸鹼度的計算等等

例 7.1：海嘯是一種有強大破壞力的海浪，其強度規模的等級與該海嘯的平均海浪高度 H (公尺)有著以下的關係式：$\mathrm{I}=\frac{1}{2}+\log_2 H$，試求海嘯等級 4 的平均海浪高度為等級 3 的幾倍？

Ex7.1：承例題 5，海嘯是一種有強大破壞力的海浪，其強度規模的等級與該海嘯的平均海浪高度 H (公尺)有著以下的關係式：$\mathrm{I}=\frac{1}{2}+\log_2 H$，已知當海嘯等級 2 時，人會被海浪沖走，求此時的平均海浪高度(公尺)。(四捨五入到小數點以下第一位）

例 7.2：根據牛頓冷卻定律，物體的溫度變化，可以以數學公式 $f(t)=E+(f(0)-E)\times 10^{-kt}$ (°C) 描述，其中 $f(t)$是物體在 t 分鐘時的溫度；$f(0)$則是物體起始($t=0$)時的溫度，E 是環境溫度(單位：°C)，k 是一常數。如果已知實驗室溫度維持 17°C，且 $k=0.012$，則：

(1)若沖煮好一杯 83°C 的咖啡，放置 10 分鐘後，咖啡下降至多少°C？(四捨五入至整數位)

(2)若沖煮好一杯 83°C 的咖啡，自然靜置幾分鐘後是容易入口的 45°C 呢？(四捨五入至整數位)

Ex7.2：承例題 5，若從咖啡沖煮好的 83°C 降至 60°C，需靜置多久分鐘呢？(四捨五入至整數位)

例 7.3：設 E(r)為芮氏規模 r 的地震震央所釋放出的能量。已知 r 與 $E(r)$的關係如下：$\log E(r) = 1.5r + 11.8$。

已知民國 88 年集集大地震的規模是 7.3，民國 100 年日本仙台外海大地震的規模是 9.0，試問仙台外海大地震所釋放出的能量大約是集集大地震的多少倍？(四捨五入至整數位，已知 $10^{0.55} \approx 3.548$)

Ex7.3：設 E(r)為芮氏規模 r 的地震震央所釋放出的能量。已知 r 與 $E(r)$的關係如下：$\log E(r) = 1.5r + 11.8$。

集集發生規模 7.3 的主震後,不久後又發生規模 6.8 的餘震,試問主震所釋放出的能量大約是餘震所釋出的多少倍？(四捨五入至整數位，已知 $10^{0.75} \approx 5.623$)