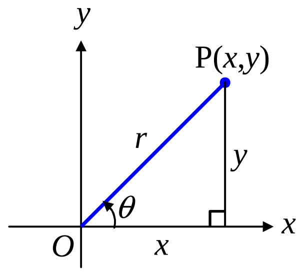
單元 2 三角函數的圖形　　　　二年____班　座號：____　姓名：

重點 0：三角比的定義($\cot\theta$，$\sec\theta$，$\csc\theta$)

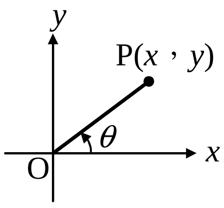
1.定義：設θ是標準位置角(始邊在 x 軸正向上)，在θ角的終邊上任取異於原點的另一點 P(x，y)，$\overline{OP}=r=\sqrt{x^2+y^2}$

(1)**正弦**函數 $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$，(2)**餘弦**函數 $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，(3)**正切**函數 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$

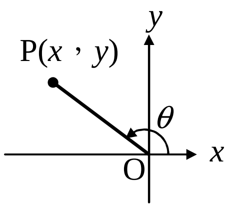
(4)**餘切**函數 $\cot\theta=\dfrac{x}{y}$，(5)**正割**函數 $\sec\theta=\dfrac{r}{x}$，(6)**餘割**函數 $\csc\theta=\dfrac{r}{y}$



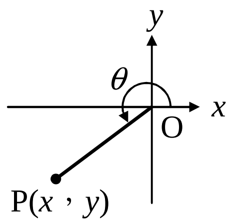
2.象限角：



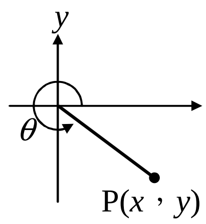
第一象限角



第二象限角



第三象限角



第四象限角

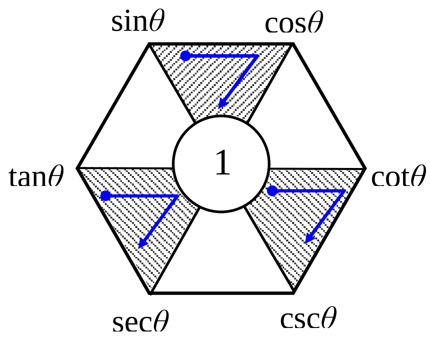
3.基本關係：

(1)倒數關係：$\sin\theta\csc\theta=1$，$\cos\theta\sec\theta=1$，$\tan\theta\cot\theta=1$

(2)商數關係：$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(3)平方關係：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$，$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

(4)餘角關係：$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$，$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$，$\tan(90°-\theta)=\cot\theta$



例 0.1：設 $P(3，4)$是標準位置角θ終邊上一點，試求六個三角比的值

Ex0.1：設 $P(5，-12)$是標準位置角θ終邊上一點，試求六個三角比的值

例0.2：設θ是第二象限角，且$\cos\theta=-\dfrac{2}{3}$，試求其他五個三角比的值。

Ex0.2：已知$\pi<\theta<\dfrac{3\pi}{2}$，且 $\sin\theta=-\dfrac{1}{3}$，試求其他五個三角比的值

例 0.3：已知θ為廣義角，且 $\tan\theta=3$，求：(1) $\cot\theta$ (2)$\dfrac{3\sin\theta+\cos\theta}{3\cos\theta+\sin\theta}$

Ex0.3：已知θ為廣義角，且 $\cot\theta=\dfrac{3}{2}$，求：(1) $\tan\theta$ (2)$\dfrac{2\sin\theta-3\cos\theta}{2\cos\theta+3\sin\theta}$

例 0.4：已知 $\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{5}$，試求下列各式之值：

(1) $\sin\theta\cos\theta$ (2) $\tan\theta+\cot\theta$ (3) $\sec\theta+\csc\theta$

Ex0.4：已知 $\sin\theta-\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，試求下列各式之值：

(1) $\sin\theta\cos\theta$ (2) $\tan\theta+\cot\theta$ (3) $\sec\theta-\csc\theta$

重點 1：正弦函數的圖形

意義：描繪函數圖形最直接的方法就是描點

1.正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形

對某些特殊的 x 值(徑)求出其對應的函數值 $y=\sin x$，列表，將點$(x，y)$逐一標示於坐標平面上。如果描點數夠多，並用平滑曲線將這些點連起來，就可得到 $y=\sin x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 上的圖形 (如例 1.0)

2.(1) $y=\sin x$ 的圖形特性：

x	$0\sim\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}\sim\pi$	$\pi\sim\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}\sim 2\pi$
y	遞增	遞減	遞減	遞減

(2)定義域：全體實數 R，即$\{x\,|\,x\in R\}$

x 取值的範圍稱作定義域，對任意實數 x，$\sin x$ 都有意義，所以其定義域為全體實數 R

(3)值域：$\{y\in R\,|\,-1\le y\le 1\}$

定義域的對應值 y，稱為函數的值域，$\sin x$ 的值涵蓋在 -1 與 1 之間的實數，所以其值域為$\{y\in R\,|\,-1\le y\le 1\}$

(4)週期 T：$y=\sin x$ 為週期函數，週期 T 為 2π

由於 $y=\sin x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 與 $2\pi\le x\le 4\pi$ 的圖形完全相同，即 $\sin(x+2\pi)=\sin x$，得知週期為 2π

註：頻率 f 為週期 T 的倒數，即 $f=\frac{1}{T}$

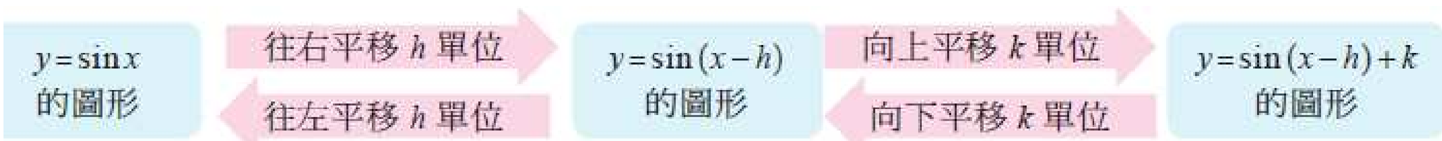
(5)振幅：$y=\sin x$ 的振幅為 1

函數圖形在 x 軸上方或下方擺動的最大距離為振幅

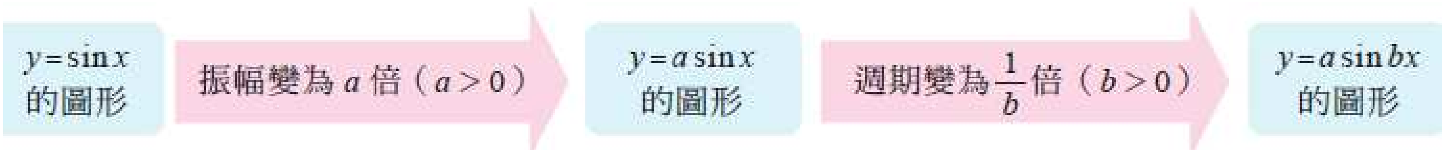
(6)對稱性：(i) $\sin(-x)=-\sin x$，即$(-x，-y)$取代$(x，y)$，得知 $y=\sin x$ 的圖形對稱於原點

(ii)對稱於所有通過波峰或波谷的鉛直線：方程式為 $x=\frac{\pi}{2}$，$x=\frac{3\pi}{2}$，…等

3.正弦函數 $y=\sin x$ 圖形的平移



4.正弦函數 $y=\sin x$ 圖形的伸縮



註：設 a，b，c，d 為實數，函數 $y=a\sin(bx+c)$的圖形可經由函數 $y=\sin x$ 圖形的平移與伸縮得到

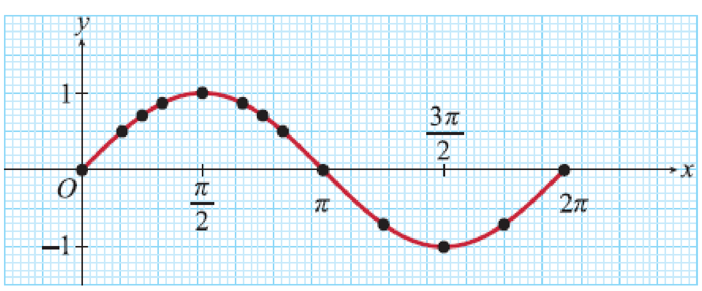
因為伸縮可能會改變圖形的振幅與週期，所以在實際操作上，我們會**先處理伸縮再進行平移**

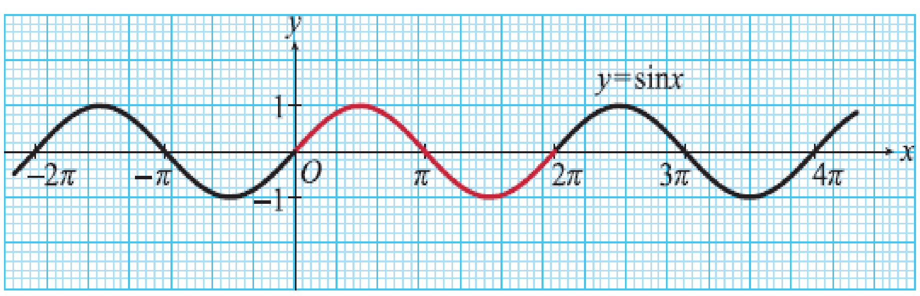
例 1.0：在坐標平面上描繪 $y=\sin x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 上的圖形

對某些特殊的 x 值(徑)求出其對應的函數值 $y=\sin x$，列表如下

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

將點$(x，y)$逐一標示於坐標平面上。並用平滑曲線將這些點連起來，就可得到 $y=\sin x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 上的圖形

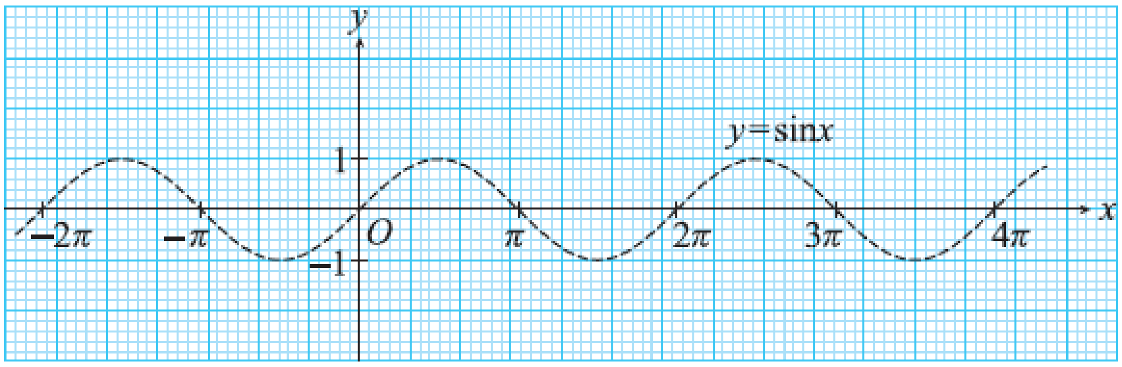




例 1.1：利用 $y=\sin x$ 的圖形畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值、最小值及振幅

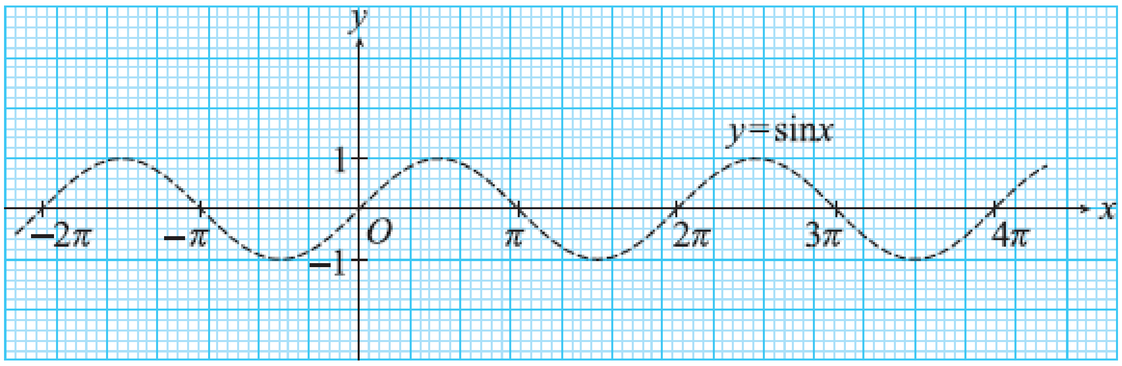
(1) $y=\sin x+1$　　　(2) $y=\sin(x-\frac{3\pi}{4})$

解：　(1) $y=\sin x+1$　由 $y=\sin x$ 的圖形向__________



週期＝_____、最大值＝_____、最小值＝_____及振幅＝_____

(2) $y=\sin(x-\frac{3\pi}{4})$　由 $y=\sin x$ 的圖形向__________

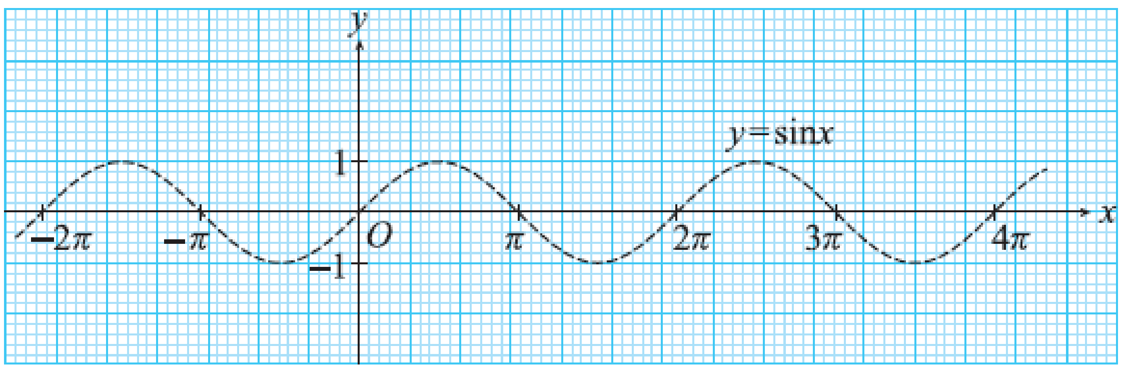


週期＝_____、最大值＝_____、最小值＝_____及振幅＝_____

Ex1.1：利用 $y=\sin x$ 的圖形畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值、最小值及振幅

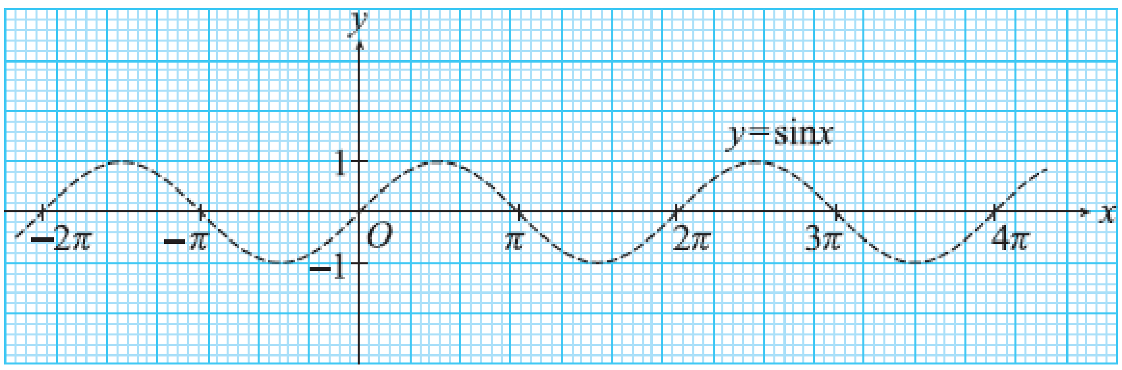
(1) $y=\sin x-1$　　　(2) $y=\sin(x+\frac{\pi}{2})$

解：(1) $y=\sin x-1$　由 $y=\sin x$ 的圖形向__________



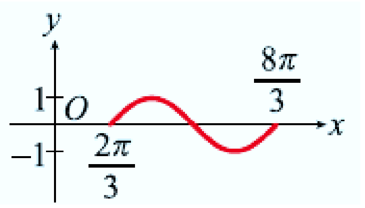
週期＝_____、最大值＝_____、最小值＝_____及振幅＝_____

(2) $y=\sin(x+\frac{\pi}{2})$　由 $y=\sin x$ 的圖形向__________

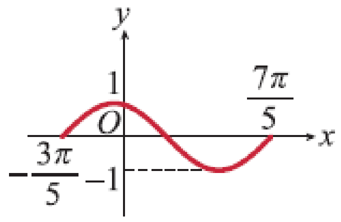


週期＝_____、最大值＝_____、最小值＝_____及振幅＝_____

例 1.2：已知右圖為 $y=\sin(x-h)$一個週期的圖形，其中 $0<h<2\pi$ ，試求 h 的值



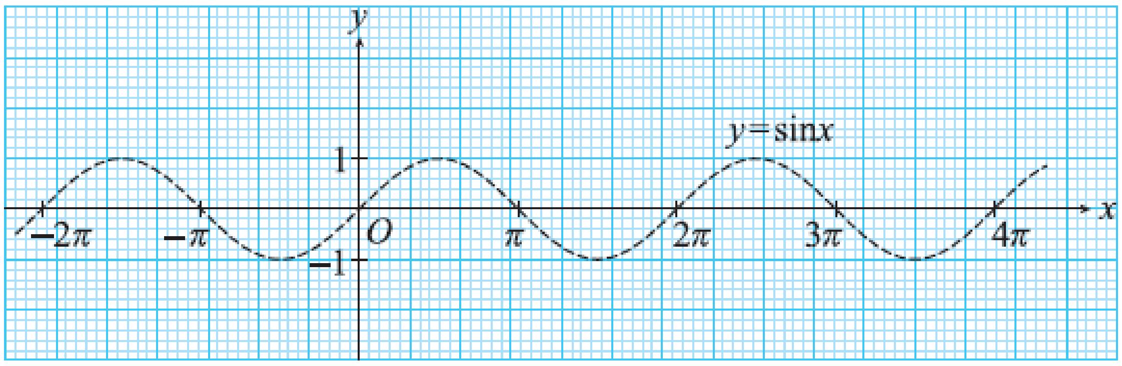
Ex1.2：已知右圖為 $y=\sin(x+h)$一個週期的圖形，其中 $0<h<2\pi$ ，試求 h 的值



例 1.3：利用 $y=\sin x$ 的圖形畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值及最小值

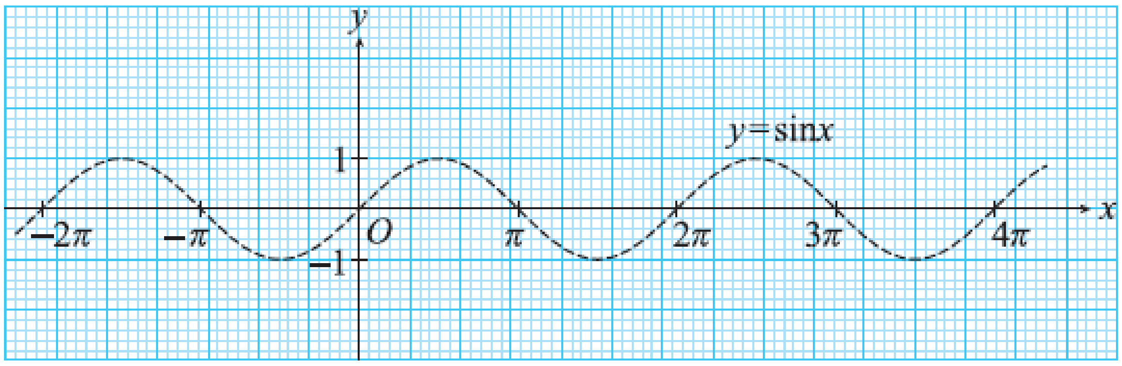
(1) $y=2\sin x$　　　　(2) $y=\sin 2x$

解：(1) $y=2\sin x$　由 $y=\sin x$ 的圖形____________



週期＝_____、最大值＝_____、最小值＝_____及振幅＝_____

(2) $y=\sin 2x$　　由 $y=\sin x$ 的圖形____________

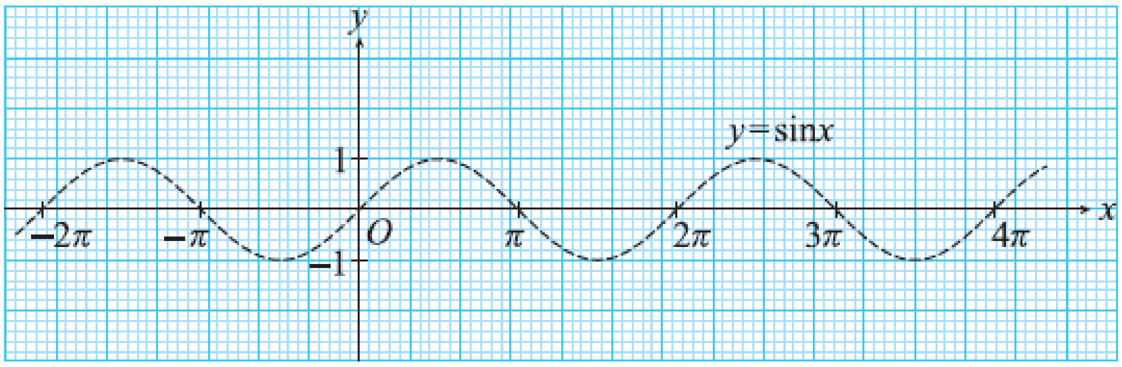


週期＝_____、最大值＝_____、最小值＝_____及振幅＝_____

Ex1.3：利用 $y=\sin x$ 的圖形畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值及最小值。

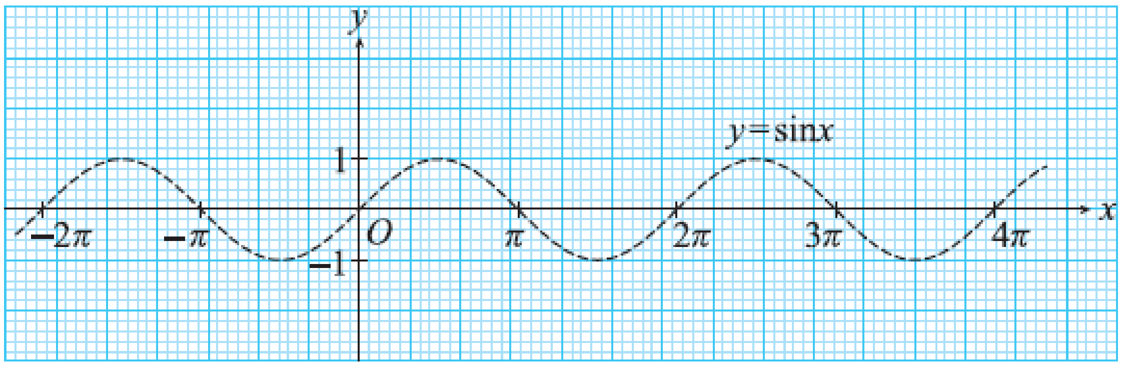
(1) $y=\frac{1}{2}\sin x$　　　　(2) $y=\sin\frac{x}{2}$

解：(1) $y=2\sin x$　由 $y=\sin x$ 的圖形____________



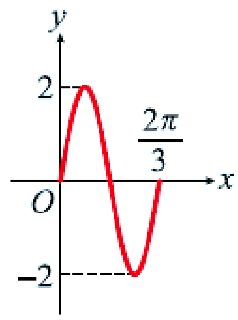
週期＝_____、最大值＝_____、最小值＝_____及振幅＝_____

(2) $y=\sin\dfrac{x}{2}$　由 $y=\sin x$ 的圖形__________

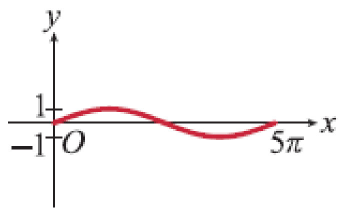


週期＝_____、最大值＝_____、最小值＝_____及振幅＝_____

例 1.4：已知右圖為 $y=a\sin bx$ 一個週期的圖形，其中 $a>0$，$b>0$，試求 a，b 的值



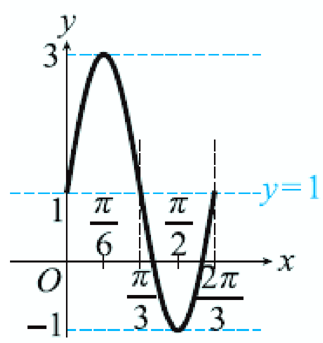
Ex1.4：已知右圖為 $y=\sin bx$ 一個週期的圖形，其中 $b>0$，試求 b 的值



例 1.5：函數 $y=\sin(x-\dfrac{\pi}{3})+2$ 的圖形，可由 $y=\sin x$ 的圖形向____平移_____單位，向上平移_____單位得到

Ex1.5：函數 $y=3\sin 2x$ 的圖形，可由 $y=\sin x$ 的圖形_____伸縮_____單位，______平移_____單位得到。
圖形的振幅變為______，週期變為______

例 1.6：右圖為 $y=a\sin kx+b$ 在某一個週期內的圖形，其中 a，k，b 皆為常數，且 $a>0$，試求 a，b，k 的值



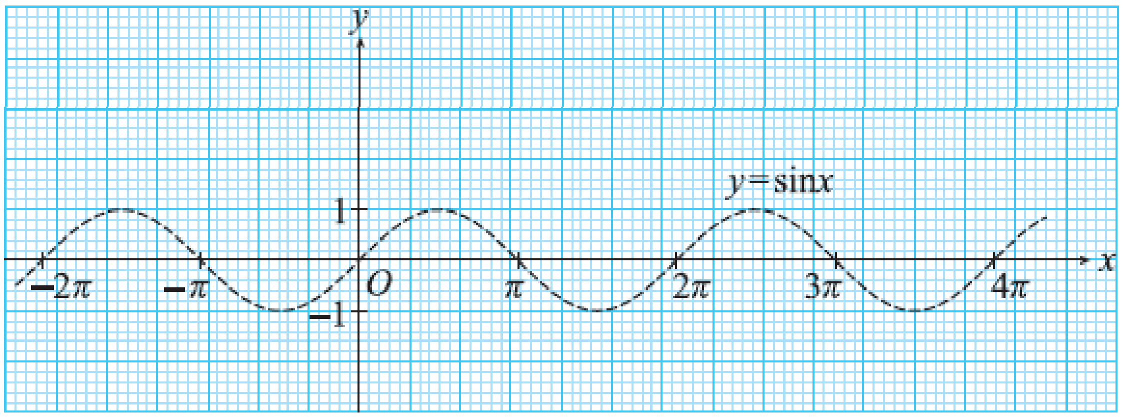
Ex1.6：關於函數 $f(x)=2\sin 3x$，選出正確的選項：

(1) $-2\leq f(x)\leq 2$　(2) $f(x)$在 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 時有最大值　(3) $f(x)$的週期為 $\dfrac{2\pi}{3}$

(4) $y=f(x)$的圖形對稱於直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$　(5) $f(2)>0$

例 1.7：利用 $y=\sin x$ 的圖形畫出函數 $y=3\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+1$ 的圖形，並求其週期、最大值、最小值及振幅

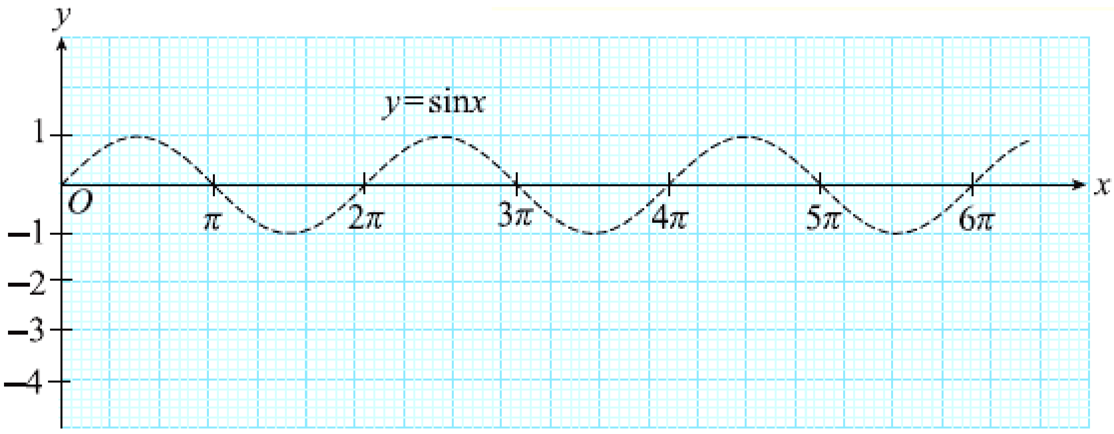
解：$y=3\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+1=$________________　由 $y=\sin x$ 的圖形__________



週期=_____、最大值=_____、最小值=_____及振幅=_____

Ex1.7：利用 $y=\sin x$ 的圖形，在下圖中畫出函數 $y=2\sin\frac{x}{2}-2$ 的圖形，並求其週期、最大值、最小值及振幅

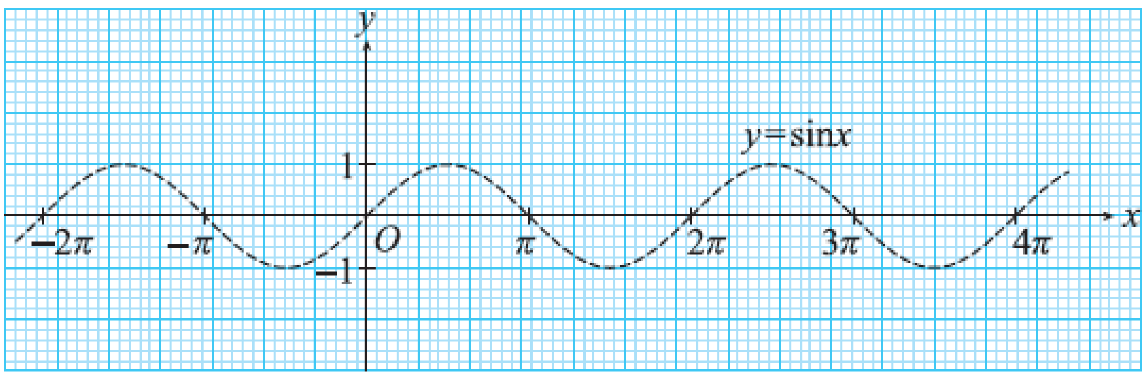
解：$y=2\sin\frac{x}{2}-2=$________________　由 $y=\sin x$ 的圖形__________



週期=_____、最大值=_____、最小值=_____及振幅=_____

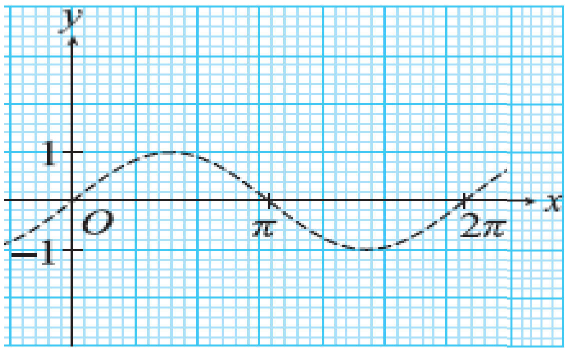
Ex1.71：利用 $y=\sin x$ 在 $-2\pi\leq x\leq 2\pi$ 的圖形，在下圖中畫出函數 $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$ 的圖形，求其週期、最大值、最小值及振幅

解：$y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1=$________________　由 $y=\sin x$ 的圖形__________

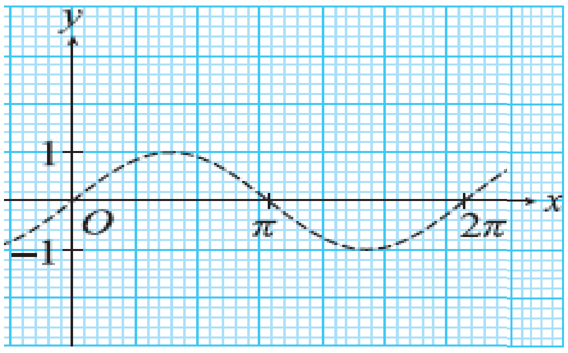


週期=_____、最大值=_____、最小值=_____及振幅=_____

例 1.8：利用 $y=\sin x$ 的圖形比較 $a=\sin 1$，$b=\sin 2$，$c=\sin 3$，$d=\sin 4$ 的大小

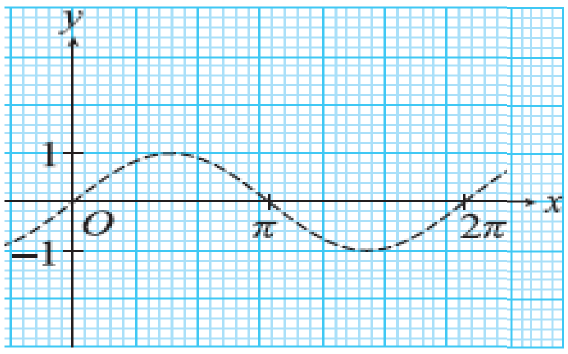


Ex1.8：設 $a=\sin\frac{2\pi}{5}$，$b=\sin\frac{3\pi}{5}$，$c=\sin\frac{4\pi}{5}$，$d=\sin\frac{7\pi}{5}$，$e=\sin 2\pi$ 的大小



Ex1.81：已知 $a=\sin 5$，選出正確的選項：

(1) $-1<a<-\frac{1}{2}$　(2) $-\frac{1}{2}<a<0$　(3) $0<a<\frac{1}{2}$　(4) $\frac{1}{2}<a<1$



綜合練習：

例 T.1：求下列函數圖形的週期、最大值及最小值等：

	週期	頻率	最大值	最小值	振幅
$y=\sin x+2$					
$y=-\sin(x+\frac{\pi}{2})-2$					
$y=3\sin x$					
$y=-2\sin x$					
$y=3\sin(2x-\frac{2\pi}{3})$					
$y=\lvert\sin 3x\rvert$					

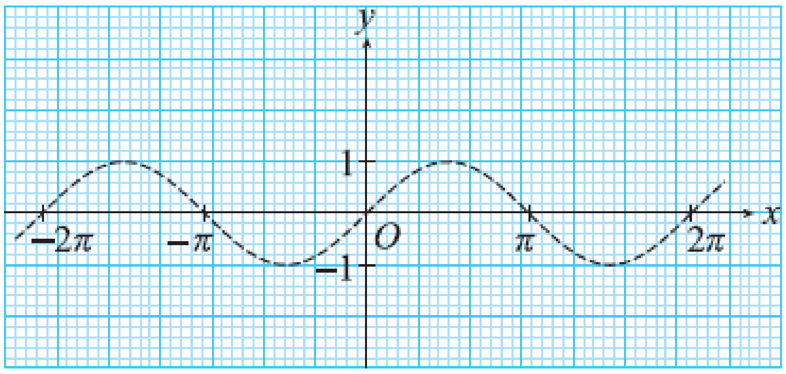
例 T.2：關於函數 $y=f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{2})+2$ 的圖形，下列選項哪些是正確的？(多選)

(1) $-2\le y\le 2$　(2)函數 $f(x)$在 $x=\pi$ 時有最大值　(3)函數 $f(x)$的振幅為 2

(4)函數 $f(x)$的週期為 2π　(5) $f(2)>0$

例 T.3：設 $-2\pi\le x\le 2\pi$，利用 $y=\sin x$ 的圖形，求下列各式的解：

(1)若 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 x 的解　(2)若 $\sin x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 x 的解



ExT.3：關於函數 $y=f(x)=2\sin 4x$ 的圖形，下列選項哪些是正確的？(多選)

(1) $-2\le y\le 2$　(2)函數 $f(x)$在 $x=\frac{\pi}{2}$ 時有最大值　(3)函數 $f(x)$的振幅為 2

(4)函數 $f(x)$的週期為 $\frac{\pi}{2}$　(5)函數的圖形對稱於直線 $x=\pi$

ExT.31：關於函數 $y=f(x)=-3\sin 2x$ 的圖形，下列選項哪些是正確的？(多選)

(1) $-3\le y\le 3$　(2)函數 $f(x)$在 $x=\frac{\pi}{4}$ 時有最大值　(3)函數 $f(x)$的振幅為 3

(4)函數 $f(x)$的週期為 π　(5)函數的圖形對稱於直線 $x=\frac{3\pi}{4}$

重點 2：餘弦函數的圖形

意義：描繪函數圖形最直接的方法就是描點。而有了正弦函數的圖形後，可以藉助它及圖形平移的概念來描繪餘弦函數的圖形

1.餘弦函數 $y=\cos x$ 的圖形

(1)對某些特殊的 x 值(弳)求出其對應的函數值 $y=\sin x$，列表，將點$(x，y)$逐一標示於坐標平面上。如果描點數夠多，並用平滑曲線將這些點連起來，就可得到 $y=\sin x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 上的圖形

(2)由換算公式 $\cos x=\cos(x+\frac{\pi}{2})$可知，$y=\cos x$ 的圖形可由正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形向左平移$\frac{\pi}{2}$單位得到 (例 2.1)

2.(1) $y=\cos x$ 的圖形特性：

x	$0\sim\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}\sim\pi$	$\pi\sim\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}\sim 2\pi$
y	遞減	遞減	遞增	遞增

(2)定義域：全體實數 R，即$\{x\mid x\in R\}$

x 取值的範圍稱作定義域，對任意實數 x，$\cos x$ 都有意義，所以其定義域為全體實數 R

(3)值域：$\{y\in R\mid -1\le y\le 1\}$

定義域的對應值 y，稱為函數的值域，$\cos x$ 的值涵蓋在－1 與 1 之間的實數，所以其值域為$\{y\in R\mid -1\le y\le 1\}$

(4)週期 T：$y=\cos x$ 為週期函數，週期 T 為 2π

由於 $y=\cos x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 與 $2\pi\le x\le 4\pi$ 的圖形完全相同，即 $\cos(x+2\pi)=\cos x$，得知週期為 2π

註 1：餘弦函數 $y=\cos x$ 圖形可由正弦函數 $y=\sin x$ 平移得到，所以其週期為 2π

註 2：頻率 f 為週期 T 的倒數，即 $f=\frac{1}{T}$

(5)振幅：$y=\cos x$ 的振幅為 1；餘弦函數 $y=\cos x$ 圖形可由正弦函數 $y=\sin x$ 平移得到，所以其振幅為 1

函數圖形在 x 軸上方或下方擺動的最大距離為振幅

(6)對稱性：(i) $\cos(-x)=\cos x$，即$(-x，y)$取代$(x，y)$，得知 $y=\cos x$ 的圖形對稱於 y 軸

(ii)對稱於所有通過波峰或波谷的鉛直線：方程式為 $x=\pi$，$x=2\pi$，…等

3.解方程式 $\cos x=k$，k 為實數

先求出在$0\le x\le 2\pi$範圍內的解，再利用同界角的概念，即可得到所有的解

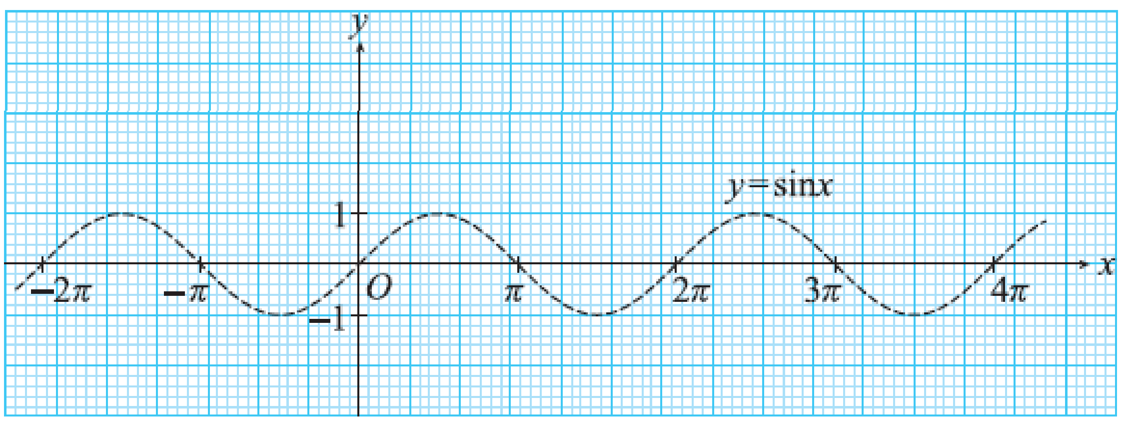
例 2.1：在坐標平面上描繪 $y=\cos x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 上的圖形

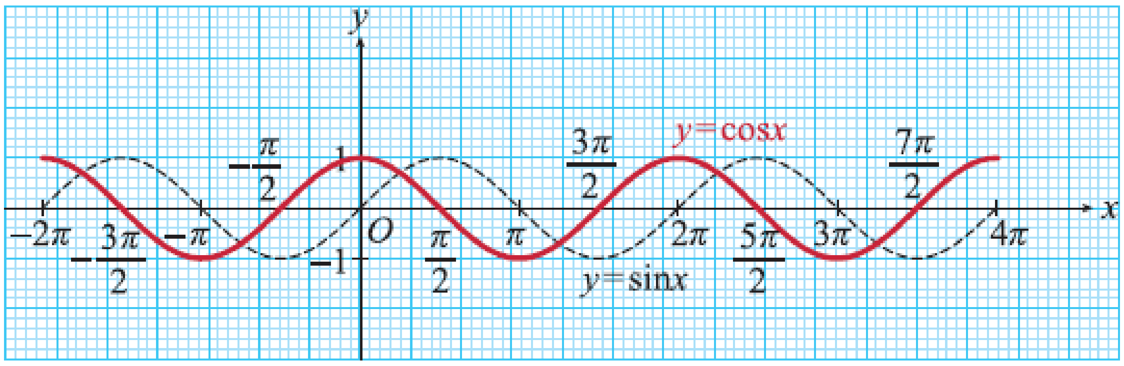
(1)對某些特殊的 x 值(弳)求出其對應的函數值 $y=\cos x$，列表如下

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

將點$(x，y)$逐一標示於坐標平面上。並用平滑曲線將這些點連起來，就可得到 $y=\cos x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 上的圖形

(2)利用下圖之正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形平移的概念來描繪餘弦函數 $y=\cos x$ 的圖形

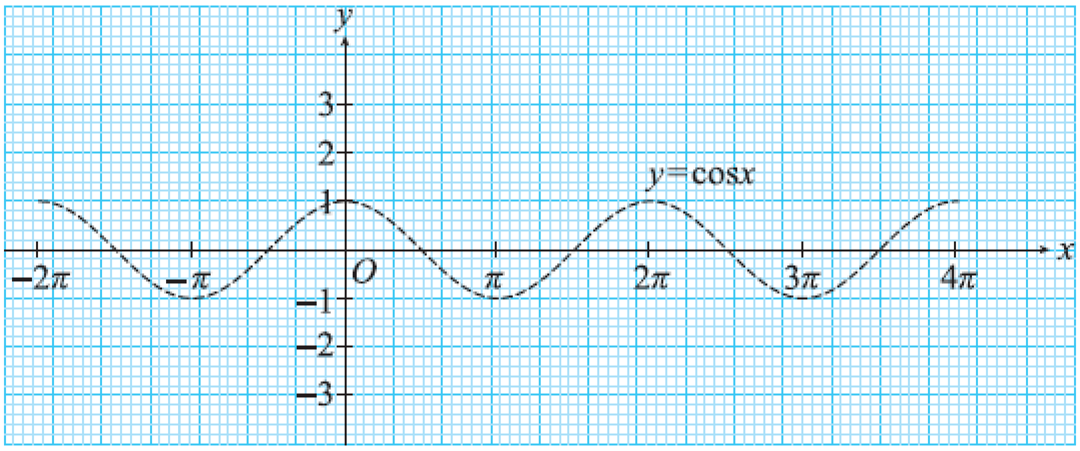




Ex2.1：利用 $y=\cos x$ 的圖形畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值、最小值及振幅

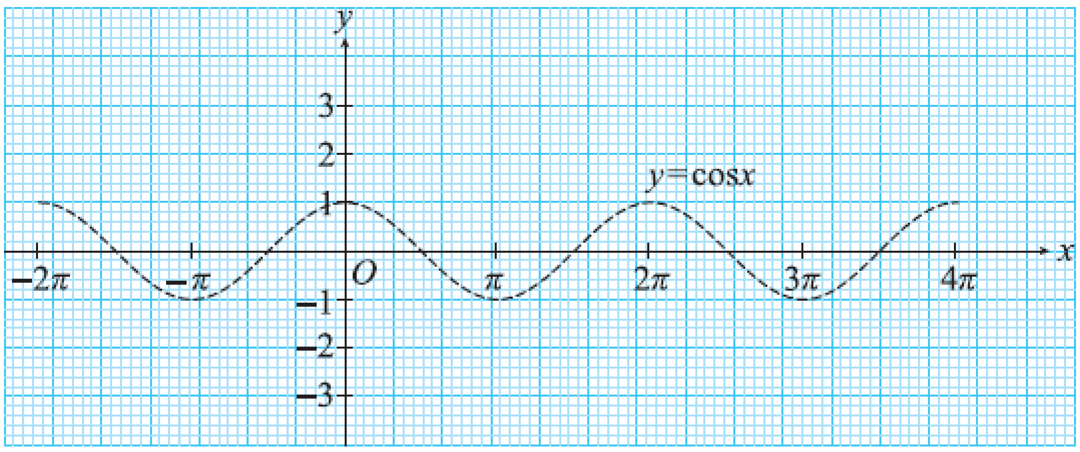
(1) $y=\cos x+2$　　　(2) $y=3\cos x$

解：(1) $y=\cos x+2$　由 $y=\cos x$ 向________



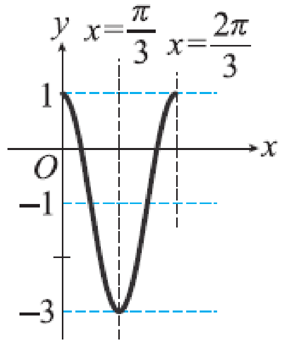
週期＝_____、最大值＝_____、最小值＝_____及振幅＝_____

(2) $y=3\cos x$　由 $y=\cos x$ ________



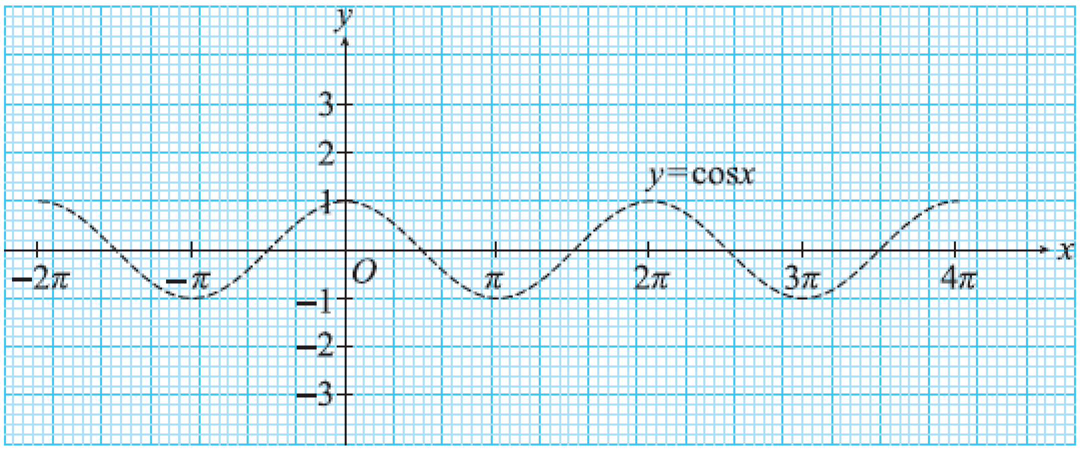
週期＝_____、最大值＝_____、最小值＝_____及振幅＝_____

例 2.2：右圖是函數 $y=f(x)=a\cos kx+b$ 在某一個週期內的圖形，其中 a，k，b 皆為常數，且 $k>0$，求 a，b，k 之值



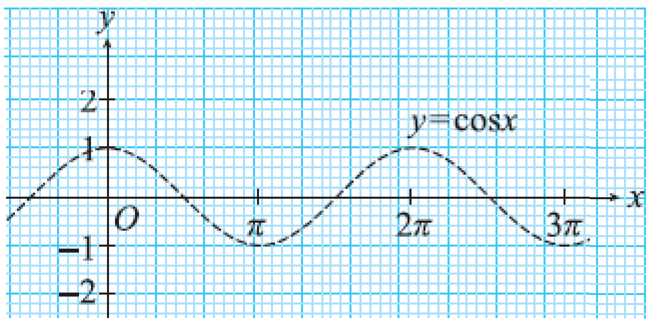
Ex2.2：利用 $y=\cos x$ 在 $-2\pi\le x\le 2\pi$ 上的圖形，在下圖中畫出函數 $y=2\cos(x+\frac{\pi}{2})-1$ 的圖形，並求其週期、最大值、最小值及振幅

解：(1) $y=2\cos(x+\frac{\pi}{2})-1=$ ______　　由 $y=\cos x$ ______

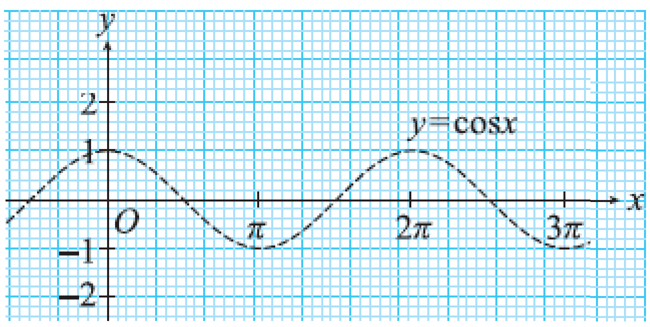


週期＝_____、最大值＝_____、最小值＝_____及振幅＝_____

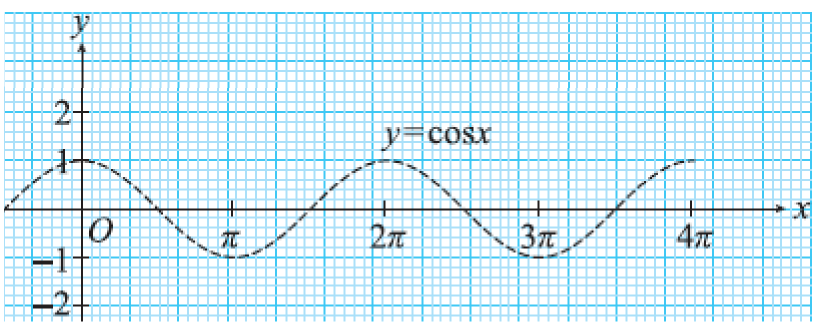
例 2.3：利用 $y=\cos x$ 的圖形比較 $a=\cos 1$，$b=\cos 2$，$c=\cos 3$，$d=\cos 4$ 的大小



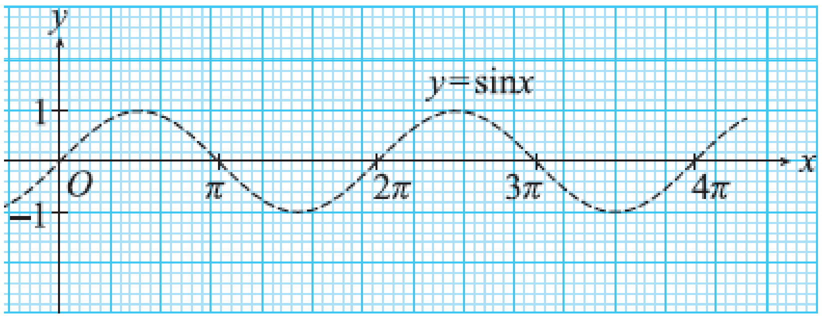
Ex2.3：設 $a=\cos\frac{2\pi}{5}$，$b=\cos\frac{3\pi}{5}$，$c=\cos\frac{4\pi}{5}$，$d=\cos\frac{7\pi}{5}$，$e=\cos 2\pi$ 的大小



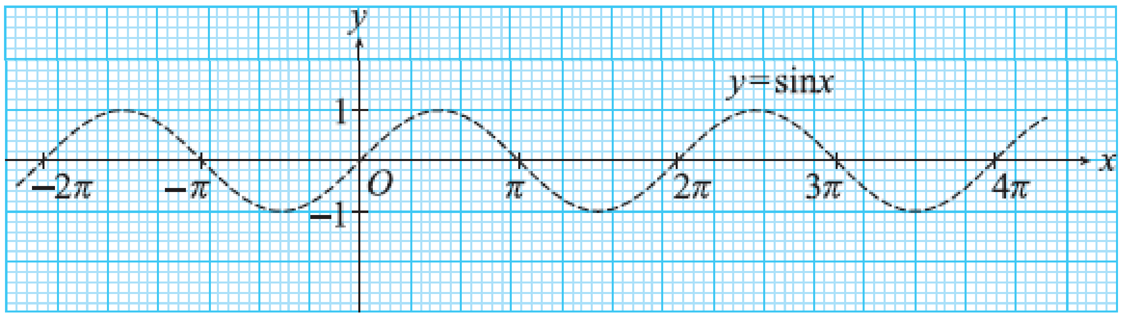
例 2.4：在 $0\le x\le 4\pi$ 的範圍內，求方程式 $\cos x=\frac{1}{2}$ 的解



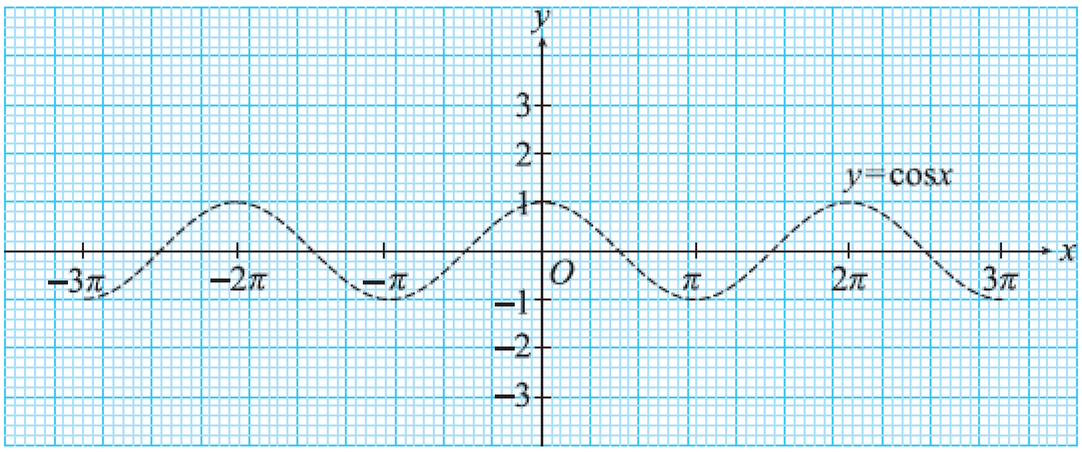
Ex2.4：在 $0 \le x \le 4\pi$ 的範圍內，求方程式 $\sin x=\dfrac{1}{2}$ 的解



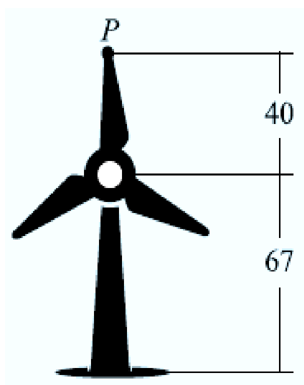
例 2.5：求方程式 $\sin x=\dfrac{x}{10}$ 解的個數



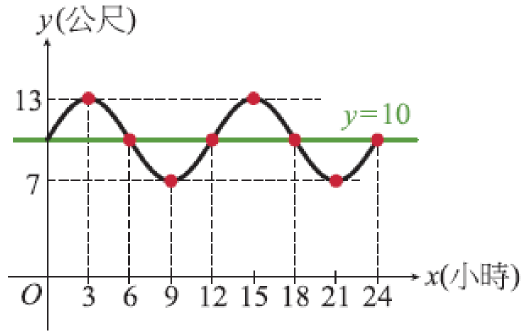
Ex2.5：利用 $y=\cos x$ 的圖形，求方程式 $8\cos x=x$ 解的個數



例 2.6：風力發電機的三個葉片長度皆為 40 公尺，其旋轉中心離地面 67 公尺，如右圖所示，P 點為某葉片的頂端且逆時針方向旋轉一圈需時 4 秒。當風力發電機開始運轉時，P 點恰在離地最高的位置上，x 秒後，P 點離地的高度 y (公尺)可表為 $y=a\sin(bx+\dfrac{\pi}{2})+c$ 其中 a，b 都是正數，求 a，b 與 c 的值



Ex2.6：海水受到月球引力的影響會發生漲落的潮汐現象。假設下圖是某港口在一天 24 小時海水漲落的水深記錄圖經過長期的觀測得知，上圖的水深 y (公尺)與時間 x (小時)的關係可表為 $y=a\sin bx+c$，其中 a，b，c 都是正數，求 a，b，c 的值



綜合練習：

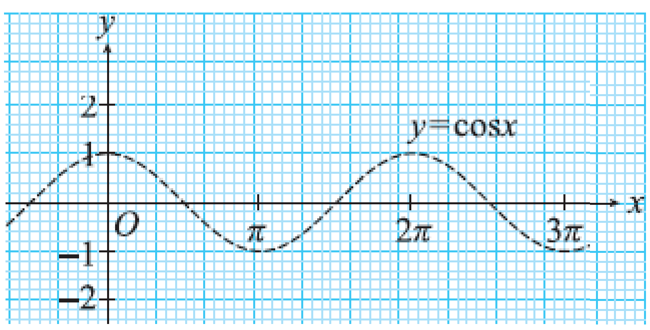
例 T.1：求下列函數圖形的週期、最大值及最小值等：

	週期	頻率	最大值	最小值	振幅
$y=\cos x-3$					
$y=-\cos(x+\frac{\pi}{4})$					
$y=\cos 2x$					
$y=\cos(-3x)$					
$y=\lvert\cos 3x\rvert$					

例 T.2：關於函數 $y=f(x)=\cos(x+\frac{\pi}{2})-2$ 的圖形，下列選項哪些是正確的？(多選)

(1) $-3\le y\le 3$　(2)函數 $f(x)$在 $x=\frac{\pi}{2}$ 時有最小值　(3)函數 $f(x)$的振幅為 2

(4)函數 $f(x)$的週期為 2π　(5) $f(3)<0$



重點 3：正切函數的圖形

1.餘弦函數 $y=\tan x$ 的圖形

由換算公式 $\tan(x+\pi)=\tan x$，又因為 $\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$，$x=-\frac{\pi}{2}$ 時沒有定義，

所以作圖時只需先畫出 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 範圍內的圖形作討論 **(例 3.0)**

2.(1) $y=\tan x$ 的圖形特性：

x	$-\frac{\pi}{2}\sim 0$	$0\sim\frac{\pi}{2}$
y	$-\infty$ 遞增 0	0 遞增 ∞

(2)定義域：$\{x\in R \mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}，k\in Z\}$

x 取值的範圍稱作定義域，$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ 中分母 $\cos x\neq 0$，所以其定義域為 $\{x\in R \mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}，k\in Z\}$

(3)值域：$\{y\in R\}$，即**沒有最大值，也沒有最小值**

定義域的對應值 y，稱為函數的值域，$\tan x$ 的值涵蓋每一個實數，所以其值域為 $y\in R$

(4)週期 T：$y=\tan x$ 為週期函數，週期 T 為 π

由於 $y=\tan x$ 在 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 與 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ 的圖形完全相同，即 $\tan(x+\pi)=\tan x$，得知週期為 π

註：頻率 f 為週期 T 的倒數，即 $f=\frac{1}{T}$

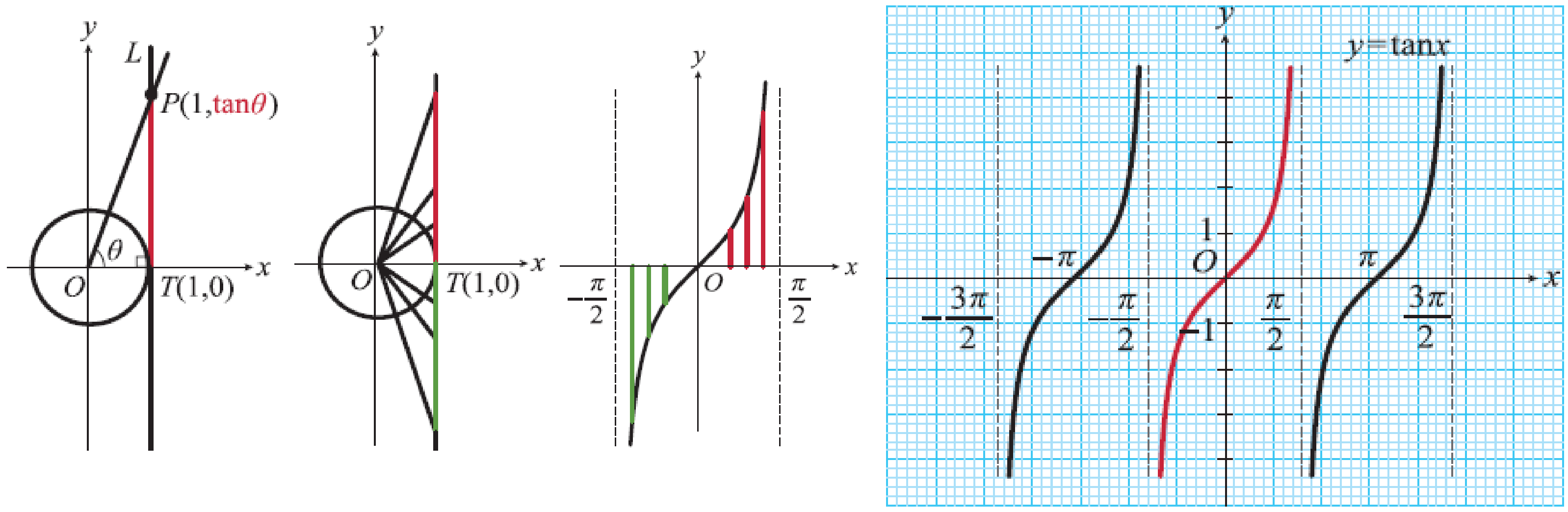
(5)對稱性：(i) $\tan(-x)=-\tan x$，$y=\tan x$ 的圖形對稱於原點

(ii)漸近線為鉛直線：方程式為 $x=-\frac{\pi}{2}$，$x=\frac{\pi}{2}$，…等

例 3.0：試在坐標平面上描繪 $y=\tan x$ 在 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 上的圖形

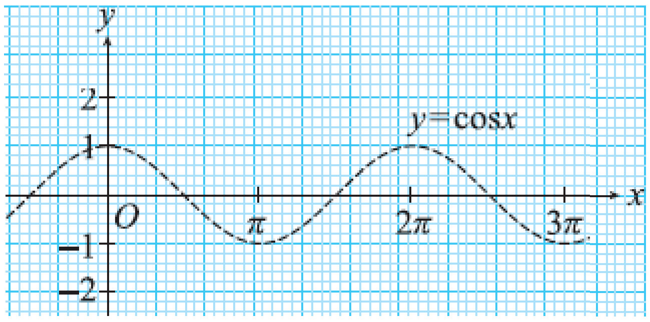
作法：在坐標平面上，以原點 O 為圓心，作一單位圓及過點 $T(1,0)$ 的切線 L，再以 x 軸正向為始邊，作一廣義角 θ

因為廣義角 θ 的終邊與直線 L 交於 $P(1,\tan\theta)$，所以 $\tan\theta$ 是 P 點的 y 坐標



當 θ 由 $-\frac{\pi}{2}$ 逐漸增加到 $\frac{\pi}{2}$ 時，P 點的 y 坐標 $\tan\theta$ 的變化情形可用圖中的線段與長短來表示，利用這些 P 點的 y 坐標，可描繪出函數 $y=\tan x$ 在 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 上的圖形。因為 $\tan(x+\pi)=\tan x$，只需將右圖複製向右、向左平移 π 單位，可得 $y=\tan x$ 全部圖形

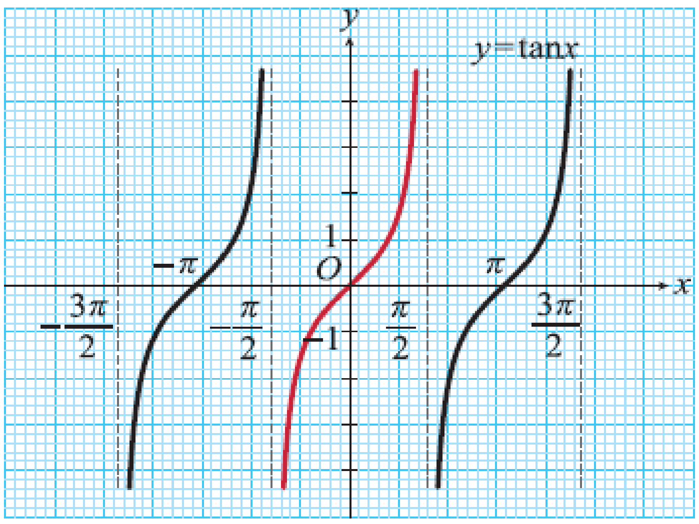
例 3.1：在 $0<x<2\pi$ 範圍內，$y=\tan x$ 和 $y=\cos x$ 的圖形有幾個交點？



Ex3.1：設函數 $y=f(x)=2\tan(x-\frac{\pi}{4})$ 的圖形，下列選項哪些是正確的？(多選)

(1) $y=f(x)$ 圖形的週期為 π　(2) $y=f(x)$ 的圖形是將 $y=\tan x$ 的圖形向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 單位

(3) $-2\le f(x)\le 2$　(4) $f(\frac{\pi}{2})=2$　(5) $f(4)<0$



例 3.2：設 $a=\tan(-170°)$，$b=\tan 80°$，$c=\tan\frac{\pi}{3}$，$d=\tan 1$，試比較 a，b，c，d 的大小

Ex3.2：設 $a=\tan\frac{3\pi}{5}$，$b=\tan\frac{3\pi}{4}$，$c=\tan\frac{5\pi}{4}$，$d=\tan\frac{4\pi}{3}$，試比較 a，b，c，d 的大小

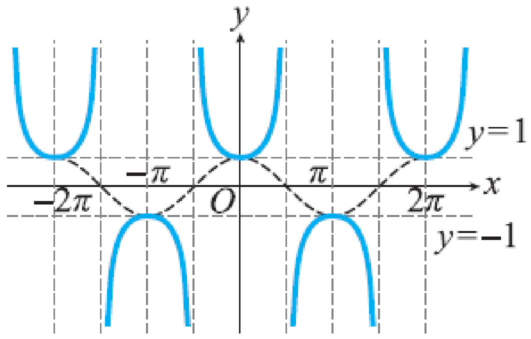
Ex3.21：下列哪些函數圖形的週期為 π？

(1) $y=\tan(x-\frac{\pi}{4})$　(2) $y=\tan 2x+3$　(3) $y=|\tan x|$　(4) $y=|\sin x|$　(5) $y=2\tan(x+\frac{\pi}{2})$

重點補充：正割函數與餘歌函數的圖形

1.正割函數 $y=\sec x$ 的圖形

(1)因 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ 利用餘弦函數的倒數，得 $y=\sec x$ 的圖形，如右圖



(2)週期為 2π

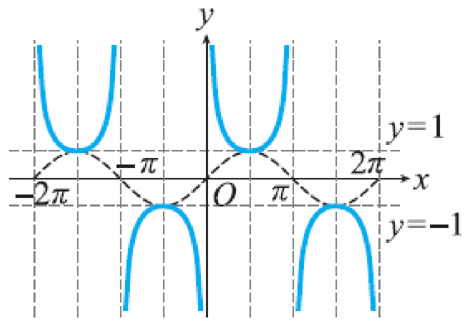
(3)定義域 $\{x\,|\,x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}\}$

(4)值域 $\{y\,|\,y\geq 1$ 或 $y\leq 1\}$

(5)圖形對稱於 y 軸

2.餘割函數 $y=\csc x$ 的圖形

(1)因 $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$ 利用正弦函數的倒數，得 $y=\csc x$ 的圖形，如右圖



(2)週期為 2π

(3)定義域 $\{x\,|\,x\neq n\pi\}$

(4)值域 $\{y\,|\,y\geq 1$ 或 $y\leq 1\}$

(5)圖形對稱於原點

例 1：在 $-\pi<x<2\pi$ 範圍內，$y=\tan x$ 和 $y=\csc x$ 的圖形有幾個交點？

Ex1：已知 $0\leq x\leq 5\pi$ 且 $\sec x=1$，則滿足此條件的 x 共有多少個？

Ex2：設 $a=\csc 1$，$b=\csc 2$，$c=\csc 3$，$d=\csc 4$，試比較 a，b，c，d 的大小